

## О влиянии металлических экранов на поле векторного потенциала

© В.Ф. Апельцин<sup>1</sup>, А.И. Полетаев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

<sup>2</sup>Центр теоретических проблем физико-химической фармакологии РАН,  
Москва, 119931, Россия

*Приводится пример классической краевой задачи электродинамики возбуждения регулярного прямоугольного волновода с идеально проводящими стенками полями точечных источников (электрического или магнитного диполей), для которого электромагнитное поле сосредоточено только внутри области ограниченной идеально проводящей границей. Однако отличное от нуля поле векторного потенциала существует везде в случае возбуждения полем магнитного диполя за пределами волновода. Результат может быть полезен при интерпретации некоторых экспериментов по воздействию на биологические объекты соленоидальных источников поля, полностью экранированных металлическими кожухами.*

**Ключевые слова:** векторный потенциал, волновод, электромагнитное поле.

**Введение.** В последнее время появилось значительное количество публикаций, посвященных свойствам поля векторного потенциала как поля информационного, не наблюдаемого инструментально, но оказывающего регистрируемое влияние на биологические объекты. Более того, существуют патенты устройств, осуществляющих это влияние в диагностических или лечебных целях. Обычно они представляют собой соленоиды или трансформаторы различной конструкции, экранированные металлическими кожухами, что исключает присутствие за их границами обычного электромагнитного излучения. Утверждается, что регистрируемое влияние оказывает поле векторного потенциала, для которого металлический кожух оказывается проницаемым. Достаточно полное изложение наблюдаемых эффектов и ссылки на патенты можно найти в работах [1, 2]. Казалось бы, адекватное описание таких явлений требует новой физической модели и нового математического аппарата, тем не менее можно показать, что уже в рамках аппарата классических краевых задач электродинамики такие свойства векторного потенциала присутствуют и могут быть проиллюстрированы на конкретных примерах.

**О калибровке векторного потенциала.** В работе [1] при рассмотрении общего вида решения стационарного уравнения Шрёдингера, описывающего поведение заряженной квантовой частицы с зарядом  $e$  в электромагнитном поле, представленном векторным потенциалом  $\vec{A}$ :

$$\frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla - e\vec{A})^2\psi + [E - U(x, y, z)]\psi = 0,$$

отмечено, что его решение имеет вид  $\psi(x, y, z) = \psi_0(x, y, z)e^{i\varphi}$ , где  $\psi_0(x, y, z)$  – решение уравнения Шрёдингера

$$\frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla)^2\psi + [E - U(x, y, z)]\psi = 0,$$

в отсутствие поля. Фазовая функция  $\varphi(x, y, z)$  волновой функции  $\psi(x, y, z)$  имеет при этом вид интеграла вдоль траектории  $L$  движения частицы:

$$\varphi = \frac{e}{\hbar} \int_L \vec{A} d\vec{r}.$$

В случае единственной частицы наблюдаемой величиной, как и всегда в квантовой физике, является квадрат модуля амплитуды  $|\psi_0(x, y, z)|^2$ , а фазовая функция  $\varphi(x, y, z)$  таковой не является. Но уже в случае двух заряженных частиц с волновыми функциями  $\psi_0^{(1)}(x, y, z)e^{i\varphi_1}$  и  $\psi_0^{(2)}(x, y, z)e^{i\varphi_2}$ , где  $\varphi_1 = \frac{e_1}{\hbar} \int_{L_1} \vec{A} d\vec{r}$ ;  $\varphi_2 = \frac{e_2}{\hbar} \int_{L_2} \vec{A} d\vec{r}$  несложно подсчитать, что квадрат модуля амплитуды волновой функции этого простейшего ансамбля будет

$$\psi_0^{(1)2} + \psi_0^{(2)2} + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

т. е. существенно зависит от разности фазовых функций двух частиц.

