

## Применение правила местных сфер для расчета давления на затупленных телах

© В.П. Котенев<sup>1,2</sup>, А.Ю. Дубровина<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ОАО «ВПК «НПО машиностроения», Московская область,  
г. Реутов, 143966, Россия

<sup>2</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*При проведении практических расчетов методом установления требуется задавать начальное решение, которое для уменьшения времени счета и получения достоверных результатов должно быть как можно ближе к точному решению. В данной работе предлагается применять правило местных сфер для оценки давления на поверхности тел. Полученные результаты показали, что в ряде случаев этот метод дает более точные результаты, чем формула Ньютона.*

**Ключевые слова:** *сверхзвуковой поток, пространственные течения газа, звуковая точка.*

**Введение.** Правило местных сфер для начального распределения давления на поверхности тел заключается в том, что на любом выпуклом теле давление берется таким же, как и на сфере, с тем же углом наклона элемента поверхности по отношению к набегающему потоку.

Этот подход эффективен при наличии простых зависимостей для определения давления на сфере. Существующие зависимости не всегда можно использовать, так как они получены на основе аппроксимации численных результатов для конкретных режимов обтекания, т. е. не являются универсальными, а также не дают возможности получить результат в теневой области.

В данной работе предлагается простой подход к определению начального распределения давления при сверхзвуковом пространственном обтекании затупленных тел, включая теневую область.

**Определение безразмерных параметров.** Давление  $P$  отнесем к давлению в точке торможения  $P'_0$ , которое определяется по формуле Рэлея:

$$P'_0 = \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} M_\infty^2 \left[ \gamma - \frac{\gamma - 1}{2M_\infty^2} \right]^{-\frac{1}{\gamma - 1}} P_\infty,$$

где  $M_\infty$  – число Маха набегающего потока;  $P_\infty$  – давление газа в набегающем потоке;  $\gamma$  – показатель адиабаты, для совершенного газа  $\gamma = 1,4$ .

Плотность

$$\rho = P^{\frac{1}{\gamma}} \frac{2\gamma}{\gamma - 1}.$$

Скорость

$$V = \sqrt{1 - P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}.$$

Давление на поверхности тела будем искать для трех областей  $\sigma \in \left[-\frac{5\pi}{18}, \sigma_0\right]$ ,  $\sigma \in [\sigma_0, \sigma_*]$  и  $\sigma \in \left[\sigma_*, \frac{\pi}{2}\right]$ , где  $\sigma$  – угол между осью тела и вектором скорости в произвольной точке на его поверхности;  $\sigma_*$  определяет положение звуковой точки на поверхности тела и вычисляется по формуле, представленной в [1]:

$$\sigma_* = 90^\circ - \left( 34^\circ + 40^\circ \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M^2} \right) \right).$$

Плотность и скорость по известному давлению можно найти, используя изэнтропичность потока на теле и интеграл Бернулли в стационарном потоке.

**Определение давления для каждой области.** Для  $\sigma \in \left[\sigma_*, \frac{\pi}{2}\right]$

давление будем искать по формуле  $P = \sin^2 \sigma + \frac{P_* - \sin^2 \sigma_*}{\cos^2 \sigma_*} \cos^2 \sigma$  [2],

где  $\sigma_*$  – звуковая точка;  $P_* = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$  – давление в звуковой точке.

Эта зависимость хорошо описывает поведение давления в дозвуковой области.

Для определения давления на оставшихся двух отрезках необходимо знать положение точки  $\sigma_0$ , для чего введем понятие контурной функции  $f$  [3, 4]:

$$f = \frac{1}{r(\sigma)\rho(\sigma)V(\sigma)},$$

где  $r(\sigma)$  – цилиндрический радиус, описывающий геометрию тела;  $\rho(\sigma)$  – плотность частиц газа;  $V(\sigma)$  – модуль скорости.

