УДК 517.71

Многомерная дискретная фазовая система с кусочно-линейной характеристикой

© А.Ф. Грибов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Исследовано отображение, служащее математической моделью системы фазовой синхронизации с дискретным временем. Получены условия существования гиперболического аттрактора, установлено наличие гомоклинических траекторий, приводящих к его рождению.

Ключевые слова: *фазовая система, отображение, бифуркация, гиперболический аттрактор.*

Широкий класс систем автоматического регулирования описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = Bx + g\xi,\ \ \xi = \Phi(\sigma),\ \ \sigma = c^T x, \tag{1}$$

где $x \in R^n$; $\sigma \in R^l$; $\xi \in R^m$; B, g, c – постоянные матрицы размером $n \times n$, $n \times m$, $n \times l$ соответственно; $\Phi(\sigma)$ – нелинейная векторная функция векторного аргумента σ [1–3].

Из множества систем $\dot{x} = f(x)$ будем рассматривать фазовые системы, для которых существует вектор $d \neq 0$, такой что $\forall x \in R^n$ $f(x+d) = f(x)$. Для фазовой системы без ограничения общности матрицу B можно считать особой, а функцию $\Phi(\sigma)$ – периодической. Фазовую систему (1) с невырожденной передаточной функцией $W(p) = c^T (B - pE)^{-1} g$ можно представить с явно выделенной угловой координатой $\varphi = \sigma$ в виде

$$\dot{\varphi} = \rho^T x - a\Phi(\varphi), \quad \dot{x} = Ax + k\Phi(\varphi), \tag{2}$$

где A – постоянная матрица $(n-1)\times(n-1)$; k и ρ постоянные $(n-1)$-мерные векторы; a – число; $\Phi(\varphi) \equiv F(\varphi) - \gamma$ – скалярная 2π-периодическая функция.

Одной из актуальных нерешенных проблем в теории фазовых систем является получение аналитических соотношений, позволяющих проводить анализ сложной динамики, необходимый при расчете конкретных устройств.

Для фазовой системы (2) рассмотрим разностную схему Эйлера:

$$\dot{\varphi} = \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}, \quad \dot{x} = \frac{x(t+h)-x(t)}{h}. \tag{3}$$

Тогда (2) преобразуется к виду

$$\varphi(t+h) = \varphi(t) + h\left(\rho^T x(t) - a\Phi(\varphi(t))\right),$$
$$x(t+h) = x(t) + h\left(Ax(t) + k\Phi(\varphi(t))\right).$$

Введем следующие обозначения:

$$\varphi(t) = \varphi_i; \;\; x(t) = x_i; \;\; \varphi(t+h) = \varphi_{i+1} = \overline{\varphi}; \;\; x(t+h) = x_{i+1} = \overline{x};$$
$$t_{i+1} = t_i + h; \;\; t_i = t = ih + t_0$$

и получаем отображение цилиндра

$$\overline{\varphi} = \varphi + l^T x - \alpha\Phi(\varphi), \quad \overline{x} = Bx + \beta\Phi(\varphi), \tag{4}$$

где $l^T = h\rho^T$; $\alpha = h\alpha$; $B = E + hA$; $\beta = hk$. Данное отображение может служить простейшей математической моделью системы фазовой синхронизации с дискретным временем. Уравнение дискретной системы фазовой синхронизации общего вида также сводится к (4).

Рассматриваемые отображения являются частными случаями отображения Белых [5].

Утверждение 1. *Отображение (4) при условии, что матрица B гурвицева, диссипативно.*

Пусть $|\Phi(\varphi)| \le m$, $\|B\| = q < 1$, тогда

$$\|\overline{x}\| < \|B\|\|x\| + |\beta||\Phi(\varphi)| < q\|x\| + |\beta||\Phi(\varphi)| < q\|x\| + |\beta|m < \|x\|.$$

Отсюда следует существование шара $\|x\| < \dfrac{|\beta|m}{1-q}$, вне точек которого образ имеет меньшую норму, чем прообраз.

В дальнейшем будем рассматривать случай $\Phi(\varphi) = 1 - \dfrac{\varphi}{\pi} - \gamma$ $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$, для которого отображение принимает вид

$$\overline{\varphi} = \alpha\varphi + l^T x, \quad \overline{x} = Bx - \beta\varphi, \tag{5}$$

или

$$\begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \varphi \\ x \end{pmatrix},$$

где D – матрица $n \times n$.

Отображение (5) является конкретизацией отображения, рассмотренного в [6].