Поскольку существует набор различных калибровок векторного потенциала  $\vec{A}$ , из которых в частном случае монохроматического электромагнитного поля (зависимость от времени всех полей предполагается гармонической, в виде множителя  $e^{-i\omega t}$ ) и соответствующей стационарной системы Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} + i\omega \varepsilon \vec{E} = \vec{j}^e;$$

$$\text{rot } \vec{E} - i\omega \mu \vec{H} = \vec{j}^m;$$

$$\text{div } \vec{H} = 0; \text{div } \vec{E} = \rho / \varepsilon,$$

наиболее часто употребляется калибровка Лоренца:

$$\operatorname{div} \vec{A} - i\omega\epsilon\varphi^e = 0,$$

устраняющая неоднозначность выбора поля векторного потенциала. Необходимо убедиться, что разность фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$  инвариантна относительно этих калибровок в рассматриваемых случаях. Здесь  $\varphi^e$  – скалярный потенциал;  $\rho$  – плотность статических зарядов;  $\vec{j}^e$  и  $\vec{j}^m$  – плотности сторонних электрических и магнитных токов (обычно электрических и магнитных диполей).

Покажем, что это действительно так.

Прежде всего отметим, что любые две различные корректные калибровки векторного потенциала, например электрического типа

$$\vec{N} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (2)$$

должны в результате пересчета по формуле (2) приводить к одному и тому же значению магнитного поля  $\vec{H}$ .

Будем считать, что в формулах (1) для значений фаз  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  пути  $L_1$  и  $L_2$  есть траектории двух одинаковых частиц равного заряда  $e$ , исходящих из точки  $M_1$  в точку  $M_2$ , как в ряде экспериментов типа Ааронова – Бома. Пусть  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  – два различных векторных потенциала, калиброванных по-разному, или потенциал  $\vec{A}_1$  калиброван, например по Лоренцу, а потенциал  $\vec{A}_2$  никак не калиброван. Тогда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{e}{\hbar} \left( \int_{L_1} \vec{A}_{1,2} d\vec{r} - \int_{L_2} \vec{A}_{1,2} d\vec{r} \right) = \frac{e}{\hbar} \left( \int_{L_1} \vec{A}_{1,2} d\vec{r} + \int_{-L_2} \vec{A}_{1,2} d\vec{r} \right),$$

где под  $-L_2$  имеется в виду путь  $L_2$ , проходимый в противоположном направлении. Очевидно, что  $\int_{L_1} \vec{A}_{1,2} d\vec{r} + \int_{-L_2} \vec{A}_{1,2} d\vec{r} = \oint_L \vec{A}_{1,2} d\vec{r} -$

циркуляция векторного поля по замкнутому контуру  $L = L_1 - L_2$ . Тогда, по теореме Стокса получим

$$\oint_L \vec{A}_{1,2} d\vec{r} = \int_S (\operatorname{rot} \vec{A}_{1,2})_n dS,$$

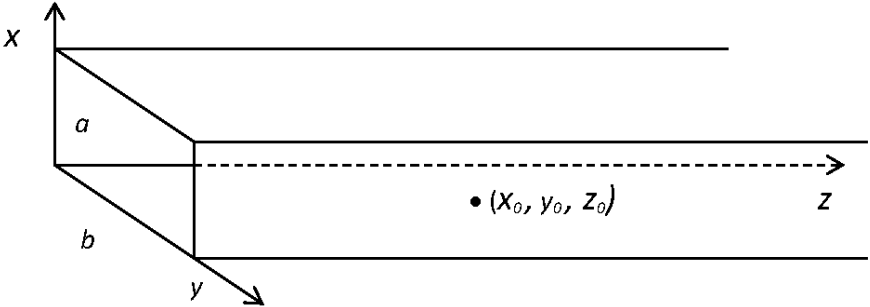
где  $S$  – поверхность, ограниченная контуром  $L$  с нормалью  $\mathbf{n}$ . Но  $\operatorname{rot} \vec{A}_{1,2} = \vec{N}$  согласно (2) и требуемое утверждение доказано.

**Возбуждение регулярного прямоугольного волновода полем точечного источника.** Система уравнений Максвелла в стационарном случае имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} + i\omega \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{j}_e;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} - i\omega \mu \mathbf{H} = \mathbf{j}_m.$$

Бесконечный металлический прямоугольный волновод, внутренность которого представляет собой неограниченную область  $D: \{0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; -\infty \leq z \leq \infty\}$ , возбуждаемый полем точечного источника, которым может являться электрический или магнитный диполь (рисунок).



