

Одномерный фотонный кристалл как отражающая или волноведущая диэлектрическая структура

© В.Ф. Апельцин, Т.Ю. Мозжорина
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена двумерная краевая задача о прохождении плоской электромагнитной волны через периодическую слоистую среду, имеющую структуру одномерного фотонного кристалла. Структура содержит конечное число плоскопараллельных слоев, каждая ее ячейка периодичности состоит из двух слоев с разными действительными значениями постоянной диэлектрической проницаемости и разными толщинами. Показано, что при некотором дополнительном условии, связывающем угол падения плоской волны и диэлектрические проницаемости слоев, задача решается до конца в явном виде и приводит к простым выражениям для отраженного от структуры и прошедшего сквозь нее полей. При этом, если отношение толщин слоев меньше единицы, структура ведет себя практически как идеальное зеркало, а если больше единицы, то – как волноведущая структура без потерь, втягивающая в себя падающее поле, т. е., подавляющая как отраженное, так и прошедшее сквозь нее поля.

Ключевые слова: фотонный кристалл, плоскопараллельный слой, однородный диэлектрик, плоская волна, идеальный отражатель, волновод без потерь.

Введение. Под фотонным кристаллом подразумевается среда с периодической структурой, состоящей из ячеек постоянных значений диэлектрической проницаемости. Такая среда может быть трехмерной, двумерной или одномерной. В случае одномерной среды это бесконечная последовательность плоскопараллельных слоев из однородного диэлектрика, причем каждая ячейка периодичности состоит из двух слоев разной толщины и разных значений постоянной диэлектрической проницаемости.

В последние годы исследованию электродинамических и оптических свойств таких структур посвящено значительное количество публикаций [1–3]. Если такая среда бесконечна, то она обладает строго фиксированными частотными полосами пропускания электромагнитной волны, или, наоборот, полосами запираания энергии поля внутри структуры. Эти свойства, как следует из ряда работ, являются следствием теоремы Блоха и того, что волновое поле удовлетворяет в такой структуре условиям Флоке.

В случае практического применения этих свойств необходимо, разумеется, создавать такие структуры с большим, но конечным числом ячеек периодичности, для которых эта теория уже не справедлива. Однако такие структуры должны обладать свойствами близкими к бесконечным, если число ячеек достаточно велико. Наиболее есте-

ственный метод теоретического исследования этих свойств подразумевает численные методы математического моделирования, что и делается в большинстве работ этого направления [4–5].

В данной работе приводится аналитический подход к решению подобной задачи в случае одномерного фотонного кристалла с конечным числом слоев N . В рамках этого подхода удастся выписать явное решение для прошедшего через структуру и отраженного от нее волновых полей, если потребовать выполнения некоторого необременительного дополнительного условия, связывающего диэлектрические проницаемости слоев ячейки периодичности и их толщины. В результате, все практически важные физические свойства структуры становятся наглядными и обозримыми.

Постановка задачи и система уравнений для фурье-образов решения. Пусть в области декартовых координат (y, z) при $z \leq 0$ расположена многослойная среда с плоскими параллельными границами раздела, причем слои имеют периодичность по толщине и значению диэлектрической проницаемости ε . Элемент периодичности является двухслойной плоской полосой с толщинами слоев d_1 и d_2 , общей толщины $D = d_1 + d_2$, и с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 . Среда содержит N элементов периодичности. Общее количество слоев $2N$ (рис. 1).

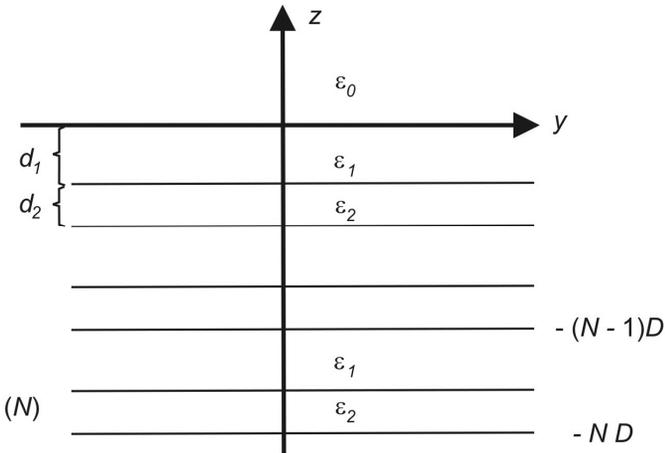


Рис. 1. Геометрия одномерного фотонного кристалла

Структура возбуждается плоской волной $u^{(0)}(y, z) = e^{-ik_0(y \cos \alpha + z \sin \alpha)}$, присутствующей в области $z > 0$ выше структуры. Здесь же присутствует поле $u_0(y, z)$, отраженное от структуры и подлежащее нахождению. В области $z < -ND$ присутствует прошедшее поле $u_{2N+1}(y, z)$, также подлежащее определению. Рассматривается случай E – поляризации (единственная компонента элект-

трического поля, отличная от нуля, $E_x = u(y, z)$. В каждой области постоянства ε возбуждаемое поле $u_j(y, z)$; $j = 0, \dots, 2N + 1$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \Delta u^{(0)}(y, z) + k_0^2 u^{(0)} &= 0; \\ \Delta u_0(y, z) + k_0^2 u_0 &= 0; \\ \Delta u_1(y, z) + k_1^2 u_1 &= 0; \\ \Delta u_2(y, z) + k_2^2 u_2 &= 0 \tag{1} \\ \Delta u_3(y, z) + k_1^2 u_3 &= 0; \\ \Delta u_4(y, z) + k_2^2 u_4 &= 0; \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta u_{2N-1}(y, z) + k_1^2 u_{2N-1} &= 0; \\ \Delta u_{2N}(y, z) + k_2^2 u_{2N} &= 0; \\ \Delta u_{2N+1}(y, z) + k_0^2 u_{2N+1} &= 0. \end{aligned}$$

На границах раздела свойств однородных сред ставятся условия сшивания значений полей и их производных по z : $u_j = u_{j+1}$, $\frac{\partial u_j}{\partial z} = \frac{\partial u_{j+1}}{\partial z}$. Первая группа условий удовлетворяется введением $2N + 1$ произвольных неизвестных функций $f_j(y)$, подчиненных следующим условиям:

$$\begin{aligned} u^{(0)}(y, 0) + u_0(y, 0) &= f_0(y); \\ u_1(y, 0) &= f_0(y); \\ u_1(y, -d_1) &= f_1(y); \\ u_2(y, -d_1) &= f_1(y); \\ u_2(y, -D) &= f_2(y); \tag{2} \\ u_3(y, -D) &= f_2(y); \\ u_3(y, -D - d_1) &= f_3(y); \\ u_4(y, -D - d_1) &= f_3(y); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_4(y, -2D) &= f_4(y); \\
 &\dots\dots\dots \\
 u_{2N}(y, -(N-1)D - d_1) &= f_{2N-1}(y); \\
 u_{2N}(y, -ND) &= f_{2N}(y); \\
 u_{2N+1}(y, -ND) &= f_{2N}(y);
 \end{aligned}$$

Дальнейшее рассмотрение удобно проводить для Фурье-образов решений в каждом слое.

