

## Фазовые скорости бегущих волн в цилиндрической оболочке при конечной и бесконечной жесткости поперечного сдвига

© В.О. Каледин<sup>1</sup>, Е.А. Седова<sup>1</sup>, Ю.В. Шпакова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кемеровский государственный университет Новокузнецкий институт (филиал),  
г. Кемерово, 650043, Россия

<sup>2</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Получено аналитическое решение задачи расчета фазовых скоростей бегущих волн на поверхности цилиндрической оболочки, одна из кромок которой закреплена, а на вторую действует возмущающая погонная сила. Проанализировано влияние выбора кинематической гипотезы на результаты расчета фазовых скоростей.*

**Ключевые слова:** оболочка, фазовая скорость, продольные волны, волны изгиба, критическая частота.

**Введение.** В течение последних десятилетий механическое поведение тонких анизотропных оболочек является объектом многочисленных исследований, актуальность которых определяется применением пластин и оболочек в несущих элементах ответственных силовых конструкций авиационной и ракетной техники, в судостроении, энергетическом и химическом машиностроении и т. д.

Распространение волн в элементах конструкций типа оболочек и пластин начали рассматривать уже в XIX в. В 1889 г. Рэлей исследовал распространение волн в пластине [12], позже для нее были определены фазовые и групповые скорости. История этого вопроса и соответствующий обзор работ до 1965 г. приведены в [1, 8].

Для цилиндрических оболочек характеристическое уравнение по точной трехмерной теории при осесимметричных деформациях впервые было дано Дж. Гошем в 1923 г. [11]. В 1960 г. Микловиц опубликовал обширный перечень трудов зарубежных авторов о распространении упругих волн в стержнях, плитах, цилиндрических оболочках, полупространстве и неограниченном пространстве [13]. Исследование колебаний оболочек с заполнителем и анализ распространения свободных волн в системе оболочка – инерциальная среда началось значительно позже. Так в 1979 г. А.С. Вольмир в монографии «Оболочки в потоке жидкости и газа: Задача гидроупругости» исследует поведение деформируемых оболочек с протекающей жидкостью. Основное внимание уделено переходным процессам, связанным с резкими изменениями параметров состояния жидкости в том или ином сечении оболочки. Речь идет о цилиндрических оболочках конечной и бесконечной длины [4].

В 1992 г. А.Г. Горшков и В.И. Пожухов в монографии «Стационарные задачи динамики многослойных конструкций» дают уточ-

ненную постановку задач о распространении осесимметричных и неосесимметричных свободных волн в трехслойной цилиндрической оболочке бесконечной длины [5].

В 2000 г. в диссертации В.Г. Григорьева были рассмотрены колебания конструкции, составленной из оболочек вращения (цилиндрические, конические и сферические оболочки), полость которых заполнена жидкостью [7].

В 2004 г. в статье С.М. Белоносова рассмотрена уточненная постановка задачи о пульсирующем течении ньютоновской жидкости в упругой трубке с учетом сдвиговой податливости оболочки и раздельной постановкой условий на внешней и внутренней поверхности [2].

В диссертационной работе Шпаковой Ю.В. рассмотрены волновые процессы, возникающие в цилиндрической оболочке конечной длины при обтекании потоком жидкости [10].

В статье С.А. Бочкарева и В.П. Матвеевко исследовано динамическое поведение нагруженных оболочек вращения, содержащих неподвижную или текущую сжимаемую жидкость. Рассмотрена цилиндрическая оболочка [3].

Однако до настоящего времени остаются неисследованными волновые процессы, протекающие в оболочке положительной гауссовой кривизны при обтекании ее потоком жидкости.

Некоторые известные работы содержат утверждение о невозможности применения гипотез Кирхгофа – Лява к описанию волновых процессов даже в тонких оболочках. В данной работе получено аналитическое решение задачи расчета фазовых скоростей бегущих волн на поверхности цилиндрической оболочки, одна из кромок которой закреплена, на вторую действует возмущающая погонная сила, выявлено влияние выбора кинематической гипотезы на результаты расчета фазовых скоростей.

