УДК 536.24:519.6

Двухкритериальный подход к решению задачи идентификации теплофизических характеристик многослойной пластины

© А.Ю. Бушуев, В.Н. Тимофеев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен подход к решению обратной задачи определения теплофизических характеристик материалов многослойной пластины, использующий двухкритериальную интерпретацию метода регуляризации. Для построения множества эффективных решений применен метод исследования пространства параметров. Представлены результаты решения задачи для двухслойной пластины.

Ключевые слова: *идентификация, теплофизические характеристики, многослойная пластина, эффективные решения.*

Введение. Решение задачи одновременного определения нескольких коэффициентов уравнений параболического типа является актуальной проблемой [1], в частности, в связи с исследованием слоистых сред [2] и использованием многослойных конструкций. Традиционный подход к решению обратной задачи теплопроводности в слоистой среде основан на задаче минимизации сглаживающего функционала Тихонова [3–6].

В данной работе предлагается решение задачи идентификации теплофизических характеристик материалов многослойной пластины по результатам измерений температуры в заданных точках на основе двухкритериальной интерпретации метода регуляризации [7].

Математическая модель и методика решения задачи идентификации. Рассмотрим процесс нестационарного нагрева многослойной пластины бесконечной площади (рис. 1). На одной из поверхностей пластины осуществляется конвективный теплообмен с потоком воздуха, на другой – известна зависимость температуры от времени или она считается идеально теплоизолированной.

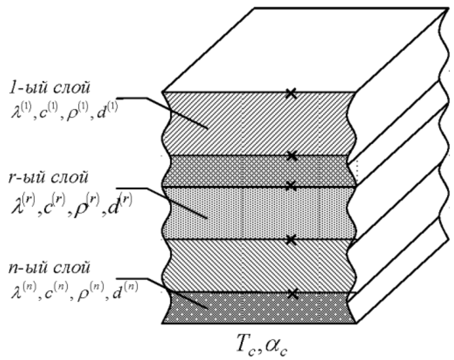

Рис. 1. Многослойная пластина бесконечной площади

Предполагаем, что процесс распространения тепла происходит только по толщине пластины. Кроме того, в ходе нагрева потеря массы пластины за счет разрушения ее материалов не происходит.

Тогда процесс распространения тепла описывается математической моделью в виде краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в одномерной постановке:

$$\begin{cases} c^{(r)}(T)\rho^{(r)}\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\lambda^{(r)}(T)\dfrac{\partial T}{\partial x}\right), \quad x\in l_r, \quad r=\overline{1,n};\\ T(x,0)=T_0(x);\\ T(0,t)=T_1(t) \quad \text{или} \quad \lambda(T)\dfrac{\partial T(0,t)}{\partial x}=0;\\ \lambda(T)\dfrac{\partial T(l,t)}{\partial x}=\alpha_c\left(T(l,t)-T_c(t)\right);\\ T(x,t)\big|_{x\in\Gamma^{(r)}\subset l_r}=T(x,t)\big|_{x\in\Gamma^{(r)}\subset l_{r+1}}, \quad \Gamma^{(r)}=l_r\bigcap l_{r+1}, \quad r=\overline{1,(n-1)};\\ T(x,t)\in\bar{Q}=\bar{X}\times[0,t_{\max}];\\ \bar{X}=[x\mid 0\le x\le l]=\bigcup_{r=1}^{n} l_r, \end{cases} \tag{1}$$

где n – число слоев (верхним индексом обозначается номер слоя); α_c – коэффициент конвективного теплообмена; T_c – температура окружающей среды; $T_0(x)$ – начальное распределение температуры; $T_0(x), T_1(t), T_c(t), \alpha$ известны.

