УДК 519.718

Экстраполяционные и интерполяционные оценки среднего количества безотказных срабатываний радиоэлектронной аппаратуры при частых включениях в работу и выключениях из нее

Г.С. Садыхов[1,2], А.А. Артюхов[3], О.И. Казакова[4]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2]ВЦ РАН, Москва, 119333, Россия
[3]ОАО «Концерн «РТИ системы», Москва, 127083, Россия
[4]ОАО «Ракетно-космическая корпорация „Энергия" имени С.П. Королева», Московская область,
г. Королев, 141070, Россия

Установлена интерполяционная оценка для среднего количества безотказных срабатываний радиоэлектронной аппаратуры, у которой интенсивность отказов образует монотонно возрастающую последовательность при включениях в работу и выключениях из нее. В случае монотонного убывания интенсивности отказов при срабатываниях установлена экстраполяционная оценка среднего количества безотказных срабатываний. Доказана достижимость установленных оценок.

Ключевые слова: *безотказное количество срабатываний, интенсивность отказов при срабатывании, экстраполяционные и интерполяционные оценки.*

Введение. Анализ отказов радиолокационной аппаратуры показывает, что значительная доля приходится на те из них, которые связаны с частыми срабатываниями включении аппаратуры в работу или выключении из нее. Основная причина заключается в том, что процессы «разогревания» аппаратуры при срабатывании «включено» и процессы «остывания» при срабатывании «выключено» являются факторами форсированного режима старения комплектующих изделий электронной техники [1]. Подобная ситуация наблюдается и для других видов аппаратуры, например, для авиационной радиоэлектронной аппаратуры США, изготовленной в 1955–1960 гг., один электротермический цикл «включено / выключено» эквивалентен, с точки зрения возникновения отказов, 10 ч непрерывной работы [2].

Эффект термоциклирования при частых последовательно чередующихся срабатываниях на «включено» и «выключено» может стать основным фактором, снижающим ресурс радиоэлектронной аппаратуры (РЭА) [3].

Существующие подходы для оценки надежности при частых срабатываниях предполагают, что в момент перехода из одного режима работы в другой будет осуществлен с вероятностью, равной единице, что не учитывает особенностей физических процессов, приводящих к отказу, ускоряющихся при частых «разогреваниях» и «остываниях» РЭА [4–6]. Допущение абсолютной безотказности всех срабатываний приводит к необоснованному завышению уровня надежности РЭА, что недопустимо для оценки показателей надежности аппаратуры техногенно-опасных объектов.

Вследствие эффекта термоциклирования при частых последовательно чередующихся срабатываниях ресурс техногенно-опасных объектов вырабатывается интенсивнее, чем если бы они эксплуатировались в постоянном режиме [7–9]. Аналогичная ситуация наблюдается у радиоэлектронной аппаратуры, для которой интенсивность отказов образует монотонно возрастающую последовательность при включениях в штатный режим эксплуатации и выключениях из него.

Число наблюдаемых отказов при большом количестве срабатываний на «включено/выключено» позволяет оценить показатели надежности. Однако при этом возникает задача – каким образом распространить эти оценки на ранние этапы эксплуатации, где количество срабатываний незначительно? Другими словами, каким образом можно интерполировать полученные оценки из области наблюдаемых отказов при срабатываниях в зону области их зарождения?

Кроме того, возникает и обратная задача – каким образом можно экстраполировать полученные оценки надежности на оценки надежности, которые будут соответствовать более поздним срокам эксплуатации РЭА, работающей в режиме частых «включений / выключений» из штатного режима?

Данная работа посвящена решению этих задач.

Среднее количество безотказных срабатываний. Пусть у РЭА до k срабатываний не было отказов, а после k срабатываний, а именно: от $k+1$ до $k+l$ (где $l \geq 2$ – целое число) по регламенту штатной эксплуатации крайне не желателен отказ при срабатываниях типа «включено/выключено».

Определим показатель безопасности в этом случае.