Если ν – спектральный параметр преобразования Фурье по y , то решения уравнений (1) для образов $U_j(\nu, z)$, в каждом слое можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 U_0(\nu, z) &= A_0(\nu) e^{i\sigma_0(\nu)z}; \\
 U_1(\nu, z) &= A_1(\nu) e^{i\sigma_1(\nu)z} + B_1(\nu) e^{-i\sigma_1(\nu)z}; \\
 U_2(\nu, z) &= A_2(\nu) e^{i\sigma_2(\nu)z} + B_2(\nu) e^{-i\sigma_2(\nu)z}; \\
 U_3(\nu, z) &= A_3(\nu) e^{i\sigma_1(\nu)z} + B_3(\nu) e^{-i\sigma_1(\nu)z}; \\
 U_4(\nu, z) &= A_4(\nu) e^{i\sigma_2(\nu)z} + B_4(\nu) e^{-i\sigma_2(\nu)z}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 U_{2N-1}(\nu, z) &= A_{2N-1}(\nu) e^{i\sigma_1(\nu)z} + B_{2N-1}(\nu) e^{-i\sigma_1(\nu)z}; \\
 U_{2N}(\nu, z) &= A_{2N}(\nu) e^{i\sigma_2(\nu)z} + B_{2N}(\nu) e^{-i\sigma_2(\nu)z}; \\
 U_{2N+1}(\nu, z) &= B_{2N+1}(\nu) e^{-i\sigma_0(\nu)z}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

где $\sigma_0(\nu) = \sqrt{k_0^2 - \nu^2}$; $\sigma_{1,2}(\nu) = \sqrt{k_{1,2}^2 - \nu^2}$, а краевые условия (2) для образов примут вид

$$\begin{aligned}
 U_0(\nu, 0) + \sqrt{2\pi} \delta(\nu + k_0 \cos\alpha) &= F_0(\nu); \\
 U_1(\nu, 0) &= F_0(\nu); \\
 U_1(\nu, -d_1) &= F_1(\nu); \\
 U_2(\nu, -d_1) &= F_1(\nu); \\
 U_2(\nu, -D) &= F_2(\nu); \\
 U_3(\nu, -D) &= F_2(\nu); \\
 U_3(\nu, D - d_1) &= F_3(\nu);
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$U_4(\nu, -D - d_1) = F_3(\nu);$$

$$U_4(\nu, -2D) = F_4(\nu);$$

.....

$$U_{2N}(\nu, -(N-1)D - d_1) = F_{2N-1}(\nu);$$

$$U_{2N}(\nu, -ND) = F_{2N}(\nu);$$

$$U_{2N+1}(\nu, -ND) = F_{2N}(\nu);$$

где $F_j(\nu)$ – образы Фурье функций $f_j(y)$ в (2).

Используя (3), краевые условия (4) можно разбить на пары уравнений, из которых однозначно определяются неизвестные амплитуды $A_j(\nu)$, $B_j(\nu)$ через функции $F_j(\nu)$ (пока также неизвестные):

$$A_0(\nu) + \sqrt{2\pi} \delta(\nu + k_0 \cos \alpha) = F_0(\nu);$$

$$A_1(\nu) + B_1(\nu) = F_0(\nu);$$

$$A_1(\nu) e^{-i\sigma_1(\nu)d_1} + B_1(\nu) e^{i\sigma_1(\nu)d_1} = F_1(\nu);$$

$$A_2(\nu) e^{-i\sigma_2(\nu)d_1} + B_2(\nu) e^{i\sigma_2(\nu)d_1} = F_1(\nu);$$

$$A_2(\nu) e^{-i\sigma_2(\nu)D} + B_2(\nu) e^{i\sigma_2(\nu)D} = F_2(\nu); \tag{5}$$

$$A_3(\nu) e^{-i\sigma_1(\nu)D} + B_3(\nu) e^{i\sigma_1(\nu)D} = F_2(\nu);$$

$$A_3(\nu) e^{-i\sigma_1(\nu)(D+d_1)} + B_3(\nu) e^{i\sigma_1(\nu)(D+d_1)} = F_3(\nu);$$

$$A_4(\nu) e^{-i\sigma_2(\nu)(D+d_1)} + B_4(\nu) e^{i\sigma_2(\nu)(D+d_1)} = F_3(\nu);$$

$$A_4(\nu) e^{-i\sigma_2(\nu)2D} + B_4(\nu) e^{i\sigma_2(\nu)2D} = F_4(\nu);$$

$$A_5(\nu) e^{-i\sigma_1(\nu)2D} + B_5(\nu) e^{i\sigma_1(\nu)2D} = F_4(\nu);$$

$$A_5(\nu) e^{-i\sigma_1(\nu)(2D+d_1)} + B_5(\nu) e^{i\sigma_1(\nu)(2D+d_1)} = F_5(\nu);$$

.....

$$A_{2N}(\nu) e^{-i\sigma_2(\nu)[(N-1)D+d_1]} + B_{2N}(\nu) e^{i\sigma_2(\nu)[(N-1)D+d_1]} = F_{2N-1}(\nu);$$

$$A_{2N}(\nu) e^{-i\sigma_2(\nu)ND} + B_{2N}(\nu) e^{i\sigma_2(\nu)ND} = F_{2N}(\nu);$$

$$B_{2N+1}(\nu) e^{i\sigma_0(\nu)ND} = F_{2N}(\nu).$$

Решая эти парные системы и два крайних одинарных уравнения, получим общее представление коэффициентов $A_j(\nu)$, $B_j(\nu)$ через $F_j(\nu)$ для четных и нечетных значений индекса j :

$$A_{2n+1}(v) = e^{i\sigma_1(v)nD} \frac{F_{2n}(v)e^{i\sigma_1(v)d_1} - F_{2n+1}(v)}{2i\sin\sigma_1(v)d_1};$$

$$n = 0; \dots N-1$$

$$B_{2n+1}(v) = e^{-i\sigma_1(v)nD} \frac{F_{2n+1}(v) - F_{2n}(v)e^{-i\sigma_1(v)d_1}}{2i\sin\sigma_1(v)d_1};$$

$$A_{2n}(v) = e^{i\sigma_2(v)(n-1)D} \frac{F_{2n-1}(v)e^{i\sigma_2(v)D} - F_{2n}(v)e^{i\sigma_2(v)d_1}}{2i\sin\sigma_2(v)d_2}; \quad (6)$$

$$N = 1; \dots N$$

$$B_{2n}(v) = e^{-i\sigma_2(v)(n-1)D} \frac{F_{2n}(v)e^{-i\sigma_2(v)d_1} - F_{2n-1}(v)e^{-i\sigma_2(v)D}}{2i\sin\sigma_2(v)d_2};$$

$$A_0(v) = F_0(v) - \sqrt{2\pi} \delta(v + k_0 \cos\alpha); \quad B_{2N+1}(v) = F_{2N}(v)e^{-i\sigma_0(v)ND}.$$