Геометрия задачи возбуждения прямоугольного волновода дипольным точечным источником

1. Для случая электрического диполя

$$\mathbf{j}_e = \mathbf{p} \delta(M, M_0); \quad \mathbf{j}_m = 0.$$

Задача допускает введение скалярного потенциала  $U(x, y, z)$ , связанного с векторным потенциалом  $\mathbf{A}^e$  соотношением  $\mathbf{A}^e = -i\omega \varepsilon \times U(x, y, z) \mathbf{e}_z$ . Компоненты полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  вычисляются через  $U(x, y, z)$  в стандартном виде:

$$E_x = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}; \quad E_y = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}; \quad E_z = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U; \quad H_x = -i\omega \varepsilon \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$H_y = i\omega \varepsilon \frac{\partial U}{\partial x}; \quad H_z = 0.$$

Краевая задача для скалярного потенциала  $U(x, y, z)$  (функции Грина) имеет вид

$$\begin{cases} \Delta U + k^2 U = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0); \\ U|_S = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $S$  – боковая поверхность волновода.

Нормированные функции поперечного сечения, удовлетворяющие краевому условию, имеют вид  $\frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{\pi nx}{a} \sin \frac{\pi my}{b}$ . Полное решение краевой задачи (3) будет следующим:

$$U(x, y, z) = \frac{2}{iab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi nx}{a} \sin \frac{\pi my}{b} \sin \frac{\pi nx_0}{a} \sin \frac{\pi my_0}{b}}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}} \times \exp\left(i\sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} |z - z_0|\right). \quad (4)$$

Очевидно, что все компоненты полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , вычисленные по приведенным выше формулам так же, как и векторный потенциал  $\mathbf{A}^e$ , отличны от нуля. Последовательные члены ряда называют волновыми модами. При любом соотношении между габаритами поперечного сечения ( $a$  и  $b$ ) и волновым числом  $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$  только конечное число мод, определяемых неравенством

$$\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} < \omega, \quad (5)$$

являются распространяющимися (величина под знаком радикала в показателе экспоненты положительна). Все моды с номерами  $n, m$ , превышающими пределы, задаваемые неравенством (5), не распространяются, а экспоненциально убывают при  $|z| \rightarrow \infty$ , и не переносят энергии.

2. Для магнитного диполя

$$\mathbf{j}_m = \mathbf{m} \delta(M, M_0); \quad \mathbf{j}_e = 0.$$

Векторный потенциал  $\mathbf{A}^m$  связан со скалярным  $V(x, y, z)$  соотношением  $\mathbf{A}^m = i\omega\mu V(x, y, z) \mathbf{e}_z$ . Компоненты полей вычисляются через  $V(x, y, z)$  в виде

$$E_x = i\omega\mu \frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_y = -i\omega\mu \frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_z = 0; \quad H_x = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}; \quad H_y = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z};$$

$$H_z = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + k^2 V.$$

Краевая задача для скалярного потенциала  $V(x, y, z)$  (функции Грина) имеет вид

$$\begin{cases} \Delta V + k^2 V = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0); \\ \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Нормированные функции поперечного сечения, удовлетворяющие краевому условию второго рода, имеют вид  $\frac{2}{\sqrt{ab}} \cos \frac{\pi n x}{a} \times \cos \frac{\pi m y}{b}$ . Полное решение краевой задачи (6) будет следующее:

$$\begin{aligned} V(x, y, z) = & \frac{2}{iab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b} \cos \frac{\pi n x_0}{a} \cos \frac{\pi m y_0}{b}}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}} \times \\ & \times \exp\left(i \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} |z - z_0|\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Отличие решения (7) от решения (4) состоит в том, что суммирование по индексам  $n, m$  начинается с нулевой моды  $V_{0,0}(x, y, z) = \frac{2}{ikab} e^{ik|z-z_0|}$ , отсутствующей в (4), ей соответствует отличный от нуля векторный потенциал

$$A_{0,0}^m = \frac{2\omega\mu}{kab} e^{ik|z-z_0|} e_z. \quad (8)$$

Габариты волновода можно выбрать такими, при которых остальные моды будут нераспространяющимися, исходя из неравенства

$$\omega < \frac{\pi}{ab} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{\epsilon\mu}}.$$