Обозначим ζ число безотказных срабатываний РЭА, тогда вероятность того, что РЭА проработает безотказно в результате k срабатываний будет

$$P_k = Pr(\zeta \geq k+1), \tag{1}$$

где Pr – вероятность события, содержащегося внутри скобок (от англ. probability – вероятность).

Пусть порядковый номер числа срабатываний, в результате которого может произойти отказ, содержится в следующем ряду целых чисел:

$$k+1,\ k+2, ...,\ k+l-1, \tag{2}$$

тогда вероятность отсутствия отказа, у которого порядковый номер из ряда чисел (2), будет

$$Pr((\zeta \geq k+l) \,|\, \zeta \geq k+1) = \frac{P_{k+l-1}}{P_k}, \tag{3}$$

где условная вероятность рассчитана по формуле

$$Pr((\zeta \geq k+l) \,|\, \zeta \geq k+1) = \frac{Pr((\zeta \geq k+l) \bigcap (\zeta \geq k+1))}{Pr(\zeta \geq k+1)}$$

с учетом (1) и того, что

$$Pr((\zeta \geq k+l) \bigcap (\zeta \geq k+1)) = Pr(\zeta \geq k+l).$$

Обозначим $\zeta_l(k)$ безотказное количество срабатываний РЭА при срабатывании от $k+1$ до $k+l$. Тогда возможные значения величины $\zeta_l(k)$ будут находиться либо в ряду целых чисел (2), либо (при отсутствии отказа) будут равны выражению (3).

Вероятность того, что случайная величина $\zeta_l(k)$ примет некоторое значение из ряда целых чисел (2)

$$Pr(\zeta_l(k) = k+i) = \frac{Pr(\zeta = k+i)}{Pr(\zeta \geq k+1)},$$

где i – целое число, причем $1 \leq i \leq l-1$.

Откуда, используя (1), найдем

$$Pr(\zeta_l(k) = k+i) = \frac{P_{k+i-1} - P_{k+i}}{P_k}, \tag{4}$$

поскольку

$$Pr(\zeta = k+i) = Pr(\zeta \geq k+i) - Pr(\zeta \geq k+i+1).$$

Объединяя возможные значения случайной величины $\zeta_l(k)$ и им соответствующие вероятности принимаемых значений согласно (3) и (4), найдем следующий закон распределения безотказных срабатываний (табл. 1)

Таблица 1

$\zeta_l(k)$	$k+1$	$k+2$	...	$k+l-1$	$k+l$
Pr	$\frac{1}{P_k}(P_k - P_{k+1})$	$\frac{1}{P_k}(P_{k+1} - P_{k+2})$	...	$\frac{1}{P_k}(P_{k+l-2} - P_{k+l-1})$	$\frac{P_{k+l-1}}{P_k}$

Очевидно, что совокупность принимаемых значений образует полную группу событий, поскольку сумма вероятностей принимаемых значений равна единице.

Определим среднее количество безотказных срабатываний РЭА по следующей формуле:

$$\rho_l(k) = \left\langle \zeta_l(k) \right\rangle,$$

$\langle \bullet \rangle$ – символ математического ожидания величины, стоящей внутри угловых скобок.

Пусть P_j – вероятность того, что РЭА проработает безотказно в результате j срабатываний, тогда справедлива следующая формула [7]:

$$\rho_l(k) = k + \frac{1}{P_k} \sum_{j=k}^{k+l-1} P_j, \tag{5}$$

где $l \geq 2$ – целое число.

Интерполяционная оценка среднего количества безотказных срабатываний РЭА. Для дальнейшего изложения нам понадобится следующий показатель – интенсивность отказов РЭА при *j*-м срабатывании, – который определяется по формуле

$$\mu_j = \frac{Pr(\zeta = j)}{Pr(\zeta \geq j)}, \tag{6}$$

где $j = 1, 2, 3, \ldots$

Докажем следующее утверждение.

