УДК 539.3

Моделирование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при воздействии ударной сосредоточенной нагрузки

© В.М. Дубровин, Т.А. Бутина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На основании общей теории пологих оболочек решена задача оценки напряжений и деформаций цилиндрической ортотропной оболочки при действии ударной сосредоточенной нагрузки, направленной по нормали к поверхности оболочки. Первоначально задача решается путем выделения в зоне контакта элементарной площадки на срединной поверхности оболочки. Найдена главная часть решения и определены асимптотические формулы для перемещений и внутренних силовых факторов при условии, что зона контакта стремится к нулю.

Ключевые слова: *контактная сила удара, зона контакта, цилиндрическая оболочка, дифференциальный оператор, асимптотическое приближение.*

Рассматривается задача по определению напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при воздействии ударной сосредоточенной силы, например при соударении оболочки с твердым телом небольших размеров. При этом предполагается, что:

вся энергия удара идет на получение деформаций;

изменение количества движения оболочки вследствие соударения мало;

при соударении вектор относительной скорости удара направлен по внешней нормали к поверхности оболочки;

твердое тело, участвующее в соударении, – шар радиуса r ($r \ll R$, R – радиус оболочки).

При указанных предположениях контактная сила удара может быть определена из условия равенства кинетической энергии соударяющихся тел и работы контактной силы удара на упругих и упругопластических деформациях оболочки. Тогда справедливо соотношение [1–3]

$$\frac{mv_\alpha^2}{2} = Pw,$$

где $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – масса тел, участвующих в ударе; m_1, m_2 – масса оболочки и шара соответственно; v_α – проекция скорости соударения тел на направление внешней нормали к поверхности оболочки; P – контактная сила; w – упругая или упругопластическая деформация оболочки под действием контактной силы.

Поскольку $m_1 >> m_2$, то $m = m_2$ и

$$P = \frac{m_2 v_\alpha^2}{2w}. \quad (1)$$

Формула (1) позволяет определить контактную силу удара. При этом следует исходить из того, что в общем случае механические характеристики материала оболочки при ударном нагружении зависят от скорости соударения. Согласно [4–6], предел текучести металлов увеличивается с возрастанием скорости нагружения, приближаясь к пределу прочности, и зависит от статического предела текучести. В то же время предел прочности мало изменяется в зависимости от нагружения. Упругие характеристики не зависят от скорости нагружения.

При расчете величины контактной силы удара можно предположить, что кинетическая сила соударения в результате удара не испытывает физических изменений, а тепловые явления во время удара не учитываются. Поскольку рассматривается замкнутая система и кинетическая энергия, сообщенная оболочке, незначительна, очевидно, что вся первоначальная кинетическая энергия шара должна перейти в тепловую энергию деформации оболочки. Поскольку передача количества движения происходит быстрее, чем теплоотдача, можно допустить, что деформация оболочки закончится к тому времени, когда в полной мере начнут проявляться тепловые эффекты воздействия [7].

Зная величину контактной силы удара, можно определить напряжения в оболочке, вызванные этой нагрузкой. Поскольку рассматривается местная прочность оболочки при действии нормальной к образующей оболочки нагрузки, задача сводится к так называемому третьему напряженному состоянию.

Рассматривая цилиндрическую оболочку в соответствии с принятыми в теории оболочек положениями [8–9], внутренние силовые факторы можно представить в виде

$$N_1 = \frac{E_1 \delta}{(1-\mu_1\mu_2)R}\left[\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \mu_1\left(\frac{\partial v}{\partial \beta} - w\right)\right],$$

$$N_2 = \frac{E_2 \delta}{(1-\mu_1\mu_2)R}\left[\frac{\partial v}{\partial \beta} - w + \mu_2 \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right],$$

$$S_1 = S_2 = \frac{G\delta}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right),$$

$$M_1 = \frac{E_1\delta^2}{12(1-\mu_1\mu_2)R^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \mu_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\right)\right], \qquad (2)$$

$$M_2 = \frac{E_2\delta^2}{12(1-\mu_1\mu_2)R^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\partial v}{\partial \beta} + \mu_2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right],$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{G\delta_2}{6R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right).$$