Теперь можно выписать единообразные выражения для образов Фурье $U_j(v, z)$ всех полей (кроме отраженного $U_0(v, z)$ и прошедшего $U_{2N+1}(v, z)$):

$$U_{2n}(v, z) = e^{i\sigma_2(v)(n-1)D} \frac{F_{2n-1}(v)e^{i\sigma_2(v)D} - F_{2n}(v)e^{i\sigma_2(v)d_1}}{2i\sin\sigma_2(v)d_2} e^{i\sigma_2(v)z} +$$

$$e^{-i\sigma_2(v)(n-1)D} \frac{F_{2n}(v)e^{-i\sigma_2(v)d_1} - F_{2n-1}(v)e^{-i\sigma_2(v)D}}{2i\sin\sigma_2(v)d_2} e^{-i\sigma_2(v)z};$$

$$U_{2n-1}(v, z) = e^{i\sigma_1(v)(n-1)D} \frac{F_{2n-2}(v)e^{i\sigma_1(v)d_1} - F_{2n-1}(v)}{2i\sin\sigma_1(v)d_1} e^{i\sigma_1(v)z} +$$

$$e^{-i\sigma_1(v)(n-1)D} \frac{F_{2n-1}(v) - F_{2n-2}(v)e^{-i\sigma_1(v)d_1}}{2i\sin\sigma_1(v)d_1} e^{-i\sigma_1(v)z};$$

$$n = 1; \dots N.$$

Систему уравнений для нахождения неизвестных $F_j(v)$ получим используя вторую половину краевых условий на границах слоев (непрерывность производных по z от функций $U_j(v, z)$).

Приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений, из которых неоднородно только первое:

$$\begin{aligned}
 & [i\sigma_0(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1 - \sigma_1(\nu)\cos\sigma_1(\nu)d_1]F_0(\nu) + \sigma_1(\nu)F_1(\nu) = \\
 & = i\sigma_0(\nu)\sqrt{2\pi}\sin\sigma_1(\nu)d_1\delta(\nu + k_0\cos\alpha) \\
 & \frac{\sigma_1(\nu)}{\sin\sigma_1(\nu)d_1} F_0(\nu) - \left[\frac{\sigma_1(\nu)}{\operatorname{tg}\sigma_1(\nu)d_1} + \frac{\sigma_2(\nu)}{\operatorname{tg}\sigma_2(\nu)d_2} \right] F_1(\nu) + \frac{\sigma_2(\nu)}{\sin\sigma_2(\nu)d_2} F_2(\nu) = 0; \\
 & \frac{\sigma_2(\nu)}{\sin\sigma_2(\nu)d_2} F_1(\nu) - \left[\frac{\sigma_1(\nu)}{\operatorname{tg}\sigma_1(\nu)d_1} + \frac{\sigma_2(\nu)}{\operatorname{tg}\sigma_2(\nu)d_2} \right] F_2(\nu) + \frac{\sigma_1(\nu)}{\sin\sigma_1(\nu)d_1} F_3(\nu) = 0; \\
 & \frac{\sigma_1(\nu)}{\sin\sigma_1(\nu)d_1} F_2(\nu) - \left[\frac{\sigma_1(\nu)}{\operatorname{tg}\sigma_1(\nu)d_1} + \frac{\sigma_2(\nu)}{\operatorname{tg}\sigma_2(\nu)d_2} \right] F_3(\nu) + \frac{\sigma_2(\nu)}{\sin\sigma_2(\nu)d_2} F_4(\nu) = 0; \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \frac{\sigma_1(\nu)}{\sin\sigma_1(\nu)d_1} F_{2N-2}(\nu) - \left[\frac{\sigma_1(\nu)}{\operatorname{tg}\sigma_1(\nu)d_1} + \frac{\sigma_2(\nu)}{\operatorname{tg}\sigma_2(\nu)d_2} \right] F_{2N-1}(\nu) + \\
 & \quad + \frac{\sigma_2(\nu)}{\sin\sigma_2(\nu)d_2} F_{2N}(\nu) = 0; \\
 & \frac{\sigma_2(\nu)}{\sin\sigma_2(\nu)d_2} F_{2N-1}(\nu) - \left[\frac{\sigma_2(\nu)}{\operatorname{tg}\sigma_2(\nu)d_2} - i\sigma_0(\nu) \right] F_{2N}(\nu) = 0. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Матрица системы (7) имеет почти регулярную структуру, за исключением первой и последней строки. Систему (7) можно переписать в более компактной форме, если поделить все уравнения на элементы главной диагонали. Вводя обозначение $q(\nu) = -\left[\frac{\sigma_1(\nu)}{\operatorname{tg}\sigma_1(\nu)d_1} + \frac{\sigma_2(\nu)}{\operatorname{tg}\sigma_2(\nu)d_2} \right]$ получим

$$\begin{aligned}
 & F_0(\nu) + \frac{\sigma_1(\nu)}{i\sigma_0(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1 - \sigma_1(\nu)\cos\sigma_1(\nu)d_1} F_1(\nu) = \\
 & = \frac{i\sigma_0(\nu)\sqrt{2\pi}\sin\sigma_1(\nu)d_1\delta(\nu + k_0\cos\alpha)}{i\sigma_0(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1 - \sigma_1(\nu)\cos\sigma_1(\nu)d_1}; \\
 & \frac{\sigma_1(\nu)}{q(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1} F_0(\nu) + F_1(\nu) + \frac{\sigma_2(\nu)}{q(\nu)\sin\sigma_2(\nu)d_2} F_2(\nu) = 0; \\
 & \frac{\sigma_2(\nu)}{q(\nu)\sin\sigma_2(\nu)d_2} F_1(\nu) + F_2(\nu) + \frac{\sigma_1(\nu)}{q(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1} F_3(\nu) = 0; \\
 & \frac{\sigma_1(\nu)}{q(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1} F_2(\nu) + F_3(\nu) + \frac{\sigma_2(\nu)}{q(\nu)\sin\sigma_2(\nu)d_2} F_4(\nu) = 0; \quad (8) \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_1(\nu)}{q(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1} F_{2N-2}(\nu) + F_{2N-1}(\nu) + \frac{\sigma_2(\nu)}{q(\nu)\sin\sigma_2(\nu)d_2} F_{2N}(\nu) = 0;$$

$$\frac{\sigma_2(\nu)}{[i\sigma_0(\nu) - \frac{\sigma_2(\nu)}{\operatorname{tg}\sigma_2(\nu)d_2}]\sin\sigma_2(\nu)d_2} F_{2N-1}(\nu) + F_{2N}(\nu) = 0;$$