Входными данными для обратной задачи теплопроводности служат измерения температуры в одной или нескольких точках исследуемого образца:

$$T(x_m,t_k)=u_m(t_k), \quad x_m\in[0,l], \quad 0<t_k\le t_{\max}, \quad m=\overline{1,M}, \quad k=\overline{1,K}. \tag{2}$$

Также известны функциональные зависимости теплофизических характеристик материала от температуры, т. е.

$$\lambda^{(r)}=f_1\left(\lambda_0^{(r)},\ldots,\lambda_{n_1^{(r)}}^{(r)},T\right), \quad c^{(r)}=f_2\left(c_0^{(r)},\ldots,c_{n_2^{(r)}}^{(r)},T\right), \quad r=\overline{1,n}, \tag{3}$$

где f_1, f_2 – известные функции; $\Big\{\lambda_0^{(1)},\ldots,\lambda_{n_1^{(1)}}^{(1)},\ldots,\lambda_0^{(n)},\ldots,\lambda_{n_1^{(n)}}^{(n)},c_0^{(1)},$ $\ldots,c_{n_2^{(1)}}^{(1)},\ldots,\ c_0^{(n)},\ldots,c_{n_2^{(n)}}^{(n)}\Big\}$ – некоторые параметры.

Тогда задача идентификации состоит в определении набора параметров

$$a=\left\{a_1,...,a_{N_a}\right\}=\left\{\lambda_0^{(r)},...,\lambda_{n_1^{(1)}}^{(r)},c_0^{(r)},...,c_{n_2^{(1)}}^{(r)},\quad r=\overline{1,n}\right\},$$

удовлетворяющих уравнениям (1–3).

Таким образом, математическая постановка для задачи идентификации теплофизических характеристик (ТФХ) имеет вид

$$\begin{cases} c^{(r)}\left(T\right)\rho^{(r)}\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\lambda^{(r)}\left(T\right)\dfrac{\partial T}{\partial x}\right), \quad x\in l_r, \quad r=\overline{1,n}; \\ T\left(x,0\right)=T_0\left(x\right); \\ T\left(0,t\right)=T_1\left(t\right) \quad \text{или} \quad \lambda\left(T\right)\dfrac{\partial T\left(0,t\right)}{\partial x}=0; \\ \lambda\left(T\right)\dfrac{\partial T\left(l,t\right)}{\partial x}=\alpha_c\left(T\left(l,t\right)-T_c\left(t\right)\right); \\ T\left(x,t\right)\Big|_{x\in\Gamma^{(r)}\subset l_r}=T\left(x,t\right)\Big|_{x\in\Gamma^{(r)}\subset l_{r+1}}, \quad \Gamma^{(r)}=l_r\cap l_{r+1}, \quad r=\overline{1,(n-1)}; \\ T\left(x,t\right)\in\bar{Q}=\bar{X}\times\left[0,t_{\max}\right]; \quad \bar{X}=\left[x\,|\,0\le x\le l\right]=\bigcup\limits_{r=1}^{n}l_r; \\ \lambda=f_1\left(a_1,...,a_{N_a},T\right), \quad c=f_2\left(a_1,...,a_{N_a},T\right); \\ T\left(x_m,t_k\right)=u_m\left(t_k\right), \quad x_m\in\left[0,l\right], \quad 0<t_k\le t_{\max}, \quad m=\overline{1,M}, \quad k=\overline{1,K}, \end{cases} \tag{4}$$

где n – число слоев (верхним индексом обозначается номер слоя); α_c – коэффициент конвективного теплообмена; T_c – температура окружающей среды; $T_0\left(x\right)$ – начальное распределение температуры; $u_m\left(t_k\right)$ – известные экспериментальные данные; x_m – точки наблюдения; $\left\{a_1,..., a_{N_a}\right\}$ – набор искомых параметров.

Поставленную задачу можно представить в виде операторного уравнения

$$A\left[a\right]=u\,, \tag{5}$$

где $a=\left\{a_1,...,a_{N_a}\right\}=\left\{\lambda_0^{(r)},...,\lambda_{n_1^{(1)}}^{(r)},c_0^{(r)},...,c_{n_2^{(1)}}^{(r)};\quad r=\overline{1,n},\right\}$ – искомый вектор параметров; A – нелинейный оператор, неявно заданный видом модели (4); $u=\left\{u_m\left(t_k\right), \quad m=\overline{1,M}, \quad k=\overline{1,K}\right\}$ – вектор измерений.