**Исходные уравнения и граничные условия.** Рассмотрим движущуюся цилиндрическую оболочку. Найдем аналитическое решение в следующих допущениях:

все коэффициенты Пуассона ортотропного материала равны нулю; главные оси анизотропии совпадают с линиями кривизны.

В качестве дополнительного предположения будем считать равными нулю коэффициенты взаимного влияния погонных сил и изгибающих моментов, что справедливо для достаточно тонких оболочек.

В соответствии со сделанными допущениями

$$\begin{cases} r = \text{const}, & R_s = \infty, \\ v_{12} = 0 \Rightarrow C_{12} = D_{12} = 0, \\ K_{ij} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Уравнения движения ортотропной оболочки вращения в криволинейной ортогональной лагранжевой системе координат  $(s, \theta, n)$  получены в работе [9]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial s}(rN_s) + \frac{\partial P}{\partial \theta} - \cos \varphi N_\theta + \frac{1}{R_s} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{r}{R_s} Q_s + r q_s + r \int_h \rho dn \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s}(rP) + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \cos \varphi P + \frac{\partial}{\partial s}(\sin \varphi H) + \frac{\cos \varphi}{R_s} H + \sin \varphi Q_\theta + \\ + r q_\theta + r \int_h \rho dn \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s}(rQ_s) + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{r}{R_s} N_s - \sin \varphi N_\theta + r q_n + r \int_h \rho dn \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s}(rM_s) + \frac{\partial H}{\partial \theta} - \cos \varphi M_\theta - r Q_s + r m_s + r \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s}(rH) + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - \cos \varphi H - r Q_\theta + r m_\theta + r \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} = 0, \end{array} \right.$$

где  $u(s, \theta)$ ,  $v(s, \theta)$ ,  $w(s, \theta)$  – перемещения вдоль дуги, окружности и нормали соответственно;  $\psi_s(s, \theta)$ ,  $\psi_\theta(s, \theta)$  – углы поворота нормали;  $R_s$ ,  $R_\theta$  – радиусы главных кривизн;  $t$  – время;  $h$  – толщина оболочки;  $\rho$  – плотность материала;  $\varphi$  – угол, образованный нормалью к координатной поверхности и осью вращения;  $q_s$ ,  $q_\theta$ ,  $q_n$  – компоненты поверхностной распределенной нагрузки;  $m_s$ ,  $m_\theta$  – поверхностные распределенные моменты.

$$r = R_\theta \sin \varphi; \quad P = N_{s\theta} - \frac{M_{s\theta}}{R_\theta} = N_{s\theta} - \frac{M_{\theta s}}{R_s}; \quad H = M_{s\theta} = M_{\theta s};$$

$$N_s = C_{11}\varepsilon_s + C_{12}\varepsilon_\theta + C_{16}\varepsilon_{s\theta} + K_{11}\kappa_s + K_{12}\kappa_\theta + K_{16}2\kappa_{s\theta} + \gamma_s l_{11} + \gamma_\theta l_{21};$$

$$N_\theta = C_{12}\varepsilon_s + C_{22}\varepsilon_\theta + K_{12}\kappa_s + K_{22}\kappa_\theta + K_{26}2\kappa_{s\theta} + \gamma_s l_{12} + \gamma_\theta l_{22};$$

$$N_{s\theta} = C_{16}\varepsilon_\theta + C_{26}\varepsilon_s + C_{66}\varepsilon_{s\theta} + K_{16}\kappa_\theta + K_{26}\kappa_s + K_{66}2\kappa_{\theta s} +$$

$$+ \frac{1}{R_\theta}(K_{16}\varepsilon_\theta + K_{26}\varepsilon_s + K_{66}\varepsilon_{\theta s} + D_{16}\kappa_\theta + D_{26}\kappa_s + D_{66}2\kappa_{s\theta}) + \gamma_s l_{13} + \gamma_\theta l_{23};$$