Лемма. Для вероятности безотказности РЭА при *n* срабатываниях справедлива следующая формула:

$$P_n = \prod_{j=1}^{n} (1 - \mu_j). \tag{7}$$

Доказательство. Из определения (6) имеем

$$1 - \mu_j = 1 - \frac{Pr(\zeta = j)}{Pr(\zeta \geq j)}. \tag{8}$$

Так как

$$\frac{Pr(\zeta = j)}{Pr(\zeta \geq j)} = \frac{Pr(\zeta \geq j) - Pr(\zeta \geq j+1)}{Pr(\zeta \geq j)},$$

то, используя (1), получим

$$\frac{Pr(\zeta = j)}{Pr(\zeta \geq j)} = 1 - \frac{P_j}{P_{j-1}}.$$

Учитывая полученное в соотношении (8), найдем

$$1 - \mu_j = \frac{P_j}{P_{j-1}},$$

откуда получим следующую рекуррентную формулу:

$$P_j = (1 - \mu_j) P_{j-1}, \tag{9}$$

где $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Полагая в соотношении (9) $j = 1$,

$$P_1 = 1 - \mu_1, \tag{10}$$

так как $P_0 = Pr(\zeta \geq 1) = 1$.

Далее, полагая в (9) $j = 2$, получим

$$P_2 = (1 - \mu_1) P_1,$$

откуда с учетом (10) найдем

$$P_2 = (1 - \mu_1)(1 - \mu_2).$$

Продолжая этот процесс для $j = n$ получим искомую формулу (7), что и требовалось доказать.

Известно, что механизмы развития отказов, связанные со старением, начинают наблюдаться сверх значительного числа срабатываний РЭА. Потому испытания, проводимые сверх значительно большего числа срабатываний адекватно отражают механизмы развития отказов. Однако при этом возникает вопрос: каким образом результаты этих оценок можно распространить для меньшего числа срабатываний? Другими словами, каким образом оценить среднее число безотказных срабатываний от $k+1$ до $k+l$, зная оценку для более позднего количества срабатываний, а именно: от $k+m+1$ до $k+m+l$, где $m \geq 1$ – целое число. Такие оценки называются интерполяционными.

Следующее утверждение дает доказательную основу интерполировать оценку среднего числа безотказных срабатываний от большего числа срабатываний к меньшему.

Теорема 1. Для РЭА, у которой интенсивность отказов при срабатываниях образует монотонно неубывающую последовательность, т. е.

$$\mu_n \le \mu_{n+1} \quad (n = 1,\ 2, ...), \tag{11}$$

справедлива следующая интерполяционная оценка среднего количества безотказных срабатываний:

$$\rho_l(k) \ge \rho_l(k+m) - m, \tag{12}$$

где $m \ge 1$ – целое число.

Доказательство. Согласно (5)

$$\rho_l(i+1) - \rho_l(i) = 1 + \left(\frac{P_{i+2}}{P_{i+1}} - \frac{P_{i+1}}{P_i}\right) + \left(\frac{P_{i+3}}{P_{i+1}} - \frac{P_{i+2}}{P_i}\right) + ... + \left(\frac{P_{i+l}}{P_{i+1}} - \frac{P_{i+l-1}}{P_i}\right),$$

где i – целое число.

Далее, используя формулу (7), найдем

$$\begin{aligned}\rho_l(i+1) - \rho_l(i) = 1 + (\mu_{i+1} - \mu_{i+2}) + (1 - \mu_{i+2})(\mu_{i+1} - \mu_{i+3}) + ... +\\ + (1 - \mu_{i+2})(1 - \mu_{i+3}) \cdots (1 - \mu_{i+l-1})(\mu_{i+1} - \mu_{i+l}).\end{aligned} \tag{13}$$

Из определения интенсивности отказов (6) следует, что

$$\mu_j \le 1 \quad (j = 1,\ 2,\ ...).$$

Используя эту оценку и условие (11), получим

$$1 - \mu_j \le 1; \ \ \mu_{i+1} - \mu_{i+2} \le 0; \ ...; \ \ \mu_{i+1} - \mu_{i+l} \le 0,$$

где $j = i+2, i+3,\ ...,\ i+l-1$.