Согласно [3, 5], вариационный метод решения задачи (5) состоит в минимизации сглаживающего функционала

$$M^{\alpha}\left[a,u\right]=\rho\left(A\left[a\right],u\right)+\alpha\Omega\left[a\right]\rightarrow \min, \qquad (6)$$

где ρ – расстояние в пространстве u; $\alpha>0$ – параметр регуляризации, величина которого согласуется с погрешностью задания правой части δ; $\Omega\left[a\right]$ – стабилизирующий функционал, позволяющий выделить ограниченное решение.

Параметр регуляризации можно выбрать по невязке. В этом случае в качестве определяющего уравнения выступает следующее равенство:

$$\rho\left(A\left[a\right],u\right)=\delta, \qquad (7)$$

где δ – погрешность задания правой части (5).

Отметим, что невязка зависит от параметра α, т. е.

$$\varphi\left(\alpha\right)=\rho\left(A\left[a_{\alpha}\right],u\right).$$

Тогда нахождение параметра регуляризации заключается в соответствии с (7) в решении уравнения

$$\varphi\left(\alpha\right)=\delta. \qquad (8)$$

Поставленную задачу можно сформулировать в терминах многокритериальной оптимизации.

Согласно теореме [7], в которой утверждается, что решение задачи (6) при $\alpha>0$ принадлежит множеству эффективных точек двухкритериальной задачи,

$$\varPhi_1\left(a\right)=\rho\left(A\left(a\right),u\right)\rightarrow \min, \quad \varPhi_2\left(a\right)=\Omega\left(a\right)\rightarrow \min. \qquad (9)$$

Таким образом, решение задачи (9) позволяет сразу выделить множество, содержащее все возможные решения (6) для различных значений α. Для нахождения единственного решения необходимо фиксировать α, выбирая параметр регуляризации по невязке согласно (7). Тогда в новых обозначениях это условие примет вид

$$\varPhi_1\left(a\right)=\delta. \qquad (10)$$

Таким образом, решение поставленной задачи состоит из двух этапов: построения множества эффективных решений задачи (9) и выбора среди построенного множества решения задачи по формуле (10).

В настоящей работе для построения множества эффективных решений использован метод исследования пространства параметров [8]. Для решения нестационарной задачи теплопроводности использован метод конечных элементов [9].

Пример решения задачи идентификации. Проводится нестационарный нагрев двухслойной пластины, состоящей из материалов с неизвестными теплофизическими характеристиками. Схема эксперимента представлена на рис. 2.

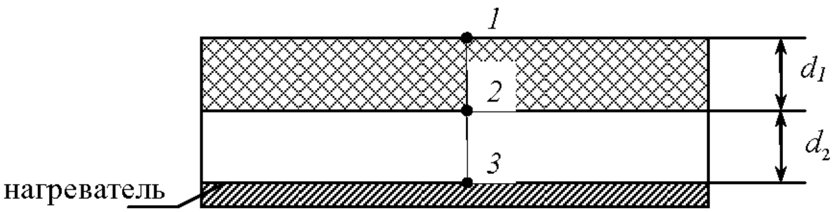

Рис. 2. Схема эксперимента

Измерения снимаются в трех точках (см. рис. 2) в течении 6 000 с с интервалом 1 с. Первая точка (*1*) находится на свободной поверхности первого материала, вторая (*2*) – на границе между материалами, третья (*3*) – между вторым материалом и нагревателем. Результаты измерений представлены на рис. 3.