$$N_{\theta s} = C_{16}\varepsilon_{\theta} + C_{26}\varepsilon_s + C_{66}\varepsilon_{\theta s} + K_{16}\kappa_{\theta} + K_{26}\kappa_s + K_{66}2\kappa_{\theta s} + \\ + \frac{1}{R_s}(K_{16}\varepsilon_{\theta} + K_{26}\varepsilon_s + K_{66}\varepsilon_{\theta s} + D_{16}\kappa_{\theta} + D_{26}\kappa_s + D_{66}2\kappa_{\theta s}) + \gamma_s l_{13} + \gamma_{\theta} l_{23};$$

$$M_s = K_{11}\varepsilon_s + K_{12}\varepsilon_{\theta} + K_{16}\varepsilon_{s\theta} + D_{11}\kappa_s + D_{12}\kappa_{\theta} + D_{16}2\kappa_{s\theta} + \gamma_s l_{14} + \gamma_{\theta} l_{24};$$

$$M_{\theta} = K_{12}\varepsilon_s + K_{22}\varepsilon_{\theta} + K_{26}\varepsilon_{s\theta} + D_{12}\kappa_s + D_{22}\kappa_{\theta} + D_{26}2\kappa_{s\theta} + \gamma_s l_{15} + \gamma_{\theta} l_{25};$$

$$M_{s\theta} = M_{\theta s} = K_{16}\varepsilon_s + K_{26}\varepsilon_{\theta} + K_{66}\varepsilon_{s\theta} + D_{16}\kappa_s + \\ + D_{26}\kappa_{\theta} + D_{66}2\kappa_{s\theta} + \gamma_s l_{16} + \gamma_{\theta} l_{26};$$

$$Q_s = \Phi_{11}\gamma_s + \Phi_{12}\gamma_{\theta} + l_{11}\varepsilon_s + l_{12}\varepsilon_{\theta} + l_{13}\varepsilon_{s\theta} + l_{14}\kappa_s + l_{15}\kappa_{\theta} + l_{16}\kappa_{s\theta};$$

$$Q_{\theta} = \Phi_{21}\gamma_s + \Phi_{22}\gamma_{\theta} + l_{21}\varepsilon_s + l_{22}\varepsilon_{\theta} + l_{23}\varepsilon_{s\theta} + l_{24}\kappa_s + l_{25}\kappa_{\theta} + l_{26}\kappa_{s\theta}.$$

Положим равными нулю слагаемые, содержащие производные по окружной координате, и слагаемые, равные нулю для цилиндрической оболочки. Таким образом, получим следующие уравнения движения в усилиях:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s}(rN_s) - r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s}(rQ_s) - N_{\theta} - r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s}(rM_s) - rQ_s + r\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Переход от уравнений в усилиях к уравнениям в перемещениях при использовании разных кинематических гипотез приводит к отличающимся результатам. В известных работах [2, 5] содержится утверждение, что при анализе волновых процессов гипотеза Кирхгофа – Лява приводит к неудовлетворительным результатам даже в случае тонких оболочек. В связи с этим целесообразно рассмотреть решение поставленной задачи отдельно для гипотезы Кирхгофа – Лява и для гипотезы Тимошенко, а также проанализировать влияние выбора гипотезы на получаемые результаты моделирования.

При использовании гипотезы Кирхгофа – Лява тензор деформаций срединной поверхности содержит шесть компонент:

$$\varepsilon = [\varepsilon_s(s, \theta) \quad \varepsilon_{\theta}(s, \theta) \quad \varepsilon_{s\theta}(s, \theta) \quad \kappa_s(s, \theta) \quad \kappa_{\theta}(s, \theta) \quad \kappa_{s\theta}(s, \theta)]^T,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_s(s, \theta) &= \frac{\partial u(s, \theta)}{\partial s} + \frac{w(s, \theta)}{R_s}, \\ \varepsilon_\theta(s, \theta) &= \frac{\cos \varphi}{r} u(s, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial v(s, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{r} w(s, \theta), \\ \varepsilon_{s\theta}(s, \theta) &= \frac{1}{r} \frac{\partial u(s, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v(s, \theta)}{\partial s} - \frac{\cos \varphi}{r} v(s, \theta), \\ \kappa_s(s, \theta) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( -\frac{\partial w(s, \theta)}{\partial s} + \frac{u(s, \theta)}{R_s} \right), \\ \kappa_\theta(s, \theta) &= \frac{\cos \varphi}{r} \left( -\frac{\partial w(s, \theta)}{\partial s} + \frac{u(s, \theta)}{R_s} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \sin \varphi \frac{\partial v(s, \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w(s, \theta)}{\partial \theta^2} \right), \\ 2\kappa_{s\theta}(s, \theta) &= \frac{\sin \varphi}{r} \left( \frac{\partial v(s, \theta)}{\partial s} - \frac{\cos \varphi}{r} v(s, \theta) \right) + \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u(s, \theta)}{R_s} + \frac{w(s, \theta) \cos \varphi}{r} - \frac{\partial w(s, \theta)}{\partial s} \right).\end{aligned}\tag{4}$$