Точка  $\sigma_0$  характеризуется тем, что в ней  $\frac{df}{d\sigma} = 0$  [2]. Учитывая, что

$$\frac{d^2V}{d^2P} = \frac{M^2 - 1}{\rho^2 V^3} \text{ и } \frac{dV}{dP} = -\frac{1}{\rho V}, \text{ получим согласно [2]:}$$

$$-f \left( \frac{dr/d\sigma}{r} + \frac{M^2 - 1}{\rho V^2} \frac{dP}{d\sigma} \right) = 0.$$

Решая это нелинейное уравнение относительно  $\sigma$ , найдем  $\sigma_0$ . При этом давление для  $\sigma \in [\sigma_0, \sigma_*]$  рассчитываем по формуле Ньютона:

$$P = (P_* - P_\infty) \frac{\sin^2 \sigma}{\sin^2 \sigma_*} + P_\infty,$$

откуда  $\frac{dP}{d\sigma} = (P_* - P_\infty) \frac{\sin 2\sigma}{\sin^2 \sigma_*}$ . При решении нелинейного уравнения

учитываем, что  $\frac{M^2 - 1}{\rho V^2} = \frac{\rho V^2}{\gamma P} - 1 = \frac{1}{\gamma P} - \frac{\gamma P}{\gamma P \rho V^2} = \frac{1}{\gamma P} - \frac{1}{\gamma P M^2}$ , где

$$M^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1 - P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} - \text{местное число Маха.}$$

Зная положение точки  $\sigma_0$ , найдем давление на участке  $\sigma \in \left[ -\frac{5}{18} \pi, \sigma_0 \right]$ . Так как  $\left. \frac{df}{d\sigma} \right|_{\sigma_0} = 0$ , положим, что контурная функция

$f(\sigma)$  изменяется по параболическому закону на интервале  $\left[ -\frac{5}{18} \pi, \sigma_0 \right]$ :

$$f = a(\sigma - \sigma_0)^2 + b.$$

Тогда, определяя значения контурной функции в точках  $\sigma_0, \sigma_*$  и параметры  $a, b$ , получим следующее выражение:

$$f = \frac{f_* - f_0}{(\sigma_* - \sigma_0)^2} (\sigma - \sigma_0)^2 + f_0,$$

где  $f_* = \frac{1}{r(\sigma_*)\rho(P(\sigma_*))V(P(\sigma_*))}$ ;  $f_0 = \frac{1}{r(\sigma_0)\rho(P(\sigma_0))V(P(\sigma_0))}$ , здесь  $P(\sigma_0)$  вычисляем по формуле

$$P(\sigma_0) = (P_* - P_\infty) \frac{\sin^2 \sigma_0}{\sin^2 \sigma_*} + P_\infty.$$

Основываясь на [2], получим уравнение зависимости  $P(\sigma)$  на отрезке  $\sigma \in \left[-\frac{5\pi}{18}, \sigma_0\right]$ :

$$\frac{1}{P^\gamma} \sqrt{1 - P^\gamma} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma r(\sigma) \left( \frac{f_* - f_0}{(\sigma_* - \sigma_0)^2} (\sigma - \sigma_0)^2 + f_0 \right)}.$$

**Анализ результатов.** Для начала сравним табличные данные распределения давления на поверхности сферы, приведенные в [5], с результатами расчета. Из рис. 1 и 2 видно, что расчетные данные хорошо согласуются с табличными, что позволяет сделать предположение о возможности использования полученных ранее формул для нахождения распределения давления на поверхности затупленных тел.