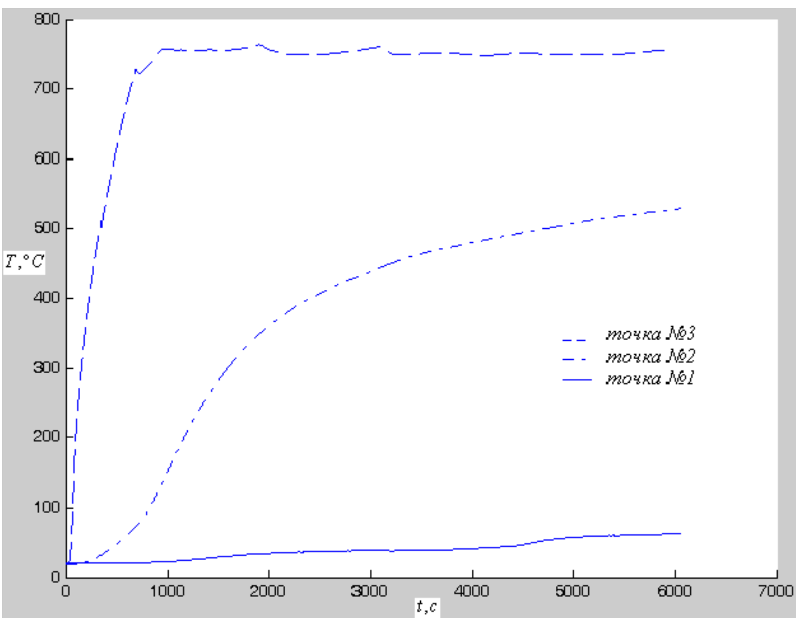

Рис. 3. Результаты измерений в точках наблюдения

Необходимо определить ТФХ материалов по полученным материалам наблюдений, если известны:

толщины материалов $d_1 = 50$ мм, $d_2 = 21$ мм;

плотности материалов $\rho_1 = 483$ кг/м^3, $\rho_2 = 61$ кг/м^3;

начальное распределение температуры $T_0(x) = 20$ °C.

В качестве граничных условий выберем измерения в точках *1* и *3*. Тогда модель теплообмена примет вид

$$\begin{cases} c^{(r)}(T)\rho^{(r)}\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\lambda^{(r)}(T)\dfrac{\partial T}{\partial x}\right), \quad x \in l_r, \quad r = \overline{1,2}; \\ T(x,0) = T_0(x); \\ T(0,t) = T_3(t); \\ T(l,t) = T_1(t); \\ T(x,t) \in \bar{Q} = \bar{X} \times [0, t_{\max} = 6000]; \\ \bar{X} = [x \mid 0 \le x \le l], \qquad l = d_1 + d_2. \end{cases}$$

Также выберем модели ТФХ материалов:

$$c^{(1)}(T) = c_0^{(1)} + c_1^{(1)}T, \quad \lambda^{(1)}(T) = \lambda_0^{(1)} + \lambda_1^{(1)}T,$$
$$c^{(2)}(T) = c_0^{(2)} + c_1^{(2)}T, \quad \lambda^{(2)}(T) = \lambda_0^{(2)}$$

и пространство параметров, приведенных в таблице

a	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$
$\lambda_0^{(1)}$	0	0,5
$\lambda_1^{(1)}$	0	0,001
$c_0^{(1)}$	500	600
$c_1^{(1)}$	0	1
$\lambda_0^{(2)}$	20	30
$c_0^{(2)}$	1200	1300
$c_1^{(2)}$	0	1

В результате решения задачи получим следующие характеристики:

$$c^{(1)}(T) = 554,6875 + 0,7656 \cdot T, \quad [c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}},$$

$$\lambda^{(1)}(T) = 0,0547 + 0,0001 \cdot T, \quad [\lambda] = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot {}^\circ\text{C}};$$

$$c^{(2)}(T) = 1241,8 + 0,8 \cdot T, \quad [c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}},$$

$$\lambda^{(2)}(T) = 20,1, \quad [\lambda] = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot {}^\circ\text{C}}.$$

Расчетная температура в точке наблюдения *2* и результаты измерений в этой же точке представлены на рис. 4. Наибольшая относительная ошибка отклонения расчетной температуры, полученной по модели от измеренной температуры, составляет не более 25 % при условии, что $\Phi_1 = 0,06$. При использовании предложенной методики требуются дополнительные исследования, в частности, связанные с оптимальным планированием измерений и выбором метода двухкритериальной оптимизации для повышения эффективности решения обратной задачи.