Здесь E_1, E_2 – модули упругости и коэффициенты Пуассона в осевом и кольцевом направлениях; G – модуль сдвига; R, δ – радиус и толщина оболочек; $\alpha = \frac{x}{R}$ – расстояние по образующей, выраженное в долях радиуса R; β – центральный угол; u, v, w – деформации оболочки по осям x, y, z; N_1, N_2, S – усилие в сечении оболочки; M_1, M_2, M_{12} – изгибающие в сечении оболочки.

Используя соотношение (2), из уравнений равновесия получим

$$\alpha_{\nu 1}u + \alpha_{\nu 2}v + \alpha_{\nu 3}w = P_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3), \qquad (3)$$

где $\alpha_{\nu j}$ – некоторые дифференциальные операторы.

Обозначим через D детерминант системы (3), а через $D_{\nu j}$ – минор детерминанта D, соответствующий элементу $\alpha_{\nu j}$. Тогда частное решение системы (3) можно представить в виде

$$u = \sum_{\nu=1}^{3}(-1)^{\nu+1} D_{\nu 1}\varPhi_\nu,$$

$$v = \sum_{\nu=1}^{3}(-1)^{\nu+2} D_{\nu 2}\varPhi_\nu, \qquad (4)$$

$$w = \sum_{\nu=1}^{3}(-1)^{\nu+3} D_{\nu 3}\varPhi_\nu,$$

где $\varPhi_\nu$ – какое-нибудь решение уравнения

$$D\Phi_\nu = P_\nu \quad (\nu = 1,\ 2,\ 3). \tag{5}$$

Выделим на срединной поверхности оболочки элемент со сторонами $a = 2R\alpha_0$, $b = 2R\beta_0$. Нагрузку считаем элементарной, т. е. распределенной по элементу с постоянными составляющими $\dfrac{Q_\nu}{ab}$. Поэтому для компонентов нагрузки

$$q_\nu(\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{Q_\nu}{4R^2\alpha_0\beta_0} = \text{const}, \ \text{если} \ |\alpha| \le \alpha_0, \ |\beta| \le \beta_0, \\ 0, \ \text{если} \ |\alpha| > \alpha_0 \ \text{или} \ |2\pi - \beta_0| > |\beta| > \beta_0. \end{cases} \tag{6}$$

Если величины P_ν представить в виде

$$P_\nu(\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\nu n}(\alpha)\cos n\beta, \tag{7}$$

то, согласно (6),

$$P_{\nu 0} = \frac{n\beta_0}{2\sin n\beta_0} P_{\nu n} = \begin{cases} -\dfrac{C_\nu Q_\nu}{4\pi R^2\alpha_0}, & \text{если} \ |\alpha| \le \alpha_0, \\ 0, & \text{если} \ |\alpha| > \alpha_0, \end{cases} \tag{8}$$

где $C_1 = \dfrac{(1-\nu_1\nu_2)R^2}{E_1\delta}$, $C_2 = \dfrac{(1-\nu_1\nu_2)R^2}{E_2\delta}$, $C_3 = \dfrac{(1-\nu_1\nu_2)R^2}{G\delta}$.