Учитывая это в соотношении (13)

$$\rho_l(i+1) - \rho_l(i) \le 1. \tag{14}$$

Так как для любого целого числа m справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned}\rho_l(k+m) - \rho_l(k) = \left[\rho_l(k+m) - \rho_l(k+m-1)\right] +\\ + \left[\rho_l(k+m-1) - \rho_l(k+m-2)\right] + ... + \left[\rho_l(k+1) - \rho_l(k)\right],\end{aligned} \tag{15}$$

то применяя оценку (14) к разности, содержащейся внутри каждой квадратной скобки, найдем

$$\rho_l(k+m)-\rho_l(k)\le m,$$

откуда получим оценку (12).

Возникает вопрос – достижима ли оценка (12) в рассматриваемом классе РЭА, удовлетворяющих условию (11)?

Ответом на него будет следующее утверждение.

Теорема 2. В классе радиоэлектронных аппаратур, удовлетворяющих условию (11), существует такой закон распределения срабатываний РЭА до отказа, для которого выполняется соотношение

$$\rho_l(k)=\rho_l(k+m)-m. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть безотказное число срабатываний имеет следующее так называемое геометрическое распределение:

$$Pr(\zeta=i)=p^{i-1}q, \tag{17}$$

где p – вероятность безотказности РЭА при каждом срабатывании; $q=1-p$; $i=1, 2, \ldots$; $\left(0<p<1\right)$.

Согласно формуле (1)

$$P_j=\sum_{i=j+1}^{\infty}p^{i-1}q,$$

откуда, суммируя геометрическую прогрессию, получим

$$P_j=p^j, \tag{18}$$

где $j=0, 1, 2,\ldots$

Докажем, что рассматриваемая РЭА принадлежит к классу, удовлетворяющему условию (11).

Действительно, согласно (6) с учетом (17) и (18) имеем

$$\mu_{j+1}=\frac{p^jq}{pj}\equiv q,\ (j=0, 1, 2, \ldots).$$

Значит, исследуемая РЭА принадлежит к классу аппаратур, удовлетворяющих условию (11).

Перейдем к доказательству формулы (16).

Согласно (5) с учетом (18)

$$\rho_l(k)=k+\frac{1}{p^k}\sum_{j=k}^{k+l-1}p^j. \tag{19}$$

Так как

$$\sum_{j=k}^{k+l-1} p^j = \frac{p^k}{q}(1 - p^l),$$

то согласно (19) получим

$$\rho_l(k) = k + \frac{1}{q}(1 - p^l),$$

следовательно

$$\rho_l(k + m) = k + m + \frac{1}{q}(1 - p^l),$$

где $m \geq 1$ – целое число, откуда найдем

$$\rho_l(k + m) = \rho_l(k) + m,$$

что доказывает справедливость формулы (16) и, тем самым – теорему 2.

Экстраполяционная оценка среднего количества безотказных срабатываний РЭА. На начальном этапе эксплуатации интенсивность отказов при срабатываниях РЭА (как последовательность), как правило, монотонно убывает, поэтому теорема 1 в этом случае не применима. Однако в этом классе РЭА можно экстраполировать оценку среднего количества безотказных срабатываний от меньшего числа срабатываний к большему. Другими словами, зная оценку среднего количества безотказных срабатываний от $k+1$ до $k+l$, можно оценить этот показатель при срабатываниях РЭА от $k+m+1$ до $k+m+l$, т. е. экстраполировать оценку. Такую возможность подтверждает следующее утверждение.

