УДК 539.3

О резонансном режиме в нестационарной задаче о подвижной нагрузке для упругого полупространства

© Т.В. Облакова, Д.А. Приказчиков
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена нестационарная задача о движении сосредоточенной нагрузки вдоль поверхности упругого полупространства с постоянной скоростью, равной скорости волны Рэлея. Решение строится в ближнем поле, с использованием асимптотической модели для волны Рэлея. На первом этапе из анализа гиперболического уравнения решение находится на поверхности, затем из задачи Дирихле для эллиптического уравнения поле восстанавливается вглубь области.

Ключевые слова: *подвижная нагрузка, нестационарная, асимптотическая модель, волна Рэлея.*

Введение. Исследование динамических процессов в задачах о подвижной нагрузке является весьма актуальной проблемой науки и техники, имеющей многочисленные приложения, в том числе в вопросах развития высокоскоростного железнодорожного транспорта. Среди классических работ в этой области можно выделить [1], в которой использовалась модель балки на упругом основании, а также [2], где впервые была решена стационарная задача о движении импульсной нагрузки в случае упругой полуплоскости. Следует отметить, что решение стационарной задачи определено с точностью до постоянных, соответствующих перемещениям полуплоскости, как жесткого целого, которые могут быть определены только из соответствующей нестационарной постановки [3–5].

Известные точные решения задачи о подвижной нагрузке [6, 7] для упругой полуплоскости имеют достаточно нетривиальные интегральные представления, существенно затрудняющие дальнейший анализ. В связи с этим развиваются приближенные подходы к задаче [8]. Отметим также работы [9, 10], основанные на использовании приближенной эллиптически-гиперболической природы поверхностной волны [11].

В связи со значительными упрощениями аналитические подходы к задаче основаны на решении плоских задач. В то же время, как показано в [12], результаты исследования трехмерной постановки качественно отличаются от соответствующих аналогов для плоской задачи, что особенно важно при моделировании реальных физических задач, включая высокоскоростное движение железнодорожного транспорта. Настоящая работа расширяет подход, рассмотренный в [12], для случая нестационарной трехмерной задачи в рамках резонансного режима, когда скорость перемещения нагрузки вдоль поверхности совпадает со скоростью поверхностной волны Рэлея. В соответствии с формулировкой асимптотической модели [13] решение на поверхности описывается двумерным гиперболическим уравнением. Затем решение, затухающее вглубь полупространства, определяется как решение задачи Дирихле для псевдостатического эллиптического уравнения. Найденные приближенные решения выражены в терминах элементарных функций, что существенно упрощает их дальнейший анализ. Полученные результаты могут найти интересные приложения, в том числе при моделировании движения трещин [14].

Асимптотическая модель для волны Рэлея в случае упругого полупространства. Приведем краткое описание асимптотической модели для волны Рэлея [13]. Рассмотрим упругую полуплоскость $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \le z < \infty$, в случае нормальной нагрузки на поверхности

$$\sigma_{xz}\big|_{z=0} = 0, \qquad \sigma_{yz}\big|_{z=0} = 0, \qquad \sigma_{zz}\big|_{z=0} = P(x, y, t). \tag{1}$$

Описываемая приближенная формулировка для волны Рэлея включает в себя псевдостатические эллиптические уравнения, учитывающие условия затухания,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k_1^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) = 0, \qquad \frac{\partial^2\psi_m}{\partial z^2} + k_2^2\left(\frac{\partial^2\psi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_m}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{2}$$

где φ и ψ_m, $(m = 1, 2)$ – упругие потенциалы, постоянные $k_m = \left(1 - \dfrac{c_R^2}{c_m^2}\right)^{1/2}$, c_1, c_2 и c_R – скорости распространения продольной, поперечной волн и волны Рэлея, соответственно, а также уравнение мембранного типа на поверхности $z = 0$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1 + k_2^2}{2\mu B}P, \tag{3}$$