В еще более компактной форме систему (8) можно записать, если ввести дополнительные обозначения

$$A_0 = \frac{i\sigma_0(\nu)\sqrt{2\pi}\sin\sigma_1(\nu)d_1\delta(\nu+k_0\cos\alpha)}{i\sigma_0(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1 - \sigma_1(\nu)\cos\sigma_1(\nu)d_1};$$

$$p_1 = \frac{\sigma_1(\nu)}{i\sigma_0(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1 - \sigma_1(\nu)\cos\sigma_1(\nu)d_1}; p_2 = \frac{\sigma_1(\nu)}{q(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1};$$

$$p_3 = \frac{\sigma_2(\nu)}{q(\nu)\sin\sigma_2(\nu)d_2}; p_4 = \frac{\sigma_2(\nu)}{[i\sigma_0(\nu) - \frac{\sigma_2(\nu)}{\operatorname{tg}\sigma_2(\nu)d_2}]\sin\sigma_2(\nu)d_2};$$

$$F_0(\nu) + p_1 F_1(\nu) = A_0;$$

$$p_2 F_0(\nu) + F_1(\nu) + p_3 F_2(\nu) = 0;$$

$$p_3 F_1(\nu) + F_2(\nu) + p_2 F_3(\nu) = 0;$$

$$p_2 F_2(\nu) + F_3(\nu) + p_3 F_4(\nu) = 0;$$

$$\dots\dots\dots p_2 F_{2N-2}(\nu) + F_{2N-1}(\nu) + p_3 F_{2N}(\nu) = 0;$$

$$p_4 F_{2N-1}(\nu) + F_{2N}(\nu) = 0.$$

Таким образом, матрица системы (8) является трехдиагональной, порядка $2N + 1$, и имеет вид

$$\begin{matrix} 1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ p_2 & 1 & p_3 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_3 & 1 & p_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 1 & p_3 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & 1 & p_2 \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & p_2 & 1 & p_3 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & p_4 & 1 & \dots \end{matrix} \quad (9)$$

Структура матрицы (9) нерегулярна только вследствие наличия в первой строке элемента p_1 , а в последней строке – элемента p_4 . Детерминант D_{2N+1} этой матрицы можно разложить по паре элементов первой и затем последней строки. Введем обозначения $D_{2N-1}^{(p_3, p_2)}$, $D_{2N-2}^{(p_3, p_3)}$, $D_{2N-2}^{(p_2, p_2)}$, $D_{2N-3}^{(p_2, p_3)}$ для регулярных детерминантов соответствующих порядков, у которых боковые диагонали начинаются с элементов p_3 (p_2), и заканчиваются элементом p_2 (p_3). Тогда

$$D_{2N+1} = D_{2N-1}^{(p_3, p_2)} - p_4 p_3 D_{2N-2}^{(p_3, p_3)} - p_1 p_2 D_{2N-2}^{(p_2, p_2)} + p_1 p_2 p_3 p_4 D_{2N-3}^{(p_2, p_3)}. \quad (10)$$

Прошедшее поле. Из последнего равенства (3) следует выражение $U_{2N+1}(v, z) = B_{2N+1}(v) e^{-i\sigma_0(v)z}$ для образа Фурье прошедшего поля, а с учетом последнего равенства в (6):

$$U_{2N+1}(v, z) = F_{2N}(v) e^{-i\sigma_0(v)(z + ND)}.$$

При этом, $F_{2N}(v)$ как решение алгебраической системы (8) выписывается в виде

$$F_{2N}(v) = D_{2N+1}^{-1}(v) \begin{vmatrix} 1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_0 \\ p_2 & 1 & p_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_3 & 1 & p_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 1 & p_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & 1 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & p_2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & p_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Если раскрыть определитель в числителе по элементам последнего столбца, то оставшийся определитель порядка $2N$ станет определителем треугольной матрицы и легко вычисляется в виде $(p_2 p_3)^{N-1} p_2 p_4$. Следовательно, $F_{2N}(v) = A_0 D_{2N+1}^{-1}(v) (p_2 p_3)^{N-1} p_2 p_4$. В свою очередь,

$$U_{2N+1}(v, z) = A_0(v) D_{2N+1}^{-1}(v) (p_3)^{N-1} (p_2)^N p_4 e^{-i\sigma_0(v)(z + ND)}. \quad (11)$$

Само прошедшее поле $u_{2N+1}(y, z)$ определяется через обратное преобразование Фурье в виде

$$u_{2N+1}(y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_0(v)p_2^N(v)p_3^{N-1}(v)p_4(v)}{D_{2N+1}(v)} e^{-i\sigma_0(v)(z+ND)} e^{iv y} dv. \quad (12)$$

И так как $A_0 = \frac{i\sigma_0(v)\sqrt{2\pi} \sin \sigma_1(v)d_1 \delta(v + k_0 \cos \alpha)}{i\sigma_0(v)\sin \sigma_1(v)d_1 - \sigma_1(v) \cos \sigma_1(v)d_1}$; содержит δ -функцию, окончательное выражение для прошедшего поля примет вид

$$u_{2N+1}(y, z) = \frac{ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_1(\alpha)d_1 p_2^N(\alpha)p_3^{N-1}(\alpha)p_4(\alpha) e^{-ik_0(y \cos \alpha + (z+ND)\sin \alpha)}}{D_{2N+1}(\alpha)[ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_1(\alpha)d_1 - \sigma_1(\alpha) \cos \sigma_1(\alpha)d_1]}. \quad (13)$$

Здесь $p_2 = \frac{\sigma_1(\alpha)}{q(\alpha) \sin \sigma_1(\alpha)d_1}$, $p_3 = \frac{\sigma_2(\alpha)}{q(\alpha) \sin \sigma_2(\alpha)d_2}$, т. е., прежние выражения для этих величин, в которых v заменяется на $-k_0 \cos \alpha$, в соответствии с аргументом δ -функции.