Очевидно, что все компоненты полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , соответствующие единственной распространяющейся моде  $V_{0,0}(x, y, z)$ , вычисленные по приведенным выше формулам, равны нулю. В то же время век-

торный потенциал (8)  $A_{0,0}^m$  не только не равен нулю и является одномерной волной, распространяющейся вдоль оси  $z$ , но и существует во всем пространстве (при всех  $x, y$ ), в том числе и всюду за пределами волновода как незатухающая волна. Другими словами, металлические стенки волновода не являются для этого поля непроницаемым экраном. При этом остальные нераспространяющиеся моды хотя и могут быть формально продолжены по координатам  $x, y$  за пределы волновода, но, являясь экспоненциально убывающими вдоль оси  $z$ , обращаются практически в нуль достаточно быстро при удалении от плоскости  $z = z_0$ .

Еще один аспект рассматриваемой математической модели связан с эффектом прямого видения. В [6–8] было показано, что многие оптические явления, наблюдаемые в этих экспериментах, повторяют свойства решения краевой задачи электродинамики с неплоскими границами, построенного обобщением метода статических изображений (метода Граве) для стационарного волнового уравнения. Единственное явление, которое не отражено в данной работе, – это возможность прямого видения предметов, закрытых от наблюдателя (испытуемого) непроницаемым для электромагнитного поля (света) металлическим кожухом. Принимая во внимание вышеизложенное, можно предположить с достаточным основанием, что этот тип видения явно связан с полем векторного потенциала, для которого металлические границы оказываются проницаемыми. Именно этот факт, по-видимому, определяет регистрацию нескольких патентов [9], связанных с использованием векторного потенциала для целей коммуникации.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Трухан Э.М., Аносов В.Н. *Биофизика*, 2007, т. 52, вып. 2, с. 376–381.
- [2] Трухан Э.М. Воздействие слабых магнитных полей на биологическую активность водной фазы. *Компьютерные исследования и моделирование*, т. 1, № 1, 2009, с. 101–108.
- [3] Имри Дж., Уэбб Р. Квантовая интерференция и эффект Ааронова – Бома. *В мире науки*, 1986, № 6, с. 24–31.
- [4] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике*. Т. 9: *Квантовая механика* (II). Москва, Мир, 1967, 259 с.
- [5] Tonomura A., Osakabe N., Matsuda T. Evidence for Aharonov – Bohm Effect with Magnetic Field Completely Shielded from Electron Wave. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, vol. 56, pp. 792–795.
- [6] Апельцин В.Ф. *Метод отражений в электростатике и электродинамике как ноуменальная модель взаимодействия полей с металлическими поверхностями*. Сб. докл. II Международной конференции «Торсионные поля и информационные взаимодействия-2010». Тамбов, 28–29 сентября 2010 г., ТГТУ, 2010, с. 156–160.

- [7] Полетаев А.И. *Некоторые результаты физических исследований «прямого видения»*. Сб. докл. II Международной конференции «Торсионные поля и информационные взаимодействия-2009». Сочи, 25–29 августа 2009 г, Москва, 2009, с. 87–92.
- [8] Пытьев Ю.П. Феномен видения с закрытыми глазами. *Биомедицинская радиоэлектроника*, 2000, № 5, с. 43–49.
- [9] Н.Е. Puthoff Communication method and apparatus with signal comprising scalar and vector potentials without electromagnetic fields. Patent US 5.845.220, Dec 01, 1998.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Апельцин В.Ф., Полетаев А.И. О влиянии металлических экранов на поле векторного потенциала. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/955.html>

**Апельцин Виктор Филиппович** родился в 1944 г., окончил Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1968 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 80 научных работ в области численных и аналитических методов исследования краевых задач электродинамики. e-mail: [vapeltsin@hotmail.com](mailto:vapeltsin@hotmail.com).

**Полетаев Андрей Игоревич** родился в 1945 г., окончил Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1968 г. Д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Центра теоретических проблем физико-химической фармакологии РАН. Автор 120 научных работ в области биофизики, молекулярной биологии. e-mail: [ap2006@ Rambler.ru](mailto:ap2006@ Rambler.ru).