где μ – сдвиговой модуль Ламэ; $B = \dfrac{k_1}{k_2}\left(1 - k_2^2\right) + \dfrac{k_2}{k_1}\left(1 - k_1^2\right) - 1 + k_2^4$ – упругая постоянная [11] и соотношения связи между потенциалами при $z = 0$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = \frac{2}{1 + k_2^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\psi_2}{\partial z} = \frac{2}{1 + k_2^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{1 + k_2^2}{2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right). \tag{4}$$

При этом поле перемещений выражается в терминах введенных потенциалов [15] как

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial z}, \quad u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y}. \tag{5}$$

Нестационарная задача о подвижной нагрузке для упругого полупространства. Рассмотрим задачу о движении с постоянной скоростью импульсной подвижной нагрузки по поверхности $z = 0$. Ограничимся здесь исследованием резонансного случая, когда скорость движения нагрузки совпадает со скоростью волны Рэлея. В случае движения вдоль оси Ox функция $P(x, y, t)$ имеет вид (рис. 1)

$$P(x, y, t) = P_0\delta(x - c_R t)\delta(y). \tag{6}$$

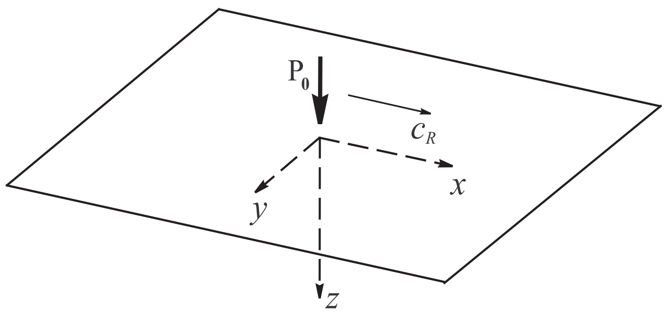

Рис. 1. Схема постановки задачи

Следовательно, уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1+k_2^2}{2\mu B}P_0\delta(x - c_R t)\delta(y). \tag{7}$$

Решение уравнения (7) по аналогии с решением в [3] может быть записано через свертку с соответствующим фундаментальным решением:

$$\varphi\left(x, y, 0, t\right) = AP_0\int_0^t \frac{H\left[c_R\left(t-\tau\right) - \sqrt{\left(x - c_R t\right)^2 + y^2}\right]}{\sqrt{c_R^2\left(t-\tau\right)^2 - \left(x - c_R t\right)^2 - y^2}}\, d\tau, \tag{8}$$

где $A = -\dfrac{c_R\left(1+k_2^2\right)}{4\pi\mu B}$.

Переходя в подвижную систему координат (ξ, y), получим

$$\varphi(\xi, y, 0, t) = AP_0 \int_0^t \frac{H\left[c_R s - \sqrt{(\xi + c_R s)^2 + y^2}\right]}{\sqrt{-2sc_R\xi - y^2 - \xi^2}} ds, \tag{9}$$

где $\xi = x - c_R t; \quad s = t - \tau.$

Интегрируя (9) при условии $\xi < 0, \quad t \geq -\dfrac{\xi^2 + y^2}{2c_R\xi}$, найдем значение потенциала φ на поверхности $z = 0$:

$$\varphi_0(\xi, y, t) = \varphi(\xi, y, 0, t) = -\frac{AP_0}{\xi c_R}\sqrt{-\xi^2 - 2c_R t\xi - y^2}. \tag{10}$$

Найденное решение представляет интерес в первую очередь для исследования развития резонансных явлений во времени. При $t \to \infty$

$$\varphi_0(\xi, y, t) \sim C\sqrt{t}, \qquad C = -\frac{AP_0}{c_R}\sqrt{-\frac{2c_R}{\xi}}, \tag{11}$$

т. е. значение потенциала растет по времени как $O\left(\sqrt{t}\right)$, что отличает полученное трехмерное решение от соответствующего решения плоской задачи, характеризующейся линейным ростом.