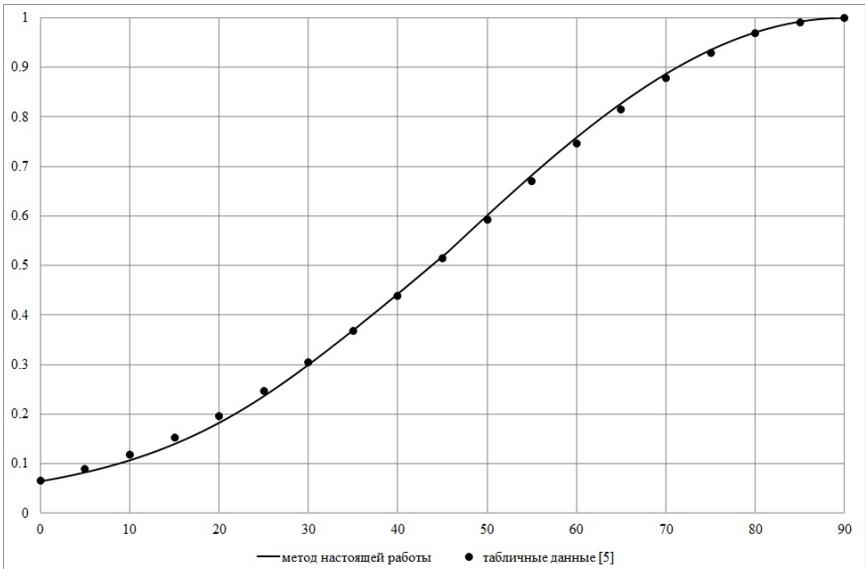


Рис. 1. Сфера,  $M = 3$

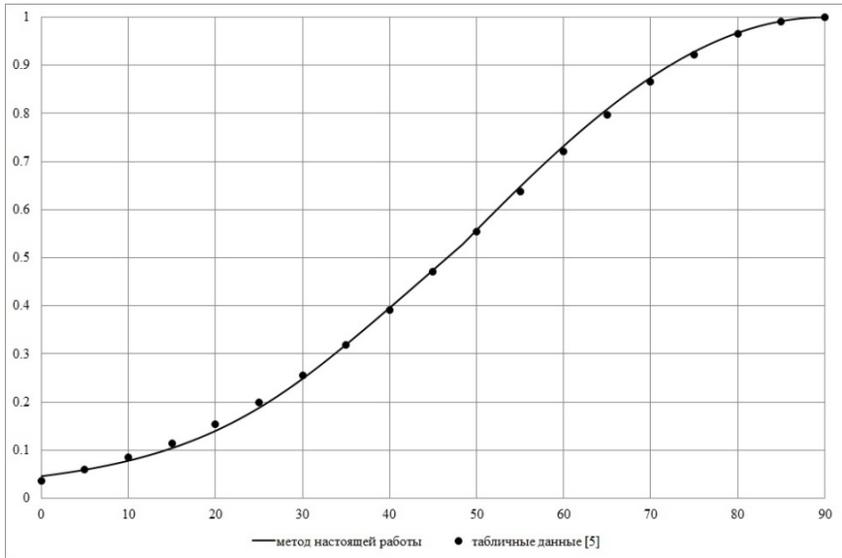


Рис. 2. Сфера,  $M = 6$

Далее вычислим распределение давления на поверхности эллипсоида. Такой выбор обусловлен наличием данных для задачи о стационарном пространственном обтекании сверхзвуковым потоком идеального газа головной части затупленного тела, полученных методом установления в работе [6]. В соответствии с правилом местных сфер давление на эллипсоиде в точке, где угол  $\arccos\left(-\frac{\vec{V}_\infty}{|\vec{V}_\infty|}, \vec{n}\right)$  совпадает

с углом  $\frac{\pi}{2} - \sigma$  на сфере, полагалось равным давлению на сфере с данным углом встречи потока с поверхностью. Здесь  $\vec{n}$  – единичная нормаль на эллипсоиде в текущей расчетной точке. Рассматривались случаи, когда вектор набегающего потока образует с осью эллипсоида  $a$  угол  $\alpha = 10^\circ$  и параллелен плоскости, которая проходит через ось  $a$  и составляет с осью  $b$  угол  $\varphi = 0, 30, 60, 90^\circ$ . Угол сферической системы координат  $\theta$  изменялся от  $0$  до  $90^\circ$  (рис. 3).

Влияние угла  $\varphi$  на распределение безразмерного давления (давление отнесено к удвоенному скоростному напору) по поверхности эллипсоида с отношением полуосей  $1 : 1 : \frac{2}{3}$  в различных плоскостях  $\psi = \text{const}$  при  $M_\infty = 3$ , приведено на рис. 4–7. Полюс системы координат при этом располагается в центре эллипсоида. Цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 обозначены меридиональные плоскости  $\psi = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$ . Сплошной линией на рисунках обозначены результаты

расчетов, проведенных по теории, изложенной в данной работе. Штриховой линией – давление, посчитанное по формуле Ньютона, а точками – данные, представленные в работе [6]. Видно, что формула Ньютона не дает возможности правильно найти решение в теневой области (рис. 4, 5, 6, 7 при  $\theta > 50^\circ$ ).