Для такого отображения будем считать, что

$$\det D = \det \begin{pmatrix} \alpha & l^T \\ -\beta & B \end{pmatrix} > 0.$$

Обозначим $\mu_i, i = 1,\ldots,k$ собственные значения матрицы D, удовлетворяющие условию $0 < |\mu_i| < 1$ и $\lambda_i, i = 1,\ldots,m$, если собственное значение > 1. Предположим, что $m = 1$, $\lambda = \lambda_1$, $\operatorname{Im}\lambda = 0$. Собственный вектор, соответствующий собственному значению λ, обозначим V^U. В этом случае $k = n - 1$. Собственные вектора, соответствующие собственным значениям μ_i, обозначим $V_i^S, i = 1,\ldots,n-1$.

При сделанных предположениях отображение (5) имеет в нуле $\varphi = 0$, $x = 0$ седловую неподвижную точку, через которую проходят два инвариантных многообразия: одномерное неустойчивое – прямая, параллельная вектору V^U, и $(n-1)$-мерное устойчивое – гиперплоскость, параллельная векторам $V_j^S, i = 1,\ldots,n-1$ (или их действительной и мнимой составляющим, если μ_i — комплексное число). Пусть собственные вектора имеют координаты $V = (1, V_2, \ldots, V_n)$. Параметрическое ($t$ – параметр) уравнение одномерного многообразия запишем в виде

$$\varphi = t, \ x_i = V_{i+1}^U t, \ i = 1, \ldots, n-1. \tag{6}$$

Рассмотрим какую-либо прямую, параллельную этому многообразию:

$$\varphi = \varphi^0 + t, \ x_i = V_{i+1}^U t, \ i = 1, \ldots, n-1.$$

Образ этой прямой будет

$$\begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_{n-1} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \varphi \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ x_1^0 \\ \vdots \\ x_{n-1}^0 \end{pmatrix} + tD \begin{pmatrix} 1 \\ V_2^U \\ \vdots \\ V_n^U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}^0 \\ \bar{x}^0 \end{pmatrix} + \lambda t V^U,$$

т. е. образ прямой параллелен прообразу.

Рассмотрим теперь плоскость, параллельную устойчивому линейному многообразию. Уравнение такой плоскости можно записать в виде

$$\overrightarrow{AM} = t_1 V_1^S + t_2 V_2^S + \ldots + t_{n-1} V_{n-1}^S,$$

где $A(\varphi^0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)$ – некоторая точка, принадлежащая плоскости, $M(\varphi, x_1, \ldots, x_{n-1})$ – произвольная точка плоскости. Тогда

$$\begin{pmatrix} \overline{\varphi} \\ \overline{x} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ x^0 \end{pmatrix} + D(t_1 V_1^S + t_2 V_2^S + \ldots + t_{n-1} V_{n-1}^S) = D \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ x^0 \end{pmatrix} + t_1 D V_1^S +$$

$$+ t_2 V_2^S + \ldots + t_{n-1} V_{n-1}^S = \begin{pmatrix} \overline{\varphi}^0 \\ \overline{x}^0 \end{pmatrix} + t_1 \mu_1 V_1^S + t_2 \mu_2 V_2^S + \ldots + t_{n-1} \mu_{n-1} V_{n-1}^S,$$

т. е. образ плоскости также параллелен устойчивому многообразию. Следовательно, отображение (5) имеет инвариантные слоения: неустойчивое F^U – прямые, параллельные одномерному неустойчивому многообразию, и устойчивое F^S – плоскости, параллельные устойчивому линейному многообразию.

Покажем, что отображение (5) гиперболично. Рассмотрим вектор a, принадлежащий неустойчивому слоению F^U: $a = kV^U$. Для образа этого вектора

$$|\overline{a}| = |Da| = \left|DkV^U\right| = |k|\left|DV^U\right| = |k\lambda|\left|V^U\right| = |\lambda||a|,$$

т. е. под действием отображения этот вектор растягивается в λ раз. Если вектор принадлежит устойчивому слоению F^S, то его можно записать в виде

$a = k_1 V_1^S + k_2 V_2^S + \ldots + k_{n-1} V_{n-1}^S$. Тогда $Da = k_1 \mu_1 V_1^S + k_2 \mu_2 V_2^S + \ldots + k_{n-1} \mu_{n-1} V_{n-1}^S$. Так как $|\overline{a}| = |Da| \le \mu |a|$, где $\mu = \max\limits_i \{\mu_i\}$, то справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Отображение (5) гиперболично.*

Аналогично [7], обозначим $W(V^U, V_1^S, V_2^S, \ldots, V_{n-1}^S)$ матрицу, столбцами которой являются собственные векторы матрицы отображения, $w = \det W(V^U, V_1^S, V_2^S, \ldots, V_{n-1}^S)$, $w_i = w(V^U, V_1^S, V_2^S, \ldots, V_{n-1}^S \mid a)$ – определитель, получающийся из w заменой i-го столбца на столбец

a, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$, M_1 – точка пересечения неустойчивого многообразия с плоскостью $\varphi = 1 - c$.