Если представить Φ_ν в виде

$$\Phi_\nu(\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{\nu n}(\alpha)\cos\beta, \tag{9}$$

то, развертывая детерминант D и используя формулы (5), (7), (9), получим

$$\begin{gathered} f_{\nu n}^{(8)} - \left[\frac{E_2}{G} + \frac{4G}{E_1}(1-\mu_1\mu_2)\right] n^2 f_{\nu n}^{(6)} + \\ + \left\{\left[\left(\frac{E_2}{G} - 2\mu_1\right)\left[\frac{4G}{E_1}(1-\mu_1\mu_2) + 2\mu_1\right] + 2\frac{E_2}{E_1}\right] n^4 + 4\xi^4\right\} f_{\nu n}^{(4)} - \\ - \frac{E_2}{E_1}\left[\frac{E_2}{G} + \frac{4G}{E_1}(1-\mu_1\mu_2)\right] n^6 f_{\nu n}^{(2)} + \frac{E_2^2}{E_1^2} n^8 f_{\nu n} = q_{\nu n} \\ (\nu = 1,\ 2,\ 3\ldots;\ \ n = 0,\ 1,\ 2\ldots), \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$q_{\nu n} = -\frac{12R^2E_2^2}{\left(1-\mu_1\mu_2\right)\delta^2 E_1 G} P_{\nu n}\,,\ \xi = \left(3\frac{E_1}{E_2}(1-\mu_1\mu_2)\right)^{1/4}\left(\frac{R}{\delta}\right)^{1/2} \tag{11}$$

Используя метод интеграла Фурье, можно записать частное решение уравнения (10) в виде

$$f_{\nu n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta(\alpha-\gamma)}\frac{q_{\nu n}(\gamma)}{\Delta_n(\eta)}. \tag{12}$$

Здесь

$$\Delta_n(\eta) = \eta^8 - \left[\frac{E_2}{G} + \frac{4G}{E_1}(1-\mu_1\mu_2)\right] n^2\eta^6 +$$

$$+\left\{\left[\left(\frac{E_2}{G} - 2\mu_1\right)\left[\frac{4G}{E_1}(1-\mu_1\mu_2) + 2\mu_1\right] + 2\frac{E_2}{E_1}\right] n^4 + 4\xi^2\right\}\eta^4 +$$

$$+\frac{E_2}{E_1}\left[\frac{E_2}{G} + \frac{4G}{E_1}(1-\mu_1\mu_2)\right] n^6\eta^2 + \frac{E_2^2}{E_1^2} n^8.$$

Для выделения главной части решения и получения асимптотических формул можно представить формулу (12), применяя (8) и (11), в виде

$$f_{\nu n} = \lambda_{\nu n}\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha_0\eta\cos\alpha\eta}{\eta\Delta_n(\eta)} d\eta, \tag{13}$$

где $\frac{1}{\beta_0}\lambda_{\nu 0} = \frac{n}{2\sin n\beta_0}\lambda_{\nu n} = \frac{3C_\nu Q_\nu E_2^2}{\pi^2(1-\mu_1\mu_2)\delta^2 E_1 G\alpha_0\beta_0}$.

Обозначив корни уравнения $\Delta_n(\eta) = 0$ через

$$\eta_{n1} = n\left(A_{n1} + iB_{n1}\right),\ -\eta_{n1},\ \overline{\eta}_{n1}, -\overline{\eta}_{n1};$$

$$\eta_{n2} = n\left(A_{n2} + iB_{n2}\right),\ -\eta_{n2},\ \overline{\eta}_{n2}, -\overline{\eta}_{n2}$$

и предполагая, что $-\eta_{n1}$, $\overline{\eta}_{n1}$, $-\eta_{n2}$, $\overline{\eta}_{n2}$ расположены в верхней полуплоскости $\left(B_{n1}, B_{n2} > 0\right)$, получим, что величины

$$\alpha_{n1} = A_{n1} + iB_{n1},\ -\alpha_{n1},\ \overline{\alpha}_{n1}, -\overline{\alpha}_{n1};$$

$$\alpha_{n2} = A_{n2} + iB_{n2},\ -\alpha_{n2},\ \overline{\alpha}_{n2}, -\overline{\alpha}_{n2}$$