Воспользуемся теперь выражением (10) для детерминанта $D_{2N+1}(\alpha)$, и вынесем из каждой строки каждого из детерминантов правой части фактор $\frac{1}{q(\alpha)}$, учитывая, что они содержат лишь члены p_2 или p_3 , а также то, что этот фактор не содержит сомножители p_1, p_4 , входящие в (10). Получим вместо (10) следующее равенство:

$$D_{2N+1}(\alpha) = \frac{1}{q^{2N-1}(\alpha)} \tilde{D}_{2N-1}^{(p_3, p_2)}(\alpha), - \frac{p_4 \tilde{p}_3}{q^{2N-1}(\alpha)} \tilde{D}_{2N-2}^{(p_3, p_3)}(\alpha), - \frac{p_1 \tilde{p}_2}{q^{2N-1}(\alpha)} \tilde{D}_{2N-2}^{(p_2, p_2)}(\alpha), + \frac{p_1 \tilde{p}_2 \tilde{p}_3 p_4}{q^{2N-1}(\alpha)} \tilde{D}_{2N-3}^{(p_2, p_3)}(\alpha). \quad (14)$$

Здесь $\tilde{p}_2 = \frac{\sigma_2(\alpha)}{\sin \sigma_2(\alpha)d_2}$, $\tilde{p}_3 = \frac{\sigma_1(\alpha)}{\sin \sigma_1(\alpha)d_1}$, а \tilde{D} означает, что у каждого такого детерминанта на боковых диагоналях присутствуют лишь члены вида \tilde{p}_2, \tilde{p}_3 (без $q(\alpha)$ в знаменателе), а на главной диагонали $q(\alpha)$ (вместо 1). Вынося также $\frac{1}{q^{2N-1}(\alpha)}$ из произведения $(p_2)^N - (p_3)^N$ в числителе выражения (13) и заменяя его на $(\tilde{p}_3)^{N-1}(\tilde{p}_2)^N$, получим, после сокращения

$$u_{2N+1}(y, z) = \frac{ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_1(\alpha) d_1 \tilde{p}_2^N(\alpha) \tilde{p}_3^{N-1}(\alpha) p_4(\alpha) e^{-ik_0(y \cos \alpha + (z+ND) \sin \alpha)}}{\tilde{D}_{2N+1}(\alpha) [ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_1(\alpha) d_1 - \sigma_1(\alpha) \cos \sigma_1(\alpha) d_1]}, \quad (15)$$

вместо (13), и равенство

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{2N+1}(\alpha) = & \tilde{D}_{2N-1}^{(p_3, p_2)}(\alpha) - p_4 \tilde{p}_3 \tilde{D}_{2N-2}^{(p_3, p_3)}(\alpha), - p_1 \tilde{p}_2 \tilde{D}_{2N-2}^{(p_2, p_2)}(\alpha) + \\ & + p_1 \tilde{p}_2 \tilde{p}_3 p_4 \tilde{D}_{2N-3}^{(p_2, p_3)}(\alpha) \end{aligned} \quad (16)$$

вместо (10).

Детерминант $\tilde{D}_{2N+1}(\alpha)$ можно вычислить в замкнутой форме лишь при диагональных элементах, равных нулю. Это означает, что параметры структуры должны быть выбраны так, чтобы $q(\alpha) = 0$, т. е. должно быть выполнено равенство

$$\left[\frac{\sigma_1(\alpha)}{\operatorname{tg} \sigma_1(\alpha) d_1} + \frac{\sigma_2(\alpha)}{\operatorname{tg} \sigma_2(\alpha) d_2} \right] = 0. \quad (17)$$

Здесь $\sigma_1(\alpha) = \sqrt{k_1^2 - k_0^2 \cos^2 \alpha}$, $\sigma_2(\alpha) = \sqrt{k_2^2 - k_0^2 \cos^2 \alpha}$.

Тогда имеем для детерминанта

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{2N-1}^{(p_3, p_2)}(\alpha) = & \begin{vmatrix} 0 & \tilde{p}_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{p}_3 & 0 & \tilde{p}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{p}_2 & 0 & \tilde{p}_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 0 & \tilde{p}_3 & 0 & \tilde{p}_2 \\ & & & 0 & 0 & \tilde{p}_2 & 0 \end{vmatrix} = - \tilde{p}_3^2 \tilde{D}_{2N-3}^{(p_3, p_2)} = \\ = & \tilde{p}_3^4 \tilde{D}_{2N-5}^{(p_3, p_2)} = - \tilde{p}_3^6 \tilde{D}_{2N-7}^{(p_3, p_2)} = \dots (-1)^k \tilde{p}_3^{2k} \tilde{D}_{2N-(2k+1)}^{(p_3, p_2)}. \end{aligned}$$

Причем $\tilde{D}_3^{(p_3, p_2)} = \begin{vmatrix} 0 & \tilde{p}_3 & 0 \\ \tilde{p}_3 & 0 & \tilde{p}_2 \\ 0 & \tilde{p}_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, т. е. $\tilde{D}_{2N-1}^{(p_3, p_2)}(\alpha) = 0$. То же

самое справедливо и для $\tilde{D}_{2N-3}^{(p_2, p_3)}(\alpha)$. Следовательно, формула (16) сокращается до

$$\tilde{D}_{2N+1}(\alpha) = - p_4 \tilde{p}_3 \tilde{D}_{2N-2}^{(p_3, p_3)}(\alpha), - p_1 \tilde{p}_2 \tilde{D}_{2N-2}^{(p_2, p_2)}(\alpha), \quad (18)$$

для двух оставшихся детерминантов получим по индукции

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{2N-2}^{(p_3, p_3)}(\alpha) &= -\tilde{p}_3^2 \tilde{D}_{2N-4}^{(p_3, p_3)} = \tilde{p}_3^4 \tilde{D}_{2N-6}^{(p_3, p_3)} = -\tilde{p}_3^6 \tilde{D}_{2N-8}^{(p_3, p_3)} = \dots = \\ &= (-1)^k \tilde{p}_3^{2k} \tilde{D}_{2N-2(k+1)}^{(p_3, p_3)} = \dots = (-1)^{N-1} \tilde{p}_3^{2(N-1)}(\alpha), \end{aligned}$$

так как

$$\tilde{D}_2^{(p_3, p_3)} = -\tilde{p}_3^2.$$

Аналогично $\tilde{D}_{2N-2}^{(p_2, p_2)}(\alpha) = (-1)^{N-1} \tilde{p}_2^{2(N-1)}(\alpha)$. Окончательно из равенства (18) следует

$$\tilde{D}_{2N+1}(\alpha) = (-1)^N [p_4 \tilde{p}_3^{2N-1} + p_1 \tilde{p}_2^{2N-1}]. \quad (19)$$