Найдем условия, при которых точка M_1 принадлежит следу L на плоскости $\varphi = 1 - c$ $(n-1)$-мерного линейного многообразия – плоскости w, которая проходит через точку $O_1(\varphi = 1,\ x = 0)$ и параллельна векторам $V_1^S, V_2^S, \ldots, V_{n-1}^S$. Если $(\varphi^1,\ x_1^1,\ x_2^1,\ \ldots,\ x_{n-1}^1)$ – координаты точки M_1, то $\varphi^1 = 1 - c$. Поэтому для точки M_1 из (6) следует, что $t = 1 - c$ и координаты точки M_1 будут

$$\varphi^1 = 1 - c, \quad x_{1i} = V_{i+1}^U (1 - c),\ i = 1,\ 2, \ldots, n - 1. \tag{7}$$

Точка $M \in R^n$ тогда и только тогда принадлежит плоскости w, когда векторы $\overrightarrow{O_1M}$, V_1^S, $V_2^S, \ldots,$ V_{n-1}^S линейно зависимы, т. е. когда $w_1(V^U, V_1^S, V_2^S, \ldots,\ V_{n-1}^S \mid \overrightarrow{O_1M}) = 0.$ Учитывая (7), получим, что

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O_1M_1} &= (-c, V_2^U (1-c), V_3^U (1-c), \ldots, V_n^U (1-c)) = \\
&= ((1-c) - 1, V_2^U (1-c), V_3^U (1-c), \ldots, V_n^U (1-c)) = \\
&= ((1-c), V_2^U (1-c), V_3^U (1-c), \ldots, V_n^U (1-c)) - (1, 0, \ldots, 0) = \\
&= (1-c)(1, V_2^U, V_3^U, \ldots, V_n^U) - e_1 = (1-c)V^U - e_1
\end{aligned}$$

и, следовательно

$$\begin{aligned}
&w_1(V^U, V_1^S, V_2^S, \ldots, V_{n-1}^S \mid \overrightarrow{O_1M}) = (1-c) w_1(V^U, V_1^S, V_2^S, \ldots, V_{n-1}^S \mid V^U) - \\
&- w_1(V^U, V_1^S, V_2^S, \ldots, V_{n-1}^S \mid e_1) = (1-c) w - w_1(V^U, V_1^S, V_2^S, \ldots, V_{n-1}^S \mid e_1).
\end{aligned}$$

Приравнивая последнее равенство к нулю, получим условие попадания точки M_1 на L:

$$(1-c) w = w_1(V^U,\ V_1^S,\ V_2^S, \ldots, V_{n-1}^S \mid e_1).$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *При условии*

$$c = c_k = 1 - w_1(V^U,\ V_1^S,\ V_2^S,\ \ldots,\ V_{n-1}^S \mid e_1) / w \tag{8}$$

образ точки M_1, лежащий на неустойчивом многообразии, попадает на след устойчивого многообразия, т. е. точка M_1 является точкой гомоклинической траектории к седловой неподвижной точке.

Обозначим M_2 – точку пересечения прямой (6) с плоскостью w — и найдем ее координаты. Для этого подставим φ, x_i из (6) в уравнение плоскости w

$$\begin{vmatrix} t-1 & 1 & \dots & 1 \\ V_2^U t & V_{1\ 2}^S & \dots & V_{n-12}^S \\ V_3^U t & V_{1\ 3}^S & \dots & V_{n-13}^S \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n^U t & V_{1\ n}^S & \dots & V_{n-1n}^S \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда

$$tw_1(V^U, V_1^S, V_2^S, \dots, V_{n-1}^S \mid V^U) - w_1(V^U, V_1^S, V_2^S, \dots, V_{n-1}^S \mid e_1) = 0.$$

Отсюда

$$t = w_1(V^U, V_1^S, V_2^S, \dots, V_{n-1}^S \mid e_1) / w, \tag{9}$$

поэтому первая координата точки M_2:

$$\varphi = \omega_1\left(V^U, V^S, V_2^S, \dots, V_{n-1}^S \middle| e_1\right) / \omega$$

и при

$$\omega_1\left(V^U, V_1^S, V_2^S, \dots, V_{n-1}^S \mid e_1\right) / \omega > 1 - c. \tag{10}$$

Одномерное многообразие оказывается «ниже» устойчивой гиперплоскости. В результате получена следующая лемма.