будут корнями уравнения

$$\delta_n^2\left(\alpha_0\right)=\alpha_0^2+\left[\frac{E_2}{G}+\frac{4G}{E_1}(1-\mu_1\mu_2)\right]\alpha_0^6+$$

$$+\left\{\left(\frac{E_2}{G}-2\mu_1\right)\left[\frac{4G}{E_1}(1-\mu_1\mu_2)+2\mu_1\right]+2\frac{E_2}{E_1}+4\xi^4 n^{-4}\right\}\alpha_0^4+$$

$$+\frac{E_2}{E_1}\left[\frac{E_2}{G}+\frac{4G}{E_1}(1-\mu_1\mu_2)\right]\alpha^2+\frac{E_2^2}{E_1^2}.$$

Вычислив интеграл (13) с помощью теории вычетов при любом α, получим

$$f_{\nu n}(\alpha)=\frac{\pi\lambda_{\nu n}}{2}\left[\frac{1}{2\Delta_n(0)}+\sum_{0<\arg\eta<\pi} res\,\frac{e^{i|y|}}{\eta\Delta_n(\eta)}\right]\operatorname{sgn} y\,\Big|_{y=\alpha-\alpha_0}^{y=\alpha+\alpha_0}. \tag{14}$$

Отсюда можно установить следующее равенство:

$$f_{\nu n}(\alpha)=$$

$$=\frac{3C_\nu Q_\nu E_1\sin\beta_0}{2\pi\left(1-\mu_1\mu_2\right)n^8\delta^2 G\alpha_0 n\beta_0}\{1+(C_{n1}\sin nA_{n1}\left|y\right|-C_n\cos nA_{n1}y)e^{-nB_{n1}|y|}+$$

$$+\left[C_{n2}\sin nA_{n2}\left|y\right|-\left(1-C_n\right)\cos n\,A_{n2}y\right]e^{-nB_{n2}|y|}\}\operatorname{sgn} y\,\Big|_{y=\alpha-\alpha_0}^{y=\alpha+\alpha_0}.$$

Здесь C_{n1}, C_n, C_{n2} зависят только от $A_{n1}, B_{n1}, A_{n2}, B_{n2}$.

Таким образом, определяется Φ_ν и, тем самым, частное решение u, ν, w системы уравнений (3) при элементарной нагрузке.

Под решением задачи определения напряжений и деформаций δ_y понимается предел решения, соответствующего элементарной нагрузке, когда каждая из величин α_0 и β_0 стремится к нулю, а величины Q_v остаются постоянными. Для упрощения выделения главной части решения, содержащей особенности, принимается

$$G=\frac{\sqrt{E_1E_2}}{2(1-\mu_1\mu_2)},$$

$$f_{\nu n}(\alpha)=f_{\nu n1}(\alpha)+f_{\nu n2}(\alpha),$$

$$f_{\nu n1}(\alpha)=\frac{\lambda_n\sin n\beta_0}{n^{11}\Theta^4 n\beta_0}\int_0^\infty\frac{\sin\alpha_0\Theta\eta\cos n\alpha\Theta\eta(-4\xi^4\eta^4)}{n\alpha_0\eta(\eta^2+1)^4\delta_n(\Theta\eta)}d\eta, \tag{15}$$

$$f_{\nu n2}(\alpha)=\frac{\lambda_\nu \sin n\beta_0}{n^8\alpha_0\Theta^8 n\beta_0}\int_0^\infty \frac{\sin n\alpha_0\Theta\eta\cos n\alpha\Theta\eta}{\eta(\eta^2+1)^4}d\eta,$$

$$\lambda_n=\frac{6C_\nu Q_\nu\Theta^4 E_2}{\pi^2(1-\mu_1\mu_2)\delta^2 G},$$

$$\Theta^4=\frac{E_2}{E_1}.$$

Если обозначить

$$F_{\nu n1}(\alpha)=\lim_{\substack{\alpha_0\to 0\\ \beta_0\to 0}} f_{\nu n1}(\alpha),$$

$$F_{\nu n2}(\alpha)=\lim_{\substack{\alpha_0\to 0\\ \beta_0\to 0}} f_{\nu n2}(\alpha),$$

$$F_{\nu n}(\alpha)=\lim_{\substack{\alpha_0\to 0\\ \beta_0\to 0}} f_{\nu n}(\alpha),$$