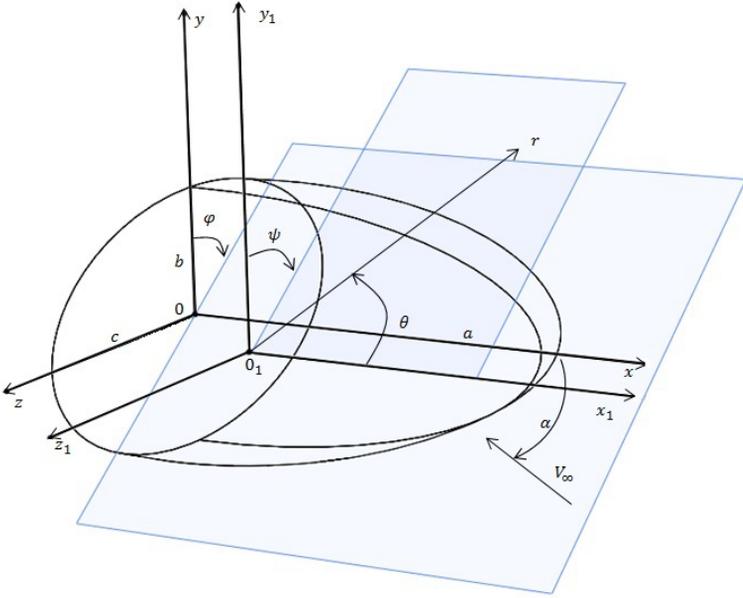


Рис. 3. Расчетная область

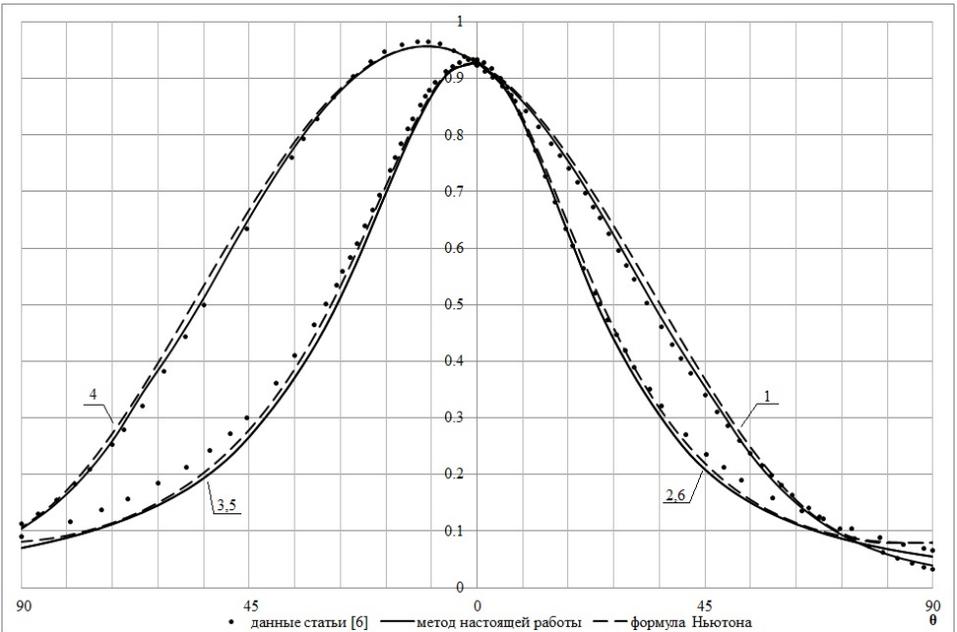


Рис. 4. Эллипсоид с полуосями  $a:b:c = 1:1:2/3$ ,  $M = 3$ ,  $\varphi = 0^\circ$