Лемма 2. *При $c < 1 - \omega_1 / \omega$ седловая неподвижная точка не имеет гомоклинических траекторий.*

Получим условия, при которых образ точки M_1 – точки пересечения прямой (6) с плоскостью $\varphi = 1 - c$ – остается «ниже» плоскости ω.

Обозначим d_1 первую строку матрицы D: $d_1 = \left(\alpha, l^T\right)$. Так как координаты точки M_1 есть $\varphi = 1 - c$, $x_1 = V_2^U\left(1 - c\right), \dots, x_{n-1} = = V_n^U\left(1 - c\right)$, то образ первой координаты будет

$$\overline{\varphi} = \alpha\left(1 - c\right) + l^T x = \alpha\left(1 - c\right) + l_1 V_2^U\left(1 - c\right) + \dots + l_{n-1} V_n^U\left(1 - c\right) =$$

$$= \left(1 - c\right)\left(\alpha, l_1, \dots, l_{n-1}\right)\left(1, V_2^U, \dots, V_n^U\right)^T = \left(1 - c\right) d_1 V^U = t.$$

Учитывая (8), (9), это условие можно записать в виде

$$(1-c)\,d_1V^U < \omega_1\left(V^U, V_1^S, V_2^S, \ldots, V_{n-1}^S \mid e_1\right)/\,\omega. \qquad (11)$$

При обратном условии образ точки M_1 оказывается «выше» плоскости ω. Таким образом доказана нижеследующая лемма.

Лемма 3. *При условии* (11) *седловая неподвижная точка не имеет гомоклинических траекторий. Когда*

$$c = 1 - \frac{\omega_1\left(V^U, V_1^S, V_2^S, \ldots, V_{n-1}^s \mid e_1\right)}{\omega d_1 V^U},$$

образ точки M_1 *попадает на устойчивое многообразие, т. е. происходит рождение гомоклинической траектории седловой неподвижной точки.*

Из лемм 1–3 вытекает следующая теорема.

Теорема. *В области параметров*

$$\begin{cases} c > 1 - \omega_1\left(V^U, V_1^S, V_2^S, \ldots, V_{n-1}^S \mid e_1\right)/\,\omega \\ c < 1 - \dfrac{\omega_1\left(V^U, V_1^S, V_2^S, \ldots, V_{n-1}^S \mid e_1\right)}{\omega d_1 V^U} \end{cases}$$

седловая неподвижная точка отображения (5) имеет грубую гомоклиническую траекторию, лежащую в трансверсальном пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий.

Важность этих утверждений определяется тем, что существование гомоклинической траектории служит одним из критериев захвата в дискретной системе фазовой синхронизации, а бифуркация ее исчезновения является одним из условий для определения полосы захвата.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний*. 2-е изд. Москва, Физматгиз, 1959, 916 с.

[2] Попов Е.П., Пальтов И.П. *Приближенные методы исследования нелинейных автономных систем*. Москва, Физматгиз, 1960, 792 с.

[3] *Методы исследования нелинейных систем автоматического управления*. Нелепина Р.А., ред. Москва, Наука, 1975, 448 с.

[4] Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. *Системы фазовой автоподстройки частоты с элементами дискретизации*. Москва, Связь, 1979, 224 с.

[5] Бунимович Л.А. Системы гиперболического типа с особенностями. *Современные проблемы математики. Динамические системы*. Москва, ВИНИТИ, 1985, т. 2, с. 154–171.

[6] Белых В.Н., Грибов А.Ф., Украинский Б.С. Условия гиперболичности аттракторов некоторых кусочно-линейных многомерных отображений. *Моделирование и оптимизация сложных систем. Межвузовский сб. науч. тр.* Нижний Новгород, 1998, № 275, с. 3–6.

[7] Грибов А.Ф., Крищенко А.П. Аналитические условия существования гомоклинической петли в системе Чуа. *Нелинейная динамика и управление. Сб. статей*. Москва, Физматлит, 2001, вып. 1, с. 263–268.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Грибов А.Ф. Многомерная дискретная фазовая система с кусочно-линейной характеристикой. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/970.html

Грибов Александр Федорович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: alexandr-gribov@list.ru