Соответствующее явное выражение для прошедшего поля имеет вид

$$\begin{aligned} u_{2N+1}(y, z) &= (-1)^N \times \\ &\times \frac{ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_1(\alpha) d_1 \tilde{p}_2^N(\alpha) \tilde{p}_3^{N-1}(\alpha) p_4(\alpha) e^{-ik_0(y \cos \alpha + (z+ND) \sin \alpha)}}{\left[p_4 \tilde{p}_3^{2N-1} + p_1 \tilde{p}_2^{2N-1} \right] [ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_1(\alpha) d_1 - \sigma_1(\alpha) \cos \sigma_1(\alpha) d_1]}. \end{aligned}$$

Разделив числитель и знаменатель на $(\tilde{p}_3)^N (\tilde{p}_2)^N$, приведем это равенство к виду

$$\begin{aligned} u_{2N+1}(y, z) &= (-1)^N \times \\ &\times \frac{ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_1(\alpha) d_1 \tilde{p}_2(\alpha) p_4(\alpha) e^{-ik_0(y \cos \alpha + (z+ND) \sin \alpha)}}{\left[\tilde{p}_2 p_4 \left(\frac{\tilde{p}_3}{\tilde{p}_2} \right)^N + p_1 \tilde{p}_3 \left(\frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3} \right)^N \right] [ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_1(\alpha) d_1 - \sigma_1(\alpha) \cos \sigma_1(\alpha) d_1]}. \quad (20) \end{aligned}$$

Заметим, что $\left(\frac{\tilde{p}_3}{\tilde{p}_2} \right)^N = \left[\frac{\sigma_1(\alpha) d_1}{\sin \sigma_1(\alpha) d_1} \frac{\sin \sigma_2(\alpha) d_2}{\sigma_2(\alpha) d_2} \right]^N \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^N$. Пове-

дение функции $\frac{\sin x}{x}$ на интервале $[0, \pi]$ (монотонно убывает от 1 до

0) позволяет утверждать, что либо $\frac{\tilde{p}_3}{\tilde{p}_2}$, либо $\frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3}$ меньше 1. Следова-

тельно, при $N \rightarrow \infty$ знаменатель в (20) стремится к ∞ . Выражение (20)

можно привести к более симметричному виду, если подставить явные выражения для $p_1(\alpha) \tilde{p}_3(\alpha)$, и для $p_4(\alpha) \tilde{p}_2(\alpha)$:

$$u_{2N+1}(y, z) = (-1)^N \times \\ \times ik_0 \sin \alpha e^{-ik_0(y \cos \alpha + (z+ND) \sin \alpha)} \left[\frac{ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_1(\alpha) d_1 - \sigma_1(\alpha) \cos \sigma_1(\alpha) d_1 \left(\frac{\tilde{p}_3}{\tilde{p}_2} \right)^N}{\sin \sigma_1(\alpha) d_1} \left(\frac{\tilde{p}_3}{\tilde{p}_2} \right)^N + \right. \\ \left. + \frac{ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_2(\alpha) d_2 - \sigma_2(\alpha) \cos \sigma_2(\alpha) d_2 \left(\frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3} \right)^N}{\sin \sigma_2(\alpha) d_2} \left(\frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3} \right)^N \right]^{-1}.$$

Используя равенство (17) в виде $\sigma_1(\alpha) \operatorname{ctg} \sigma_1(\alpha) d_1 = -\sigma_2(\alpha) \operatorname{ctg} \sigma_2(\alpha) d_2$, приведем его к виду

$$u_{2N+1}(y, z) = (-1)^N \times \\ \times \frac{ik_0 \sin \alpha e^{-ik_0(y \cos \alpha + (z+ND) \sin \alpha)}}{ik_0 \sin \alpha \left[\left(\frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3} \right)^N + \left(\frac{\tilde{p}_3}{\tilde{p}_2} \right)^N \right] + \sigma_1(\alpha) \operatorname{ctg} \sigma_1(\alpha) d_1 \left[\left(\frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3} \right)^N - \left(\frac{\tilde{p}_3}{\tilde{p}_2} \right)^N \right]}. \quad (21)$$

Отраженное поле. Из (3) и (5) следует, что $U_0(\nu, z) = A_0(\nu) e^{i\sigma_0(\nu)z} = F_0(\nu) e^{i\sigma_0(\nu)z} - \sqrt{2\pi} \delta(\nu + k_0 \cos \alpha) e^{i\sigma_0(\nu)z}$.

Из системы (8), аналогично предыдущему, получим

$$F_0(\nu) = \frac{A_0(\nu)}{D_{2N+1}(\nu)} \begin{pmatrix} 1 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & 1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 1 & p_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_2 & 1 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & p_3 & 1 & p_2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & p_2 & 1 & p_3 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & p_4 & 1 \end{pmatrix}_{(2N)} =$$

$$= \frac{A_0(\nu)}{D_{2N+1}(\nu)} \begin{vmatrix} 1 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & 1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 1 & p_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & p_2 & 1 & p_3 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & p_3 & 1 & p_2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & p_2 & 1 \end{vmatrix}_{(2N-1)}$$

$$\frac{A_0(\nu)p_4(\nu)p_3(\nu)}{D_{2N+1}(\nu)} \begin{vmatrix} 1 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & 1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 1 & p_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & p_3 & 1 & p_2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & p_2 & 1 & p_3 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & p_3 & 1 \end{vmatrix}_{(2N-2)}$$

В более короткой записи:

$$F_0(\nu) = \frac{A_0(\nu)D_{(2N-1)}^{(p_3, p_2)}(\nu) - A_0(\nu)p_4(\nu)p_3(\nu)D_{(2N-2)}^{(p_3, p_3)}(\nu)}{D_{2N+1}(\nu)} \quad (22)$$

т. е.

$$U_0(\nu, z) = A_0(\nu) \frac{D_{(2N-1)}^{(p_3, p_2)}(\nu)}{D_{2N+1}(\nu)} e^{i\sigma_0(\nu)z} - A_0(\nu) \times \times \frac{p_4(\nu)p_3(\nu)D_{(2N-2)}^{(p_3, p_3)}(\nu)}{D_{2N+1}(\nu)} e^{i\sigma_0(\nu)z} - \sqrt{2\pi} \delta(\nu + k_0 \cos \alpha) e^{i\sigma_0(\nu)z}. \quad (23)$$

Применяя к (23) обратное преобразование Фурье и учитывая, что

$$A_0(\nu) = \frac{i\sigma_0(\nu)\sqrt{2\pi} \sin \sigma_1(\nu)d_1 \delta(\nu + k_0 \cos \alpha)}{i\sigma_0(\nu)\sin \sigma_1(\nu)d_1 - \sigma_1(\nu)\cos \sigma_1(\nu)d_1},$$