Тогда в системе уравнений движения (2) первое уравнение примет вид

$$r \frac{\partial N_s}{\partial s} - r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,\tag{5}$$

второе и пятое уравнения выполняются тождественно; остальные преобразуем, выразив из четвертого  $Q_s$  и подставив в третье:

$$\frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} r - N_\theta - r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.\tag{6}$$

Подставим в полученные уравнения выражения для продольной погонной силы  $N_s = C_{11} \frac{\partial u}{\partial s}$ , поперечной погонной силы  $N_\theta = C_{22} \frac{w}{r}$  и продольного момента  $M_s = D_{11} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)$  с учетом принятых допущений и кинематической гипотезы. Получим систему уравнений движения в перемещениях в случае гипотезы Кирхгофа – Лява:

$$\begin{cases} rC_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ rD_{11} \left( -\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} \right) - C_{22} \frac{w}{r} - r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

При использовании гипотезы Тимошенко деформации координатной поверхности выразим через линейные перемещения координатной поверхности:  $u(s, \theta)$ ,  $v(s, \theta)$ ,  $w(s, \theta)$  – вдоль дуги, окружности и нормали соответственно – и углы поворота нормали  $\psi_s(s, \theta)$  и  $\psi_\theta(s, \theta)$  [6].

Тогда система уравнений движения оболочки в перемещениях примет следующий вид:

$$\begin{cases} rC_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ rK_1 \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + rK_1 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{C_{22}}{r} w - r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ rD_{11} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s^2} - rK_1 \psi_s + rK_1 \frac{\partial w}{\partial s} + r\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Отличие системы (7) от (8) состоит в том, что (8) содержит три уравнения вместо двух в связи с большим числом степеней свободы.

**Расчет фазовых скоростей.** Первое уравнение в обеих системах, описывающее продольные колебания, одинаково и после сокращения на  $r$  и деления на  $C_{11}$  представляет собой хорошо известное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\rho h}{C_{11}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (9)$$

описывающее продольную бегущую волну

$$u(s, t) = J(s) \cos(\omega_1 t + \varphi_u) \quad (10)$$

с фазовой скоростью, равной скорости звука в материале оболочки:

$$a_{\text{фр}} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho h}}, \text{ где } C_{11} = E_1 h. \quad (11)$$

Волна изгиба описывается решением системы (7) или (8) в зависимости от выбранной кинематической гипотезы. В случае гипотезы

Кирхгофа – Лява найдем решение второго уравнения в виде гармонической функции  $w(s, t) = B(s) \cos(\omega_2 t + \varphi_w)$ . Из второго уравнения системы (7), разделив на  $w$ , получим следующее уравнение:

$$-rD_{11}(\varphi'_w)^4 - C_{22} \frac{1}{r} + \omega^2 r \rho h = 0. \quad (12)$$

Для нахождения скорости волны изгиба выразим из уравнения (12)  $\varphi'_w$ :

$$\varphi'_w = \sqrt[4]{\frac{r^2 \omega^2 \rho h - C_{22}}{r^2 D_{11}}}. \quad (13)$$

Разделим частоту на  $\varphi'_w$ , получим

$$a_{\text{К-Л}} = \frac{\omega \sqrt{r} \cdot \sqrt[4]{D_{11}}}{\sqrt[4]{r^2 \rho h \omega^2 - C_{22}}}, \quad (14)$$

где  $D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12}$ ;  $C_{22} = E_2 h$ .