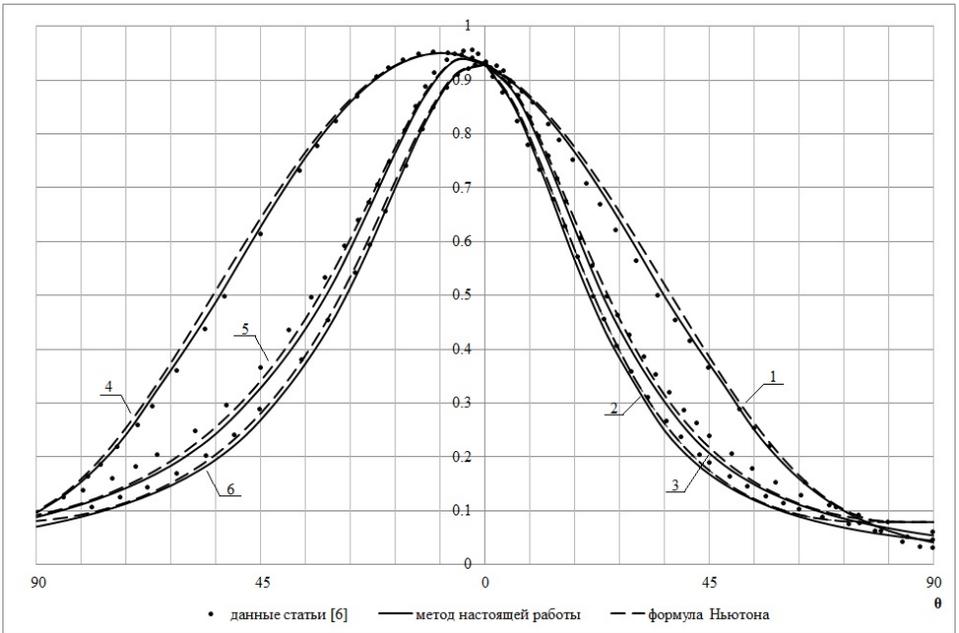


Рис. 5. Эллипсоид с полуосями  $a:b:c = 1:1:2/3$ ,  $M = 3$ ,  $\varphi = 30^\circ$

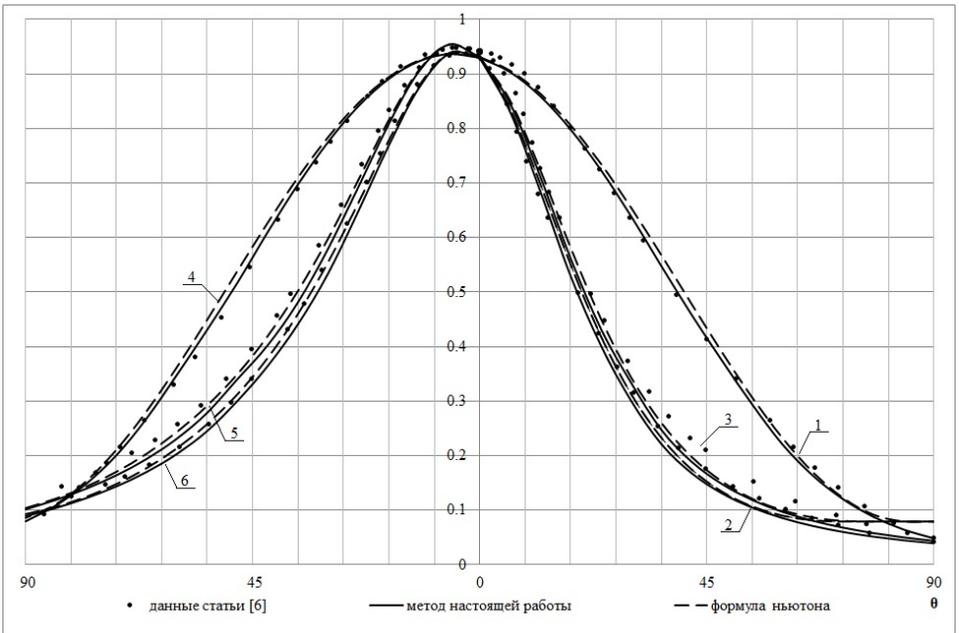


Рис. 6. Эллипсоид с полуосями  $a:b:c = 1:1:2/3$ ,  $M = 3$ ,  $\varphi = 60^\circ$