получим

$$u_0(y, z) = \left\{ \frac{ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_1(\alpha) d_1 [D_{(2N-1)}^{(p_3, p_2)}(\alpha) - p_4(\alpha) p_3(\alpha) D_{(2N-2)}^{(p_3, p_3)}(\alpha)]}{[ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_1(\alpha) d_1 - \sigma_1(\alpha) \cos \sigma_1(\alpha) d_1] D_{2N+1}(\alpha)} - 1 \right\} \times (24)$$

$$\times e^{-ik_0(y \cos \alpha - z \sin \alpha)}$$

Далее, как и прежде, выносим фактор $\frac{1}{q(\alpha)}$ из детерминантов и сомножителей числителя и знаменателя:

$$D_{2N+1}(\alpha) = \frac{1}{q^{2N-1}(\alpha)} \tilde{D}_{2N+1}(\alpha) \text{ (формула (14)); } D_{(2N-1)}^{(p_3, p_2)}(\alpha) =$$

$$= \frac{1}{q^{2N-1}(\alpha)} \tilde{D}_{(2N-1)}^{(p_3, p_2)}(\alpha); D_{(2N-2)}^{(p_3, p_3)}(\alpha) = \frac{1}{q^{2N-2}(\alpha)} \tilde{D}_{(2N-2)}^{(p_3, p_3)}(\alpha); p_3(\alpha) =$$

$$= \frac{1}{q(\alpha)} \tilde{p}_3(\alpha). \text{ Тогда,}$$

$$u_0(y, z) = \left\{ \frac{ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_1(\alpha) d_1 [\tilde{D}_{(2N-1)}^{(p_3, p_2)}(\alpha) - p_4(\alpha) \tilde{p}_3(\alpha) \tilde{D}_{(2N-2)}^{(p_3, p_3)}(\alpha)]}{[ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_1(\alpha) d_1 - \sigma_1(\alpha) \cos \sigma_1(\alpha) d_1] \tilde{D}_{2N+1}(\alpha)} - 1 \right\} \times (25)$$

$$\times e^{-ik_0(y \cos \alpha - z \sin \alpha)}$$

Если $q(\alpha) \rightarrow 0$, то $\tilde{D}_{(2N-1)}^{(p_3, p_2)}(\alpha) \rightarrow 0$, а $\tilde{D}_{(2N-2)}^{(p_3, p_3)}(\alpha) \rightarrow (-1)^{N-1} \tilde{p}_3^{2(N-1)}(\alpha)$.

Получим, вместо (25)

$$u_0(y, z) = \left\{ -\frac{ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_1(\alpha) d_1 p_4(\alpha) \tilde{p}_3^{2N-1}(\alpha) (-1)^{N-1}}{[ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_1(\alpha) d_1 - \sigma_1(\alpha) \cos \sigma_1(\alpha) d_1] \tilde{D}_{2N+1}(\alpha)} - 1 \right\} \times (26)$$

$$\times e^{-ik_0(y \cos \alpha - z \sin \alpha)}$$

После подстановки $\tilde{D}_{2N+1}(\alpha)$ в знаменатель в виде (19), получим

$$u_0(y, z) = \left\{ \frac{ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_1(\alpha) d_1 p_4(\alpha) \tilde{p}_3^{2N-1}(\alpha)}{[ik_0 \sin \alpha \sin \sigma_1(\alpha) d_1 - \sigma_1(\alpha) \cos \sigma_1(\alpha) d_1] [p_4(\alpha) \tilde{p}_3^{2N-1}(\alpha) + p_1(\alpha) \tilde{p}_2^{2N-1}(\alpha)]} - 1 \right\} \times (27)$$

$$\times e^{-ik_0(y \cos \alpha - z \sin \alpha)}$$

Условия обращения в ноль фактора $q(\alpha)$. Фактор $q(\alpha)$, равенство которого нулю позволяет выписать прошедшее и отраженное поля в явном виде, имеет вид

$$q(\alpha) = \frac{\sigma_1(\alpha)}{\operatorname{tg}\sigma_1(\alpha)d_1} + \frac{\sigma_2(\alpha)}{\operatorname{tg}\sigma_2(\alpha)d_2}. \quad (28)$$

Обратить в ноль это выражение проще всего, потребовав выполнения равенств

$$\operatorname{tg}\sigma_1(\alpha)d_1 = \operatorname{tg}\sigma_2(\alpha)d_2 = \infty. \quad (29)$$

Отсюда следует, что $\sigma_1(\alpha)d_1 = \pi(n + 1/2)$; $\sigma_2(\alpha)d_2 = \pi(m + 1/2)$. В более подробной записи:

$$\omega \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_0 \sin^2 \alpha} d_1 = \pi(n + 1/2); \quad \omega \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_0 \sin^2 \alpha} d_2 = \pi(m + 1/2). \quad (30)$$

Отметим, что при $n = m$, $\frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3} = \frac{\sigma_1(\alpha)}{\sigma_2(\alpha)}$, в силу (30), и равно $\frac{d_2}{d_1}$, т. е.

$$\frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3} = \frac{\sigma_1(\alpha)}{\sigma_2(\alpha)} = \frac{d_2}{d_1}. \quad (31)$$

С учетом (31), а также соотношений (30), выражения для прошедшего и отраженного полей примут наиболее простой вид

$$u_{2N+1}(y, z) = (-1)^N \frac{e^{-ik_0(y \cos \alpha + (z + ND) \sin \alpha)}}{\left[\left(\frac{d_2}{d_1} \right)^N + \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^N \right]}; \quad (32)$$

$$u_0(y, z) = \left\{ \frac{p_4(\alpha) \tilde{p}_3^{2N-1}(\alpha)}{[p_4(\alpha) \tilde{p}_3^{2N-1}(\alpha) + p_1(\alpha) \tilde{p}_2^{2N-1}(\alpha)]} - 1 \right\} \times \\ \times e^{-ik_0(y \cos \alpha - z \sin \alpha)}.$$

Так как при выполнении равенств (30), (31) и при $n = m$, $p_4 = \frac{\sigma_2(\nu)}{i\sigma_0(\nu)(-1)^n}$; $p_1 = \frac{\sigma_1(\nu)}{i\sigma_0(\nu)(-1)^n}$, предыдущее равенство можно упростить до

$$u_0(y, z) = \left\{ \frac{\sigma_2(\alpha)}{\left[\sigma_2(\alpha) + \sigma_1(\alpha) \left(\frac{\tilde{p}_2(\alpha)}{\tilde{p}_3(\alpha)} \right)^{2N-1} \right]} - 1 \right\} e^{-ik_0(y \cos \alpha - z \sin \alpha)}$$

или, применяя соотношения, (31)

$$u_0(y, z) = \left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^{2N}} - 1 \right\} e^{-ik_0(y \cos \alpha - z \sin \alpha)}. \quad (33)$$

Сравнивая выражения (32) и (33), видим, что для того, чтобы поле $u_{2N+1}(y, z)$ было предельно малым по амплитуде, а поле $u_0(y, z)$ сколь угодно близким к падающей плоской волне с обратным знаком, отношение $\frac{d_2}{d_1}$ должно быть больше единицы: $\frac{d_2}{d_1} > 1$. Это дает воз-

можность использовать данный тип фотонного кристалла как отражающую поверхность с ничтожными потерями.