Выражение (14) дает точное значение фазовой скорости волны изгиба в принятых допущениях в случае гипотезы Кирхгофа – Лява.

Рассчитаем фазовую скорость изгибной волны в случае принятия гипотезы Тимошенко. Для расчета вынужденных изгибных колебаний используем два последних уравнения системы (8):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s}(rQ_s) - N_\theta - r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s}(rM_s) - rQ_s + r\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial t^2} = 0, \end{cases} \quad (15)$$

с граничными условиями  $w(0, t) = 0$ ,  $\psi_s(0, t) = 0$ ,  $M_s(L, t) = 0$ ,  $Q_s(L, t) = J \cdot \cos \omega t$ . Найдем решение системы в виде

$$\begin{pmatrix} w \\ \psi_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{i\omega \left( t - \frac{s}{a_T} \right)}, \quad (16)$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные константы;  $\omega$  – частота возмущающей силы;  $a_T$  – фазовая скорость бегущей волны в случае принятия гипотезы Тимошенко.

Таким образом, исходная система будет

$$\begin{bmatrix} \rho h \omega^2 - \frac{C_{22}}{r^2} - \frac{\omega^2}{a_T^2} K_1 & -\frac{i\omega}{a_T} K_1 \\ -\frac{i\omega}{a_T} K_1 & \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 + K_1 + D_{11} \left( \frac{\omega^2}{a_T^2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Условием существования нетривиального решения данной системы является вырожденность матрицы коэффициентов, откуда получим характеристическое уравнение относительно фазовой скорости:

$$\begin{aligned} & -\omega^4 D_{11} K_1 \frac{1}{a_T^4} + \left( \omega^4 D_{11} \rho h - \omega^2 \frac{C_{22} D_{11}}{r^2} - \omega^4 K_1 \frac{\rho h^3}{12} \right) \frac{1}{a_T^2} + \\ & + \left( \rho h \omega^2 - \frac{C_{22}}{r^2} \right) \left( \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 + K_1 \right) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Введем замену  $\frac{1}{a_T^2} = f$  и получим квадратное уравнение относительно  $f$ , которое имеет два корня:  $f_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4dc}}{2d}$  и

$$f_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4dc}}{2d}, \text{ где}$$

$$d = -\omega^4 D_{11} K_1,$$

$$b = \omega^4 D_{11} \rho h - \omega^2 \frac{C_{22} D_{11}}{r^2} - \omega^4 K_1 \frac{\rho h^3}{12}, \quad (19)$$

$$c = \left( \rho h \omega^2 - \frac{C_{22}}{r^2} \right) \left( \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 + K_1 \right).$$

Оценим знак каждого из корней, заметив, что  $d < 0$ . Величина  $4dc$  будет положительной, если  $c < 0$ , т. е. необходимо чтобы выполнилось условие  $\omega^2 < \frac{C_{22}}{\rho h r^2} = \omega_{\text{крит}}^{(1)}$ . Условие  $b < 0$  выполняется,

если  $\omega^2 < \frac{C_{22}}{\rho h r^2} \frac{Es}{Es - \frac{5}{6} Gsn} = \omega_{\text{крит}}^2$ . Анализ всех возможных комбина-

ций знаков  $b$  и  $dc$  показал, что в случае, если  $\omega^2$  больше минимального из  $\omega_{\text{крит}}^{(1)}$ ,  $\omega_{\text{крит}}^{(2)}$ , то  $f_1 > 0$ , а  $f_2 < 0$ . Если частота меньше минимальной из двух критических частот, то в случае, когда выражение  $b^2 - 4dc$  положительное, оба корня отрицательные, а в случае, когда оно отрицательное – комплексные.

Таким образом, можно сделать вывод, что уравнение (18) имеет четыре корня, два из которых, в случае, если  $\omega^2$  квадрат частоты превышает минимальное из  $\omega_{\text{крит}}^{(1)}$ ,  $\omega_{\text{крит}}^{(2)}$ , чисто мнимые, а два – действительные, отличающиеся только знаком, что соответствует распространению волны в прямом и обратном направлениях. В случае, когда частота меньше минимальной из двух критических частот, все четыре корня комплексные.