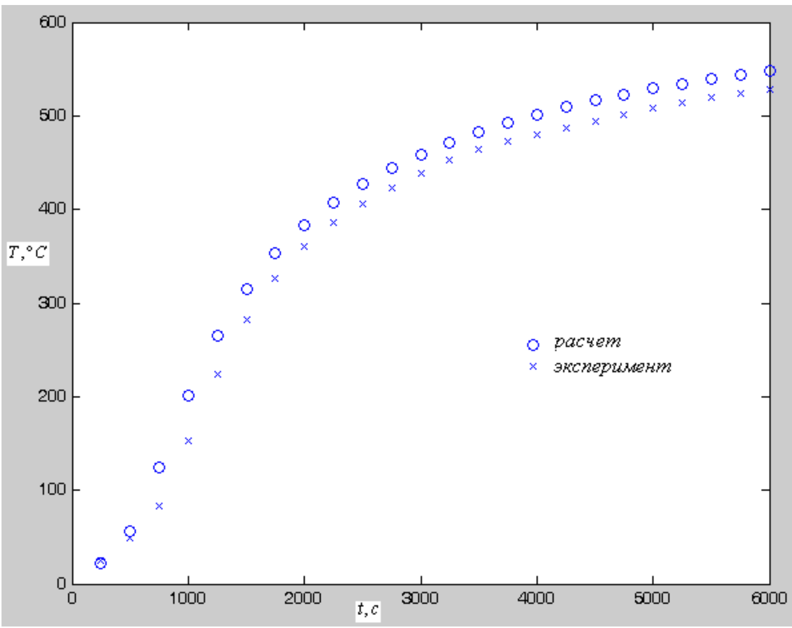

Рис. 4. Расчетные значения температуры и результаты измерений в точке наблюдения *2*

Выводы. Разработана методика решения задачи одновременного определения теплофизических характеристик материалов многослойных конструкций по известным экспериментальным данным, основанная на многокритериальном подходе, в котором стабилизирующий функционал выбирается в качестве второго независимого критерия.

Предложенный подход позволяет сократить вычислительные затраты, поскольку не требует поиска параметра регуляризации.

Методика может быть использована при решении аналогичных задач, например при моделировании теплозащитных свойств зданий и строительных материалов [10].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Полынцева С.В. Об одной задаче идентификации четырех коэффициентов многомерного параболического уравнения. *Междунар. конф. «Обратные и некорректные задачи математической физики»*. Новосибирск, 2012.

[2] Пененко А.В. Дискретно-аналитические схемы для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности слоистых сред градиентными методами. *Сиб. журн. вычисл. матем.*, 2012, т. 15, № 4, с. 393–408.

[3] Бойко О.А., Иткина Н.Б. Анализ решения обратной задачи теплопроводности в слоистой среде. *Междунар. конф. «Обратные и некорректные задачи математической физики»*. Новосибирск, 2007.

[4] Алифанов О.М., Вабищевич П.Н., Михайлов В.В. *Основы идентификации и проектирования тепловых процессов и систем*. Москва, Логос, 2001, 400 с.

[5] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. Москва, Наука, 1986, 288 с.

[6] Haber E., Ascher U.M., Oldenburg D. On optimization techniques for solving nonlinear inverse problems. *Inverse Problems*, 2000, vol. 16 (5), pp. 1263–1280.

[7] Соболь И.М. Многокритериальная интерпретация метода регуляризации некорректных задач. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1986, т. 26, № 6.

[8] Соболь И.М., Статников Р.Б. *Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями*. Москва, Дрофа, 2006, 176 с.

[9] Замула Г.Н., Иванов С.Н., Тесленко С.Ф. Применение метода конечного элемента для расчета нестационарных температур в сечении тонкостенных конструкций. *Ученые записки ЦАГИ*, 1982, т. XIII, № 1.

[10] Бойко О.А., Комиссарова И.В., Чащин О.Н. Математическое моделирование проектирования теплозащитных свойств зданий и строительных материалов. *Вестник НГПУ*, 2011, № 1, с. 57–68.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Бушуев А.Ю., Тимофеев В.Н. Двухкритериальный подход к решению задачи идентификации теплофизических характеристик многослойной пластины. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/963.html

Бушуев Александр Юрьевич – канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика». Автор более 20 научных работ. Область научных интересов: математическое моделирование в технике, методы оптимизации и принятия решений, численные методы. e-mail: A.Ju.Bushuev@ya.ru

Тимофеев Валерий Николаевич – канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика». Автор более 40 научных и методических работ. Область научных интересов: математическое моделирование, численные методы, механика жидкости и газа, аэродинамика, методы оптимизации. e-mail: v_n_1951@mail.ru