Теорема 3. Для РЭА, у которой интенсивность отказов при срабатываниях образует монотонно невозрастающую последовательность, т. е.

$$\mu_n \geq \mu_{n+1} \ (n = 1, 2, ...), \tag{20}$$

справедлива следующая экстраполяционная оценка:

$$\rho_l(k + m) \geq \rho_l(k) + m, \tag{21}$$

где $m \geq 1$ – целое число.

Доказательство. Воспользуемся математическими выкладками, которые были сделаны при доказательстве теоремы 1.

Согласно (20)

$$\mu_{i+1}-\mu_{i+2}\geq 0;\ \mu_{i+1}-\mu_{i+3}\geq 0;\ ...;\ \mu_{i+1}-\mu_{i+l}\geq 0.$$

Учитывая это в формуле (13), получим

$$\rho_l(i+1)-\rho_l(i)\geq 1, \tag{22}$$

так как $1-\mu_j\geq 0$ $\left(j=i+2,\ i+3,\ ...,\ i+l-1\right)$.

Применяя оценку (22) к каждому выражению в квадратных скобках (15), число которых равно m, найдем

$$\rho_l(k+m)-\rho_l(k)\geq m.$$

Откуда получим искомую экстраполяционную оценку (21).

Отметим, что в теореме 2 утверждается, что оценка (21) достижима. Кроме того, в работе [4] для произвольного закона распределения безотказных срабатываний установлена следующая оценка:

$$\rho_l(k+m)\geq \rho_l(k), \tag{23}$$

где $m\geq 1$ – целое число. Сравнивая эту оценку с доказанной оценкой (21), приходим к выводу, что (21) уточняет (23) для более узкого класса РЭА, у которых интенсивность отказов образует монотонно убывающую последовательность.

В заключение приведем пример использования полученных оценок.

Пусть задан следующий равновероятный закон распределения безотказных срабатываний (табл. 2).

Таблица 2

$\zeta_l(k)$	$k+1$	$k+2$	...	$k+i$	...	$k+l$
P_r	$\frac{1}{l}$	$\frac{1}{l}$	...	$\frac{1}{l}$	...	$\frac{1}{l}$

Определим характер изменения интенсивности отказов, равный

$$\mu_{k+i}=\frac{Pr(\zeta_l(k)=k+i)}{Pr(\zeta_l(k)\geq k+i)},$$

где $i=1,2,\ ...,\ l$.

Так как $Pr(\zeta_l(k)\geq k+i)=\dfrac{l-i+1}{l}$, то $\mu_{k+i}=\dfrac{1}{l-i+1}$, $\left(i=1,\ 2,\ ...,\ l\right)$.

Видно, что интенсивность отказов (как последовательность) монотонно растет от значения $\frac{1}{l}$ до 1. Следовательно, можно воспользоваться интерполяционной оценкой (12), для чего определим среднее количество безотказных срабатываний.

Согласно (5)

$$\rho_l(k) = k + \frac{1}{P_k}\sum_{i=1}^{l} P_{k+i-1}. \tag{24}$$

Так как $P_{k+i-1} = Pr(\zeta_l(k) \geq k+i),$ то согласно равновероятным значениям, содержащимся во второй строке табл. 2, находим

$$P_{k+i-1} = \frac{l-i+1}{l} \ \ (i = 1,\ 2, ..., l).$$

Учитывая это в (24), получим

$$\rho_l(k) = k + \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}(l-i+1). \tag{25}$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{l}(l-i+1) = \frac{l(l+1)}{2},$ то согласно (25) имеем

$$\rho_l(k) = k + \frac{l+1}{2}. \tag{26}$$

Теперь рассмотрим новый закон распределения безотказных срабатываний, заданный табл. 3.

Таблица 3

$\eta(k+m)$	$k+m+1$	$k+m+2$	…	$k+m+l$
Pr	$\frac{1}{l}$	$\frac{1}{l}$	…	$\frac{1}{l}$

Для этого закона находим

$$\rho_l(k+m) = \langle \eta(k+m) \rangle = \frac{1}{l}(k+m+1+...+k+m+l),$$

откуда

$$\rho_l(k+m) = \frac{1}{l}\left((k+m)l + \frac{l(l+1)}{2} \right).$$

После упрощения правой части получим

$$\rho_l(k+m) = k + m + \frac{l+1}{2}.$$

Откуда

$$\rho_l(k+m) - m = k + \frac{l+1}{2},$$

что совпадает с формулой (26).