Для пары действительных фазовых скоростей  $a_T$  константы  $C_1$  и  $C_2$  могут быть найдены как нетривиальные решения вырожденной системы алгебраических линейных уравнений (17):

$$C_1 = \pm i\gamma C_2, \quad (20)$$

$$\text{где } \gamma = \frac{\frac{C_{22}}{r^2} + \frac{\omega^2}{a_T^2} K_1 - \rho h \omega^2}{K_1 \frac{\omega}{a_T}}.$$

В случае пары мнимых скоростей  $a_T = \pm \bar{a}_T i$ :

$$C_1 = \pm \beta C_2, \quad (21)$$

$$\text{где } \beta = \frac{\frac{-C_{22}}{r^2} + \frac{\omega^2}{\bar{a}_T^2} K_1 + \rho h \omega^2}{K_1 \frac{\omega}{\bar{a}_T}}.$$

Окончательно общее решение системы (17) для случая двух действительных и двух чисто мнимых корней примет вид

$$Y(s, t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i\gamma \end{pmatrix} e^{\frac{i\omega s}{a_T}} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i\gamma \end{pmatrix} e^{\frac{i\omega s}{a_T}} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} e^{\frac{\omega s}{\bar{a}_T}} + C_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix} e^{\frac{\omega s}{\bar{a}_T}}. \quad (22)$$

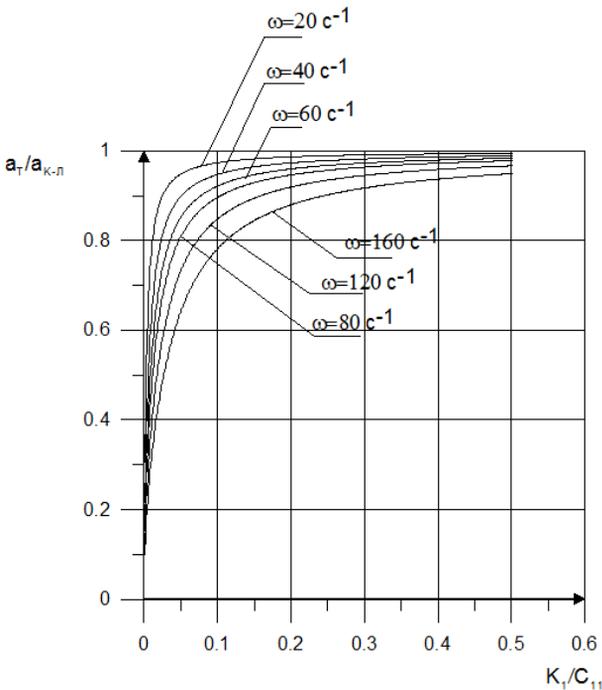
Найдем из граничных условий значения констант, решив следующую систему уравнений:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 i\gamma & -i\gamma & \beta & -\beta \\
 \frac{-i\omega L}{\gamma e^{\frac{-i\omega L}{a}}} & \frac{i\omega L}{\gamma e^{\frac{i\omega L}{a_T}}} & -\beta e^{\frac{-\omega L}{a_T}} & -\beta e^{\frac{\omega L}{a_T}} \\
 iK_1\left(\gamma - \frac{\omega}{a}\right)e^{\frac{-i\omega L}{a}} & -iK_1\left(\gamma - \frac{\omega}{a_T}\right)e^{\frac{i\omega L}{a_T}} & K_1\left(\beta - \frac{\omega}{a_T}\right)e^{\frac{-\omega L}{a_T}} & -K_1\left(\beta - \frac{\omega}{a_T}\right)e^{\frac{\omega L}{a_T}}
 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

получим форму установившихся вынужденных изгибных колебаний.

**Оценка влияния выбора кинематической гипотезы.** Исследуя зависимость действительных фазовых скоростей от жесткости поперечного сдвига  $K_1$  (рис. 1), можно выявить условия, при которых решение на основе гипотезы Кирхгофа – Лява несущественно отличается от решения с учетом поперечного сдвига, и выяснить, переходит ли решение по сдвиговой модели Тимошенко в пределе в решение по модели Кирхгофа – Лява.