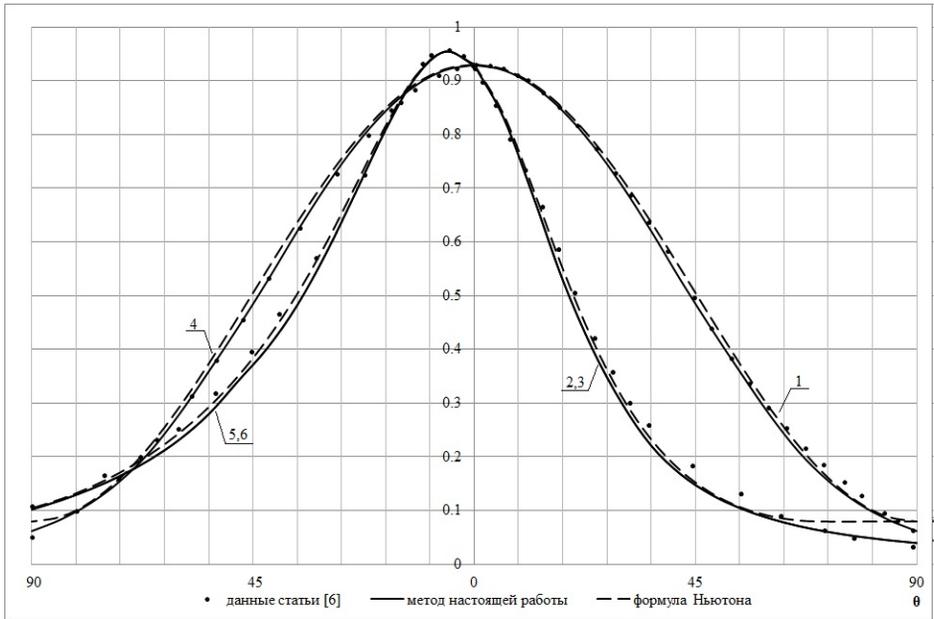


Рис. 7. Эллипсоид с полуосями  $a:b:c = 1:1:2/3$ ,  $M = 3$ ,  $\varphi = 90^\circ$

Следующий расчет проведен для эллипсоида с отношением полуосей  $1:1:1,5$  при  $M_\infty = 6$ , в этом случае полюс сферической системы координат был смещен ( $x_0 = 0,4$ ,  $y_0 = z_0 = 0$ ). Сравнительные графики приведены на рис. 8–11, цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 обозначены плоскости  $\psi = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$ .

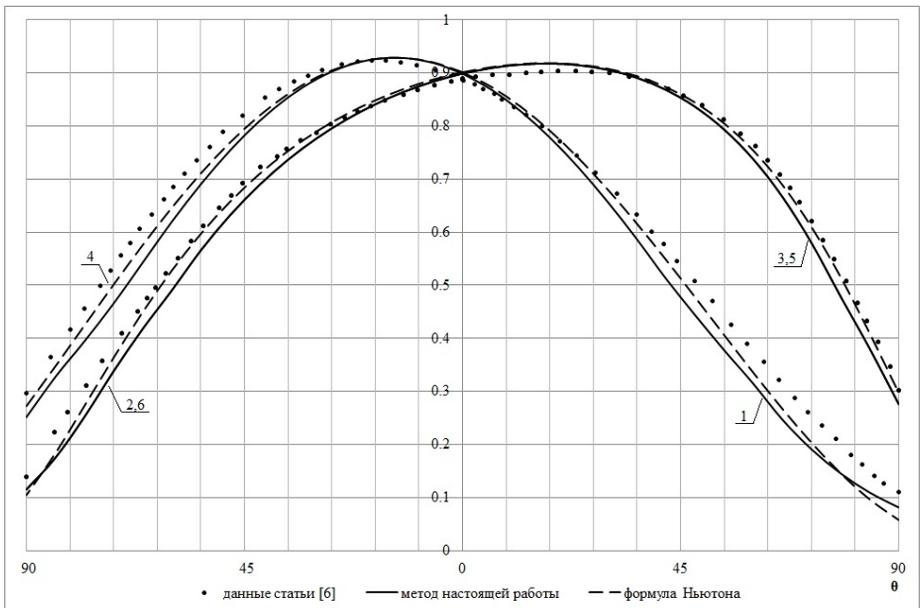


Рис. 8. Эллипсоид с полуосями  $a:b:c = 1:1:1,5$ ,  $M = 6$ ,  $\varphi = 0^\circ$