Этот пример показывает, что оценка (12) становится достижимой не только для геометрического закона, но и для равновероятного распределения безотказных срабатываний.

Выводы. Для радиоэлектронной аппаратуры, работающей при частых включениях в работу и выключениях из нее установлены интерполяционная и экстраполяционная оценки среднего количества безотказных срабатываний. Доказана достижимость установленных оценок.

Работа выполнена при поддержке ОАО «Радиотехнический институт имени академика А.Л. Минца».

ЛИТЕРАТУРА

[1] Садыхов Г.С., Савченко В.П. Зависимость показателей ресурса от характеристик его расходования. *Доклады РАН*, 1998, т. 361, № 2, с. 189–191.

[2] Klass P.J. Cycling Tests Increase Reliability Factor. *Aviation Week*, 1960, vol. 73, pp. 14–24.

[3] Садыхов Г.С., Савченко В.П. Оценка остаточного ресурса изделий с использованием физической модели аддитивного накопления повреждений. *Доклады РАН*, 1995, т. 343, № 4, с. 469–472.

[4] Жаднов В.В., Тихменев А.Н., Полесский С.Н., Юрков Н.К., ред. Современные подходы к исследованию безотказности электронных средств циклического применения. Надежность и качество. *Тр. международного симпозиума в 2-х т.* Пенза, Изд-во ПГУ, 2012, т. 1, с. 70–74.

[5] MIL – HDBK – 217F. Reliability prediction of electronic equipment. Section 13.

[6] Application note. Teledyne relays / 2010 Teledyne Technologies Incorporated. p. 2–3.

[7] Садыхов Г.С. Среднее количество безотказных срабатываний до критического отказа техногенно-опасного объекта: расчет, предельные и непараметрические оценки. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2013, № 1, с. 99–107.

[8] Sadykhov G.S., Nekrasova O.V. Calculation of Operating Safety Factors of a Subsystem with Parallel Load Elements as Part of a Technogenically Dangerous Object. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2011, vol. 40 (1), pp. 86–91.
[9] Sadykhov G.S. Average Number of Failure-Free Operations up to Critical Failure of a Technologically Dangerous Facility: Calculation, Limit and Non-Parametric Estimates. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42 (1), pp. 81–88.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Садыхов Г.С., Артюхов А.А., Казакова О.И. Экстраполяционные и интерполяционные оценки среднего количества безотказных срабатываний радиоэлектронной аппаратуры при частых включениях в работу и выключениях из нее. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/965.html

Садыхов Гулам Садыхович родился в 1940 г., окончил Азербайджанский ГПИ в 1962 г. Д-р техн. наук, профессор, главный научный сотрудник МГТУ им. Н.Э. Баумана, ведущий научный сотрудник ВЦ РАН РФ. Область научных интересов: математические методы теории надежности, разработка фундаментальных научных основ оценок и контроля безопасности техногенно-опасных объектов. e-mail: gsadykhov@gmail.com

Артюхов Анатолий Анатольевич родился в 1982 г., окончил Московский государственный институт электроники и математики (Технический университет) в 2006 г. Начальник сектора надежности ОАО РТИ. Область научных интересов: математические методы теории надежности, методы прогнозирования технического состояния радиолокационных комплексов. e-mail: tugra@gmx.com

Казакова Ольга Игоревна родилась в 1988 г., окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2012 г. Инженер-конструктор [4]ОАО «Ракетно-космическая корпорация „Энергия” имени С.П. Королева». Область научных интересов: исследования динамической и ресурсной прочности. e-mail: vorobushek11@gmail.com