**Рис. 1.** Зависимость фазовой скорости волны изгиба от жесткости поперечного сдвига

Из рисунка ясно, что независимо от частоты, начиная с определенного значения жесткости поперечного сдвига, скорости волн изгиба стремятся к предельному значению.

Найдем предельное значение фазовой скорости изгибной волны из уравнения (18) при  $K_1 \rightarrow \infty$ :

$$\tilde{a} = \frac{\omega\sqrt{r} \cdot \sqrt[4]{D_{11}}}{\sqrt{-\frac{\omega^2 r}{\sqrt{D_{11}}} \frac{\rho h^3}{24} \pm \sqrt{\frac{\omega^4 r^2}{D_{11}} \left(\frac{\rho h^3}{24}\right)^2 + (r^2 \rho h \omega^2 - C_{22})}}}. \quad (24)$$

Сравним полученный результат со скоростью изгибной волны при использовании гипотезы Кирхгофа – Лява (14), для чего найдем разность предельной фазовой скорости в оболочке Тимошенко (24) и фазовой скорости в оболочке Кирхгофа – Лява (14):

$$\tilde{a} - a_{\text{К-Л}} = a_{\text{К-Л}} \left( \frac{\sqrt[4]{(r^2 \rho h \omega^2 - C_{22})}}{\sqrt{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + (r^2 \rho h \omega^2 - C_{22})}}} - 1 \right), \quad (25)$$

где  $\gamma = \frac{\omega^2 r}{\sqrt{D_{11}}} \frac{\rho h^3}{24}$ .

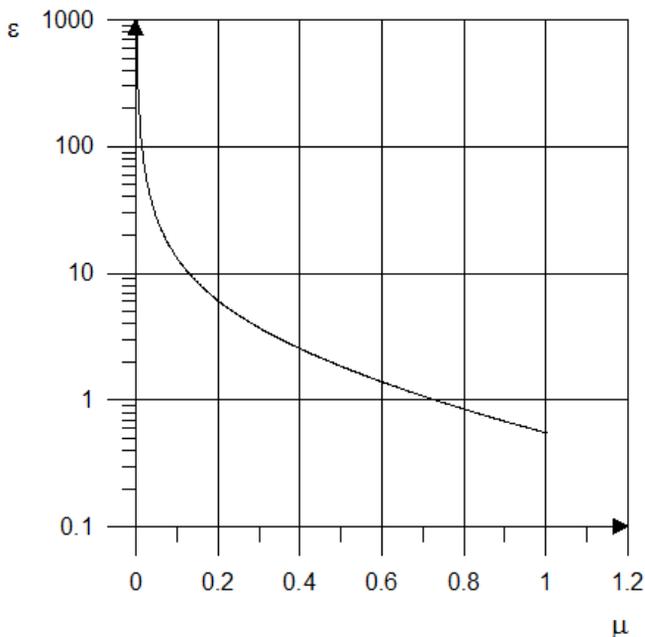
Прежде всего отметим, что действительная фазовая скорость получается при неотрицательном  $r^2 \rho h \omega^2 - C_{22}$ , т. е. когда круговая частота вынужденных колебаний больше отношения скорости продольной волны в окружном направлении к радиусу оболочки. При этом условии корень в знаменателе имеет одно действительное и одно мнимое значение. Рассматривая только действительное значение, проведем замену:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sqrt{r^2 \rho h \omega^2 - C_{22}}}{\gamma}}. \quad (26)$$

Таким образом

$$\varepsilon(\mu) = \frac{\mu}{\sqrt{-1 + \sqrt{1 + \mu^4}}} - 1, \quad (27)$$

где  $\varepsilon(\mu)$  – убывающая функция с вертикальной асимптотой в нуле, т. е.  $\varepsilon(\mu)$  в окрестности нуля стремится к бесконечности (рис. 2).