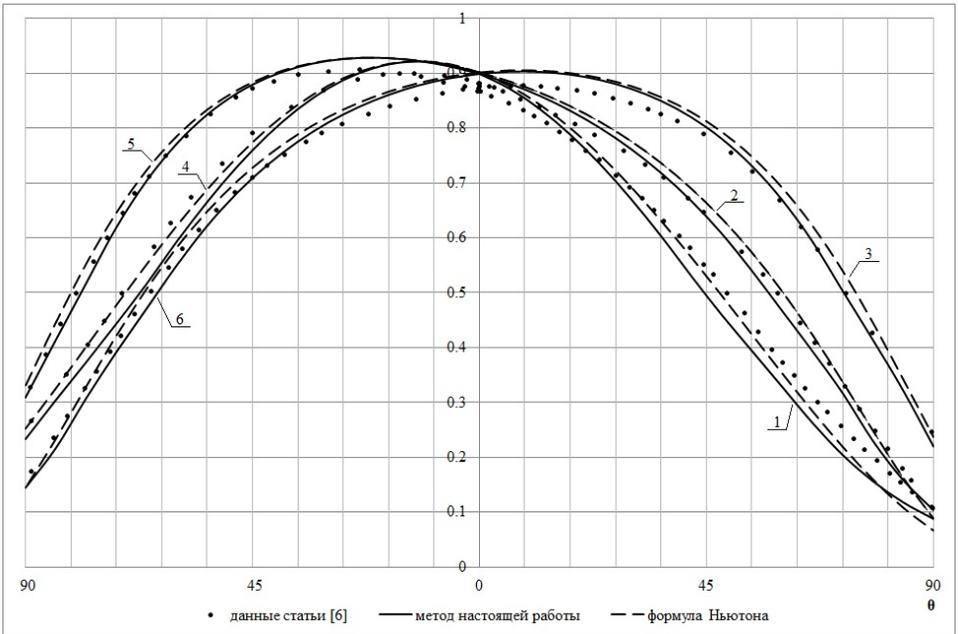


Рис. 9. Эллипсоид с полуосями  $a:b:c = 1:1:1.5$ ,  $M = 6$ ,  $\varphi = 30^\circ$

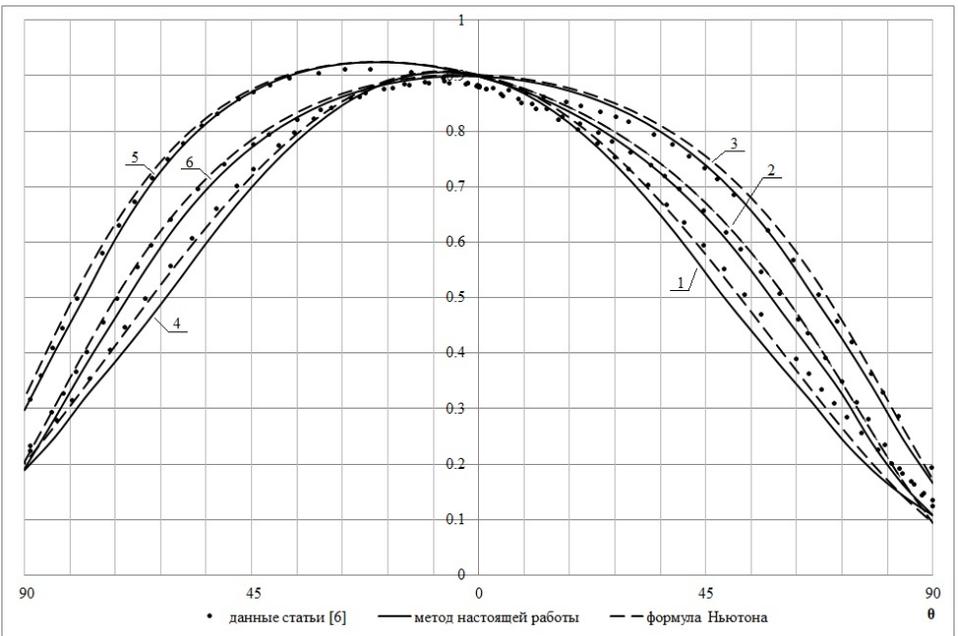


Рис. 10. Эллипсоид с полуосями  $a:b:c = 1:1:1.5$ ,  $M = 6$ ,  $\varphi = 60^\circ$