Используя значение потенциала на поверхности $z = 0$, восстановим его значение вглубь полупространства. По аналогии с [12] можно рассматривать параметрическую зависимость от переменной y, и таким образом, рассматривать задачу Дирихле вида

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k_1^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial \xi^2} = 0, \qquad \varphi\big|_{z=0} = \varphi_0. \tag{12}$$

Применяя формулу Пуассона, получим

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, y, z, t) &= \frac{1}{\pi}\int_{s_1}^{s_2} \frac{k_1 z\varphi_0(r, y, t)}{(r - \xi)^2 + k_1^2 z^2} dr = \\ &= -\frac{AP_0 k_1 z}{\pi c_R}\int_{s_1}^{s_2} \frac{\sqrt{-r^2 - 2c_R tr - y^2}}{r\left[(r - \xi)^2 + k_1^2 z^2\right]} dr, \end{aligned} \tag{13}$$

где $s_m = -c_R t + (-1)^m\sqrt{c_R^2 t^2 - y^2}, \quad (m = 1, 2)$.

Интеграл (13) может быть записан в терминах элементарных функций:

$$\varphi(\xi,y,z,t)=-\frac{AP_0k_1z}{\pi c_R}\left[\frac{g(0)}{\xi^2+k_1^2z^2}-\frac{g(\xi-ik_1z)}{2ik_1z(\xi-ik_1z)}+\frac{g(\xi+ik_1z)}{2ik_1z(\xi+ik_1z)}\right], \quad (14)$$

где $g(s)=-\pi(s+c_Rt)+\sqrt{c_R^2t^2-y^2-(s+c_Rt)^2}\times$

$$\times\tanh^{-1}\frac{r(s+c_Rt)+y^2+sc_Rt}{\sqrt{c_R^2t^2-y^2-(s+c_Rt)^2}\sqrt{c_R^2t^2-y^2-(r+c_Rt)^2}}\Bigg|_{s_1}^{s_2}.$$

Потенциалы ψ_m, $(m=1,2)$ могут быть восстановлены с использованием соотношений (4). Затем, используя (5), можно найти выражения для компонент перемещения. Рассмотрим подробно вертикальное перемещение u_z. Из (4) и (5) получим

$$u_z=\frac{\partial\varphi(t,x,y,k_1z)}{\partial z}-\frac{2}{1+k_2^2}\frac{\partial\varphi(t,x,y,k_2z)}{\partial z}, \quad (15)$$

где функция $\varphi(t,x,y,k_1z)$ определена в (14).

На графиках (рис. 2–4) проиллюстрированы полученные результаты. При их построении были использованы следующие значения упругих параметров материала: $c_1=5970$ м/с, $c_2=3763$ м/с, $c_R=3409$ м/с, что соответствует SiO_2 [16].

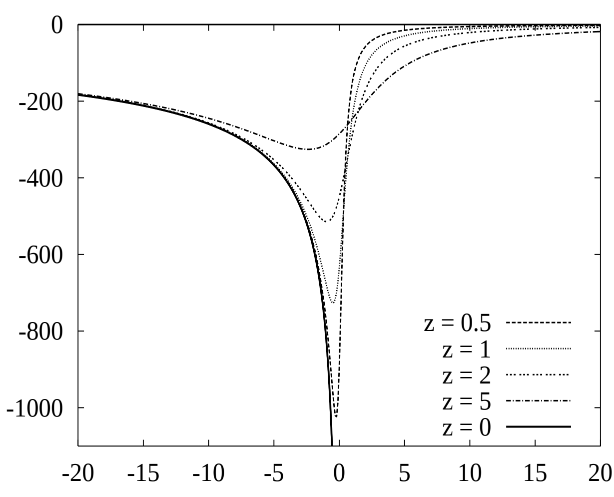

Рис. 2. Зависимость потенциала $\tilde{\varphi}$ от подвижной координаты ξ $(y=1,\ t=10)$

На рис. 2 показана зависимость масштабированного потенциала $\tilde{\varphi} = -\frac{\pi c_R}{AP_0}\varphi(\xi, y, z, t)$ от подвижной координаты ξ для нескольких фиксированных значений глубины z. Кривые на рис. 2 демонстрируют затухание по мере удаления от поверхности, а также резонанс под нагрузкой при $z = 0$. Очевидно, что на поверхности при $z = 0$ область возмущения находится строго за нагрузкой $(\xi < 0)$, что не наблюдалось в соответствующей плоской задаче. При удалении от поверхности зона динамических возмущений начинает распространяться перед движущейся нагрузкой.