то можно записать

$$F_{\nu n1}(\alpha)=\frac{-4\lambda_n}{n^{11}\Theta^3}\int_0^\infty \frac{\xi^4\eta^4\cos n\alpha\Theta\eta}{\delta_n^2(\Theta\eta)(\eta^2+1)^4}d\eta,$$

$$F_{\nu n2}(\alpha)=\frac{\lambda_\nu}{n^7\Theta^7}\int_0^\infty \frac{\cos n\alpha\Theta\eta}{(\eta^2+1)^4}d\eta, \tag{16}$$

$$F_{\nu n}(\alpha)=F_{\nu n1}(\alpha)+F_{\nu n2}(\alpha).$$

Вычислив второй интеграл в формуле (16), с помощью вычетов получим

$$F_{\nu n2}=\frac{\pi\lambda_\nu}{96n^7\Theta^7}(n^3\Theta^3|\alpha|^3+6n^2\Theta^2\alpha^2+15n\Theta|\alpha|+15)e^{-n\Theta|\alpha|}. \tag{17}$$

Отсюда

$$\begin{gathered}\frac{d^kF_{\nu n2}(\alpha)}{d\alpha^k}=(1-\operatorname{sgn}|\alpha|-\operatorname{sgn}\alpha)^k\times\\ \times\frac{\pi\lambda_\nu n^{k-7}\Theta^{k-7}}{96}e^{-n\Theta|\alpha|}(n^3\Theta^3|\alpha|^3+A_kn^2\Theta^2\alpha^2+B_kn\Theta|\alpha|+C_k),\end{gathered} \tag{18}$$

где $A_k=3(2-k)$ $B_k=3[5(1-k)+k^2]$ $C_k=(k-1)[(8-k)k-15]$.

Таким образом, для любой компоненты (с индексом $\nu=1,\,2,\,3$) сосредоточенной нагрузки перемещения $u^{(\nu)}$, $v^{(\nu)}$, $w^{(\nu)}$ внутренние силовые факторы (как следует из формул (2) и (4)) можно получить воздействием известных операторов $(-1)^{\nu+j}D_{\nu j}$ на ряд

$$F_{\nu_0}+F_{\nu_1}\cos\beta+F_{\nu_2}\cos 2\beta+\ldots$$

По отношению к искомым величинам, которые определяются с помощью операторов $D_{\nu j}$ ниже шестого порядка, указанное правило справедливо при любых α и β, а по отношению к оставленным искомым величинам при всех β и $\alpha\neq 0$. В случае, когда перемещения и внутренние силовые факторы определяются с помощью линейного дифференциального оператора не ниже шестого порядка, искомую величину можно представить в виде суммы не имеющего особенностей функционального ряда и функции, выраженной в замкнутой форме. Действительно, используя (16–18), можно записать

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^6}{\partial\alpha^k\partial\beta^m}\left[F_{\nu k}(\alpha)\cos n\beta\right]=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^6}{\partial\alpha^k\partial\beta^m}F_{\nu n1}\cos n\beta+S_{km}(\alpha,\beta). \qquad (19)$$