Если поменять местами толщины слоев d_1 и d_2 , т. е. сделать их отношение меньшим единицы: $\frac{d_2}{d_1} < 1$, то при увеличении числа сло-

ев N прошедшее поле $u_{2N+1}(y, z)$ по-прежнему стремится к нулю, но и отраженное поле в этом случае также стремится к нулю (см. (33)). Фотонный кристалл становится волноведущей структурой, когда втягивает падающее поле внутрь себя и обладает ничтожными потерями при достаточно большом значении N , не говоря о том, что по сравнению с металлическими волноводами такая структура существенно экономит на весе и стоимости устройства.

Численные расчеты. Элементарные расчеты показывают, что при изменении отношения $\frac{d_1}{d_2}$ с 0,5 до 2 свойства фотонного кристалла меняются от практически идеального отражателя, до волноведущей структуры. При $\frac{d_1}{d_2} = 0,5$ модуль амплитуды отраженного поля равен 1 уже при $N = 3, 4$, а модуль амплитуды прошедшего поля – величина порядка 10^{-7} при $N = 5$, и 10^{-14} при $N = 10$.

При $\frac{d_1}{d_2} = 2$ модуль амплитуды отраженного поля является величиной порядка 10^{-5} при $N = 7, 8$, и 10^{-7} при $N = 10$. Модуль амплиту-

ды прошедшего поля меняется медленнее, и является величиной 10^{-3} при $N = 10$. Разумеется, если отношение $\frac{d_1}{d_2} > 2$ то убывание прошедшего поля с ростом числа слоев будет происходить быстрее.

На рис 2 и 3 представлены диаграммы поведения модуля амплитуды отраженного и прошедшего полей при различных значениях $\frac{d_1}{d_2}$ и разном числе N слоев структуры.

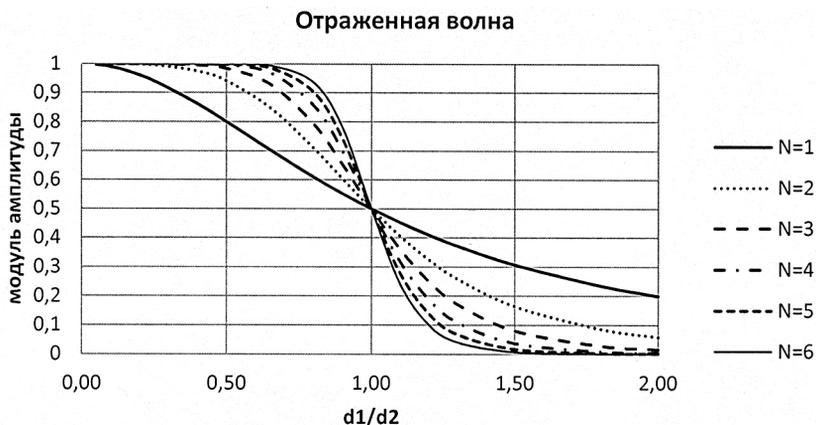


Рис. 2. Модуль амплитуды отраженной волны

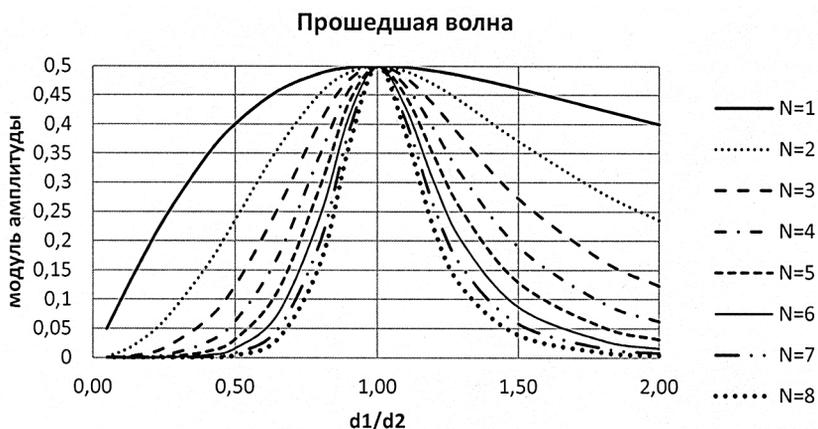


Рис. 3. Модуль амплитуды прошедшей волны

Выводы. В результате исследования можно сделать вывод, что одномерный конечный фотонный кристалл (с конечным числом ячеек периодичности) в зависимости от величины отношения $\frac{d_1}{d_2}$ толщин однородных слоев, может вести себя либо как почти идеально отражающее зеркало, либо как волноведущая структура с ничтожными потерями.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J.D. Joannopoulos, R.D. Meade, J.N. Winn. *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*. Princeton Univ. Press, 1995.
- [2] *Optical properties of photonic crystals* Ed. By R. Sakoda, Berlin: Springer-Verlag, 2001 Yablonovitch E. Sci. American. 2001, no 12, P. 47.
- [3] Боголюбов А.Н., Буткарев И.А., Дементьева Ю.С. Исследование распространения электромагнитных импульсов через фотонные кристаллические структуры. *Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 3, Физ. Астрон.*, 2010, № 6, с. 3–8.
- [4] Дементьева Ю.С. Синтез волноведущих систем на основе фотонных кристаллов. *Вычислительные методы и программирование*, 2011, т. 12, с. 375–378.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Апельцин В.Ф., Мозжорина Т.Ю. Одномерный фотонный кристалл как отражающая или волноведущая диэлектрическая структура. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/966.html>

Апельцин Виктор Филиппович родился в 1944 г. Окончил Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1968 г. Канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 80 научных работ в области численных и аналитических методов исследования краевых задач электродинамики. e-mail: vapeltsin@hotmail.com.

Мозжорина Татьяна Юрьевна, родилась в 1959 г., окончила в 1982 г. МАИ. К.т.н., доцент кафедры "Вычислительная математика и математическая физика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 15 научных работ в области моделирования характеристик ГТД, моделирования полета пассажирских самолетов, оптимизации СУ в системе ЛА. e-mail: mozzhorina@mail.ru.