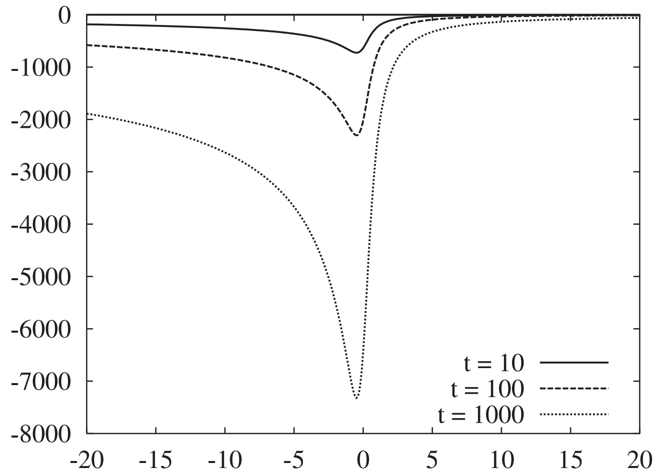

Рис. 3. Рост потенциала $\tilde{\varphi}$ по времени в зависимости от подвижной координаты $(y = 1,\ z = 1)$

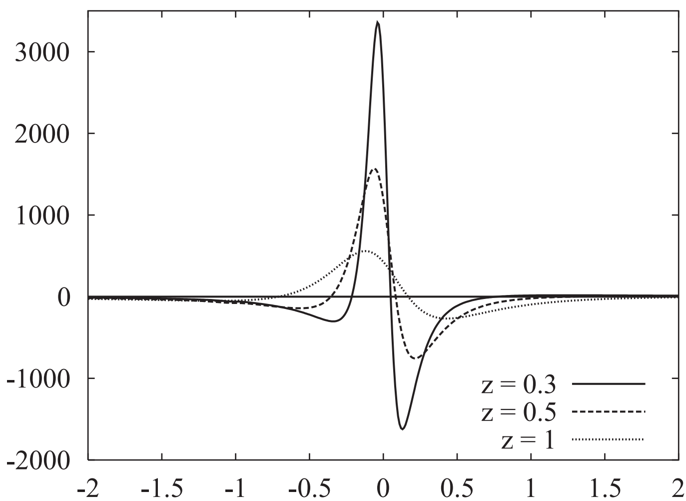

Рис. 4. Затухание перемещения $\tilde{u}_z$ в зависимости от подвижной координаты $\xi(y = 1,\ t = 10)$

Интерес представляет исследование решения при больших временах. Понятно, что в данной задаче установление стационарного режима невозможно. Иллюстрации роста по времени потенциала $\tilde{\varphi}$ в зависимости от подвижной координаты ξ приведены на рис. 3.

В завершение проиллюстрируем затухание масштабированного вертикального перемещения $\tilde{u}_z = -\frac{\pi c_R}{A P_0} u_z\left(\xi, y, z, t\right)$ в зависимости от подвижной координаты ξ при удалении от поверхности (см. рис. 4).

Заключение. На основе приближений трехмерных динамических уравнений теории упругости решена нестационарная задача о подвижной нагрузке для упругого полупространства. Использование асимптотической модели для волны Рэлея позволило получить выражения для компонент ближнего поля напряженно-деформированного состояния в виде элементарных функций. Полученные результаты могут быть распространены на дорезонансный и сверхрезонансный режимы подвижной нагрузки, а также на случай движения распределенной нагрузки [10, 17].