Здесь

$$S_{km}(\alpha,\beta)=\frac{\partial^6}{\partial\alpha^k\partial\beta^m}\left[F_{\nu_0}(\alpha)+F_{\nu_1}(\alpha)\cos\beta\right]+(-\operatorname{sgn}\alpha)^k\,\frac{\pi}{96}\lambda_\nu\Theta^{k-7}\times$$
$$\times\left[-(\Theta^3\left|\alpha\right|^3+A_k\Theta^2\alpha^2+B_k\Theta\left|\alpha\right|+C_k)e^{-\Theta|\alpha|}+\cos(\beta+\frac{1}{2}m\pi)+\right. \qquad (20)$$
$$\left.+(-1)^{m+\frac{m}{2}}\left(-\left|\alpha\right|\frac{\partial^3\psi}{\partial\left|\alpha\right|^3}+A_k\alpha^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}+B_k\left|\alpha\right|\frac{\partial\psi}{\partial\left|\alpha\right|}+C_k\psi\right)\right];$$

$$\psi(\left|\alpha\right|,\beta)=\psi_1(\left|\alpha\right|,\beta)=-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2\Theta|\alpha|}-2e^{\Theta|\alpha|}\cos\beta\right)\ \text{при}\ m=2\nu;$$

$$\psi(\left|\alpha\right|,\beta)=\psi_2(\left|\alpha\right|,\beta)=arctg\,\frac{\sin\beta}{e^{\Theta|\alpha|}-\cos\beta}\ \text{при}\ m=2\nu+1.$$

Первая функция в правой части равенства и ограниченные члены, входящие в состав второй функции, могут быть отображены, если искомая величина неограниченно растет по мере приближения к точке приложения сосредоточенной нагрузки.

Пусть $m=2j$, а $k=6-m$ – четное число, тогда на основании изложенного выше в (19) можно целиком отбросить стоящий в правой части ряд, а в выражении для $S_{k,m}$ отбросить все члены, кроме

$$(-1)^j \frac{\pi}{96}\lambda_\nu \Theta^{k-7} C_k \psi(|\alpha|,\beta).$$

Используя полученный результат и формулу (18), можно получить следующее асимптотическое равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^6}{\partial\alpha^k \partial\beta^m}\left[F_{\nu n}(\alpha)\cos n\beta\right] \approx$$
$$\approx -(-1)^j \frac{\pi}{96}\lambda_\nu \Theta^{k-7}(k-1)\left[k(8-k)-15\right]\ln\rho, \tag{21}$$

где $\rho^2 = \Theta^2\alpha^2 + \beta^2$, справедливое в окрестности $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

При $k+m = 7,8$ получим асимптотическое равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial\alpha^k \partial\beta^m}\left[F_{\nu n}(\alpha)\cos n\beta\right] \approx$$
$$\approx -(-1)^j \frac{\pi}{96}\lambda_\nu \Theta^{k-7} \frac{\partial^{k+m-6}}{\partial\alpha^k \partial\beta^m}\left\{\frac{\alpha\Theta^4|\alpha|^4\left(\Theta^2\alpha^2 - 3\beta^2\right)}{\rho^6} + \right.$$
$$+\frac{3(2-k'')\Theta^2\alpha^2(\Theta^2\alpha^2-\beta^2)}{\rho^4} + \frac{3\left[5(1-k'')+k''^2\right]\Theta^2\alpha^2}{\rho^2} - \tag{22}$$
$$\left. -(k''-1)\left[k''^{(8-k'')}-15\right]\ln\rho\right\},$$

$$k+m = k'+m'+6 = 7,8;\;\; k',\;\; m',\;\; k''+k-k',\;\; 2j+m-m' \ge 0 .$$

С помощью формул (21) и (22) можно получить асимптотическое равенство для всех перемещений и внутренних силовых факторов, не ограниченных в окрестности точки $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Так, для перемещений и внутренних силовых факторов справедливы асимптотические формулы

$$Q_1^{-1} n^{(1)} \approx Q_2^{-1} v^{(2)} Q^2 \approx -\frac{\left(1+\mu_1\mu_2(3-\sqrt{\mu_1\mu_2})\right)}{8\pi\delta\sqrt[4]{E_2E_1^3}}\ln\rho,$$