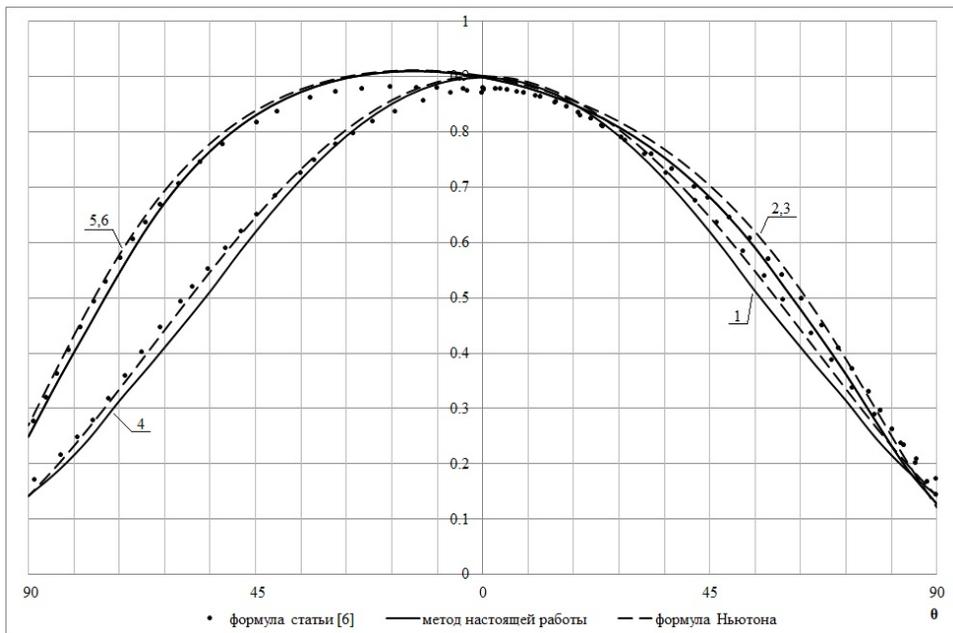


Рис. 11. Эллипсоид с полуосями  $a:b:c = 1:1:1.5$ ,  $M = 6$ ,  $\varphi = 90^\circ$

Можно сделать вывод о том, что предложенный в данной работе метод дает результаты, близкие к значениям, полученным методом установления, в том числе в тех зонах на поверхности тела, где формула Ньютона не применима. Таким образом, данный метод может быть использован для начального распределения, а также быстрой оценки давления на поверхности тела.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лунев В.В. *Гиперзвуковая аэродинамика*. Москва, Машиностроение, 1975, 367 с.
- [2] Котенев В.П., Сысенко В.А. Уточненный метод быстрой оценки давления на поверхности гладких затупленных тел. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. Специальный выпуск «Математическое моделирование»* № 3, 2012, с. 64–74.
- [3] Котенев В.П. Уравнения двумерных течений газа с динамических переменных. *Информационные технологии*, 2007, № 1, с. 37–41.
- [4] Котенев В.П. Приближенный метод расчета давления на поверхности затупленных тел. *Информационные технологии*, 2007, № 2, с. 76–80.
- [5] Любимов А.Н., Русанов В.В. *Течения газа около тупых тел*. Москва, Наука, 1970, т. 1, 287 с., т. 2, 380 с.
- [6] Липницкий Ю.М., Михайлов Ю.Я., Савинов К.Г. Расчет пространственных течений идеального газа без плоскости симметрии. *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*, 1972, № 3, с. 182–186.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Котенев В.П., Дубровина А.Ю. Применение правила местных сфер для расчета давления на затупленных телах. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/968.html>

**Котенев Владимир Пантелеевич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика», начальник отдела аэродинамики в ОАО «ВПК «НПО машиностроения». Автор более 40 научных работ в области прикладной математики, численных и аналитических методов исследования течения газа при обтекании поверхности летательных аппаратов. e-mail: [kotvp@mail.ru](mailto:kotvp@mail.ru).

**Дубровина Анастасия Юрьевна** — инженер 3 категории в отделе аэродинамики в ОАО «ВПК «НПО машиностроения», аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: [a.u.dubrovina@gmail.com](mailto:a.u.dubrovina@gmail.com).