**Рис. 2.** Относительная разность фазовых скоростей, найденных по моделям Кирхгофа – Лява и Тимошенко

**Заключение.** Таким образом, при малых частотах (близких к критической величине  $\omega^* = \sqrt{\frac{C_{22}}{r^2 \rho h}}$ ) модель Тимошенко в пределе при бесконечно большой сдвиговой жесткости дает бесконечную фазовую скорость, и разница между скоростями, определенными по разным моделям, бесконечно велика; при увеличении частоты предельная фазовая скорость в оболочке Тимошенко приближается к скорости в оболочке Кирхгофа – Лява.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Айнола Л. Волновые процессы деформаций упругих плит и оболочек. *Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук*, 1965, № 1, с. 3–62.
- [2] Белоносов С.М. Пульсирующее осесимметричное возмущение ньютоновой жидкости в длинной цилиндрической упругой трубке. *Динамика сплошной среды*, Новосибирск, 2004, вып. 122, с. 3–39.
- [3] Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Численное моделирование устойчивости нагруженных оболочек вращения при внутреннем течении жидкости. *Прикладная механика и техническая физика*, Новосибирск, 2008, т. 49, № 2, с. 185–195.
- [4] Вольмир А.С. *Оболочки в потоке жидкости и газа: Задача гидроупругости*, Москва, Наука, 1979, 320 с.
- [5] Горшков А.Г. *Стационарные задачи динамики многослойных конструкций*, Москва, Машиностроение, 1992, 224 с.

- [6] Григоренко Я.М. *Изотропные и анизотропные оболочки вращения переменной жесткости*, Киев, Наукова думка, 1973, 228 с.
- [7] Григорьев В.Г. *Методология исследования динамических свойств сложных упругих и гидроупругих систем*. Дис. ... д-ра техн. наук. Москва, 2000, 328 с.
- [8] Нигул У.К. *Волновые процессы деформации оболочек и пластин*. Тр. VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Днепропетровск, 1969, Москва, 1970, с. 846–883.
- [9] Седова Е.А. *Решение связанной задачи гидроупругости*. Сб. тр. IX Межрегиональной научно-практической конференции студентов и аспирантов, в 3 т. 10 апреля 2009 г., Новокузнецк, 2009, т. 1. с. 8–11.
- [10] Шпакова Ю.В. *Статическая прочность и колебания подкрепленных оболочек вращения из слоистых композиционных материалов*. Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Томск, 2007, 16 с.
- [11] Ghosh J. Longitudinal Vibrations of a Hollow Cylinder. *Bull. Calc. Math. Soc.*, 1923–1924, vol. 14, pp. 31–40.
- [12] Lord Rayleigh. On the Free Vibrations of an Infinite Plate of Homogeneous Isotropic Elastic Matter. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1889, vol. 20, pp. 225–234.
- [13] Miklowitz J. Recent Developments in Elastic Wave Propagation. *Appl. Mech. Revs.*, 1960, vol. 13 (12), pp. 865–878.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Каледин В.О., Седова Е.А., Шпакова Ю.В. Фазовые скорости бегущих волн в цилиндрической оболочке при конечной и бесконечной жесткости поперечного сдвига. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/958.html>

**Каледин Валерий Олегович** родился в 1955 г., окончил Харьковский авиационный институт в 1978 г. Д-р техн. наук, профессор, декан факультета информационных технологий Новокузнецкого института (филиала) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Кемеровский государственный университет». Область научных интересов: механика деформированного твердого тела и механика композиционных материалов. e-mail: [vkaled@nkfi.ru](mailto:vkaled@nkfi.ru)

**Седова Елена Александровна** родилась в 1985 г., окончила Кемеровский государственный университет в 2007 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент Новокузнецкого института (филиала) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Кемеровский государственный университет». Область научных интересов: механика деформированного твердого тела, механика жидкости и газа. e-mail: [sedovaea@yandex.ru](mailto:sedovaea@yandex.ru)

**Шпакова Юлия Владимировна** родилась в 1982 г., окончила Кемеровский государственный университет в 2004 г. Канд. техн. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: механика деформированного твердого тела, механика композиционных материалов и конструкций. e-mail: [shpakovayuliya@bmstu.ru](mailto:shpakovayuliya@bmstu.ru)