$$M_1^{(3)} = -\frac{Q_3(1+\sqrt{\mu_1\mu_2})}{4\pi}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{4}}\ln\rho, \tag{23}$$

$$M_2^{(3)} = -\frac{Q_3(1+\sqrt{\mu_1\mu_2})}{4\pi}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{4}}\ln\rho,$$

$$N_1^{(1)} \cong -\frac{Q_1}{4\pi R}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{4}}\left[2(1+\sqrt{\mu_1\mu_2})\beta^2\rho^{-2} - (3+\sqrt{\mu_1\mu_2})\right]\alpha\rho^{-2},$$

$$N_1^{(2)} \cong -\frac{Q_2}{4\pi R}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{4}}\left[2(1+\sqrt{\mu_1\mu_2})\Theta^2\alpha^2\rho^{-2} - (3+\sqrt{\mu_1\mu_2})\right]\beta\rho^{-2}.$$

Как уже отмечалось, в работе рассматривается прочность оболочки при действии контактной ударной нагрузки, направленной по нормали к поверхности оболочки. В этом случае напряженное состояние оболочки определяется в основном изгибающими моментами M_1 и M_2, для которых в соответствии с формулами (23) справедливы асимптотические формулы

$$M_1 = -\frac{P(1+\sqrt{\mu_1\mu_2})}{4\pi}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{4}}\ln\frac{R}{r},$$

$$M_2 = -\frac{P(1+\sqrt{\mu_1\mu_2})}{4\pi}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{4}}\ln\frac{R}{r}.$$

Тогда напряжения в зоне контакта

$$\sigma_1 = \frac{6M_1}{\delta^2}, \quad \sigma_2 = \frac{6M_2}{\delta^2}.$$

Полученные соотношения показывают, что в зоне упругих и упругопластических деформаций напряжения при ударе линейно зависят от величины контактной силы и позволяют оценить напряженно-деформированное состояние оболочки при рассмотренном воздействии.

Из всего сказанного выше можно сделать следующие выводы: в работе получены расчетные формулы, описывающие напряженно-деформи-рованные состояния цилиндрической оболочки при действии ударной сосредоточенной нагрузки;

в зоне упругих и упругопластических деформаций напряжения при рассмотренном воздействии линейно зависят от контактной силы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вольмир А.С. *Устойчивость деформированных систем*. Москва, Наука, 984 с.

[2] Кантор Б.Я. *Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения*. Киев, Наукова думка,1990, 497 с.

[3] *Прочность, устойчивость, колебания*. Справочник. Т. 1. Москва, Машиностроение, 1968, 832 с.
[4] Окопный Ю.А., Радин В.П., Чирков И.П. *Механика материалов и конструкций.* Москва, Машиностроение, 2001, 407 с.
[5] *Справочник металлурга по цветным металлам*. Москва, Металлургия, 1971, 107 с.
[6] Жилин П.А. *Актуальные проблемы механики*. Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН, 2006, 306 с.
[7] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды*, т. 2. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.
[8] Власов В.З. *Избранные труды*. т. 1: *Общая теория оболочек*. Москва, Изд-во АН СССР, 1962, 528 с.
[9] Работнов Ю.Н. *Проблемы механики деформируемого твердого тела. Избранные труды*. Москва, Наука, 1991, 194 с.
[10] Сиратори М. *Вычислительная механика разрушения*. Москва, Мир, 1986, 334 с.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при воздействии ударной сосредоточенной нагрузки. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/957.html

Дубровин Виктор Митрофанович родился в 1935 г., окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета в 1958 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика». Специалист в области прочности, устойчивости деформируемых систем. Автор более 120 печатных работ. e-mail: vmdubrovin@mail.ru

Бутина Татьяна Александровна родилась в 1950 г., окончила Московский физико-технический институт в 1974 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика». Специалист в области прочности и устойчивости деформируемых систем. e-mail: butina_ta@mail.ru