Исследования Приказчикова Д.А. выполнены при поддержке гранта Президента РФ МК-3150.2012.8. Авторы выражают благодарность д-ру физ.-мат. наук, профессору Ю.Д. Каплунову за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Timoshenko S. Method of Analysis of Statical and Dynamical Stresses in Rail. *Proc. Second Int. Congress of Appl. Mech.*, Zurich, 1926, Zurich, Orell Fussli Verlag, 1927, pp. 1–12.

[2] Cole J., Huth J. Stresses Produced in a Half Plane by Moving Loads. *ASME J. Appl. Mech*, 1958, vol. 25, pp. 433–436.

[3] Каплунов Ю.Д. *Нестационарная динамика упругой полуплоскости при действии подвижной нагрузки*. Институт проблем механики РАН. Препринт. 1986, № 277, 53 с.

[4] Ang D.D. Transient Motion of a Line Load on the Surface of an Elastic Half-space. *Quart. Appl. Math*., 18 (1960) 251–256.

[5] Gakenheimer D.C., Miklowitz J., Transient excitation of an elastic half space by a point load traveling on the surface. *J. of Appl. Mech*. 36 (1969) 505–515.

[6] Freund L.B. The Response of an Elastic Solid to Nonuniformly Moving Surface Loads. *J. of Appl. Mech.*, 1973, vol. 40, pp. 699–704.

[7] Georgiadis H.G., Lykotrafitis G.A. Method Based on the Radon Transform for Three-Dimensional Elastodynamic Problems of Moving Loads. *J. Elasticity*, 2001, vol. 65, pp. 87–129.

[8] De Hoop A.T. The Moving-Load Problem in Soil Dynamics – the Vertical Displacement Approximation. *Wave Motion*, 2002, vol. 36, pp. 335–346.

[9] Демченко А.Т., Каплунов Ю.Д., Алейников И.А., Приказчиков Д.А. Применение асимптотической модели для волны Рэлея к задаче о подвижной нагрузке. *Наука и техника транспорта*, 2005, № 3, с. 82–85.

[10] Kaplunov J., Nolde E., Prikazchikov D.A. A Revisit to the Moving Load Problem Using an Asymptotic Model for the Rayleigh Wave. *Wave Motion*, 2010, vol. 47, pp. 440–451.

[11] Kaplunov J., Zakharov A., Prikazchikov D.A. Explicit Models for Elastic and Piezoelastic Surface Waves. *IMA J. of Appl. Math.*, 2006, vol. 71, pp. 768–782.

[12] Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Erbas B., Sahin O. On a 3D Moving Load Problem for an Elastic Half-Space. *Wave Motion*, 2013.

[13] Dai H.-H., Kaplunov J., Prikazchikov D.A. A Long Wave Model for the Surface Elastic Wave in a Coated Half Space. *Proceedings of the Royal Society London*. *Ser. A*, 2010, vol. 466, pp. 3097–3116.

[14] Bratov V., Petrov Y. Application of Incubation Time Approach to Simulate Dynamic Crack Propagation. *International Journal of Fracture*, 2007, vol. 146, pp. 53–60.

[15] Приказчиков Д.А., Коваленко Е. В. Выбор потенциалов в трехмерных задачах динамической теории упругости. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*, *сер. Естественные науки*, вып. математическое моделирование, 2012, т. 2, с. 132–137.

[16] Royer D., Dieulesaint E. *Elastic Waves in Solids II*. Springer, Berlin, 1996.

[17] Гольдштейн Р.В. Волны Рэлея и резонансные явления в упругих телах. ПММ 29(3) (1965), с. 516–525.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Облакова Т.В., Приказчиков Д.А. О резонансном режиме в нестационарной задаче о подвижной нагрузке для упругого полупространства. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/959.html

Облакова Татьяна Васильевна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 20 научных статей и учебно-методических пособий. Область научных интересов: теория вероятностей и математическая статистика, математическое моделирование.

Приказчиков Данила Александрович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 35 научных работ и 7 учебно-методических пособий. Область научных интересов: теория упругости, распространение волн, асимптотические методы. e-mail: prikazchikovda@yandex.ru