УДК 531+621.865.8+629.78

Рекуррентный алгоритм вычисления коэффициентов уравнений динамики в замкнутой форме космического манипулятора

© Н.А. Яскевич

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрен новый рекуррентный алгоритм вычисления коэффициентов уравнений динамики в замкнутой форме для простой кинематической цепи, разработанный на основе матричной записи уравнений Кейна. Алгоритм имеет вычислительную эффективность O(n³) и предназначен для моделирования движения космических манипуляторов с вращательными шарнирами, позволяет учитывать упругие деформации звеньев и использовать параллельные вычисления.

Ключевые слова: *космический манипулятор, уравнения динамики, рекуррентный алгоритм, вычислительная эффективность, упругие деформации.*

Вычислительная механика системы твердых и деформируемых тел развивается с конца 1950-х годов (с момента появления первых серийных компьютеров). Основные направления развития теории моделирования динамики таких систем на современном этапе проанализированы в работе [1]. Из уравнений в замкнутой форме вычислительно наиболее эффективен рекуррентный алгоритм, предложенный Ю.А. Степаненко и имеющий вычислительную эффективность $O(n^2)$, где n – число степеней свободы системы [2]. Позднее он был назван алгоритмом составного твердого тела (Composite Rigid Body Algorithm, CRBA) [3]. Алгоритм основан на многократном использовании более простого алгоритма решения обратной задачи динамики. По эффективности ($O(n^3)$) близким к последнему алгоритму является алгоритм «косынка» [4]. Его рекуррентные соотношения основаны на записи уравнений движения в блочно-матричной форме, что расширяет его возможности, в частности, при моделировании систем деформируемых тел.

В настоящей статье предложен новый алгоритм расчета коэффициентов уравнений динамики механических систем со структурой простой кинематической цепи. Алгоритм имеет эффективность $O(n^3)$ и основан на аналитической записи уравнений динамики. Исходной точкой для его получения являются уравнения Кейна [5]. Их перспективность для разработки новых алгоритмов моделирования динамики механических систем была отмечена в работе [1].

В данной работе рассмотрена механическая система в виде простой кинематической цепи N тел, соединенных шарнирами с одной степенью свободы во вращательном относительном движении. Общее число степеней свободы системы равно числу ее тел $(n = N)$. Такой вид системы обусловлен конструкцией космических манипуляторов, что в свою очередь связано с внешними условиями их работы и характером выполняемых операций.

В системе обозначений, принятой для описания геометрических и инерционных свойств механической системы, компоненты большинства векторов выражены в базовой (инерциальной) системе координат. При использовании локальных систем координат тел их номера указываются в качестве верхнего индекса векторов или матриц. Системы координат, применяемые для описания двух смежных тел простой кинематической цепи, приведены на рисунке. В j-м шарнире локальный базис j-го тела $\mathbf{x}_j\mathbf{y}_j\mathbf{z}_j$ перемещается относительно локального базиса $\mathbf{x}^o_{j-1}\mathbf{y}^o_{j-1}\mathbf{z}^o_{j-1}$ предшествующего $(j-1)$-го тела. При этом $\boldsymbol{\alpha}_j$ – матрица преобразования поворота из базиса $\mathbf{x}^o_{j-1}\mathbf{y}^o_{j-1}\mathbf{z}^o_{j-1}$ в базис $\mathbf{x}_j\mathbf{y}_j\mathbf{z}_j$, $\mathbf{t}_j$ – вектор относительного поступательного перемещения. Постоянные вектор $\mathbf{l}^{(j-1)}_{j-1}$ и матрица $\boldsymbol{\gamma}_{j-1}$ определяют положение базиса $\mathbf{x}^o_{j-1}\mathbf{y}^o_{j-1}\mathbf{z}^o_{j-1}$ относительно базиса $\mathbf{x}_{j-1}\mathbf{y}_{j-1}\mathbf{z}_{j-1}$ в предшествующем $(j-1)$-м теле. Инерционные характеристики j-го тела определяются массой m_j, радиус-вектором $\mathbf{d}^{(j)}_j$ центра масс относительно базиса $\mathbf{x}_j\mathbf{y}_j\mathbf{z}_j$ и тензором инерции $\mathbf{I}^{(j)}_j$.

Кинематика такой механической системы описывается следующими рекуррентными соотношениями:

$$\boldsymbol{\theta}_j = \boldsymbol{\gamma}_{j-1}\boldsymbol{\tau}_{j-1};\ \boldsymbol{\tau}_j = \boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\theta}_j;\ \mathbf{r}_{j-1,j} = \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}_{j-1}(\mathbf{l}_{j-1} + \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}_{j-1}\mathbf{t}_j);$$

$$\mathbf{R}^{rel}_j = \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}_j\mathbf{R}^{rel\,(j)}_j;\ \mathbf{T}^{rel}_j = \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}_j\mathbf{T}^{rel\,(j)}_j;\ \mathbf{v}^{rel}_j = \mathbf{T}^{rel}_j\dot{\mathbf{q}};\ \boldsymbol{\omega}^{rel}_j = \mathbf{R}^{rel}_j\dot{\mathbf{q}};$$

$$\boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}_{j-1} + \boldsymbol{\omega}^{rel}_j;\ \mathbf{R}_j = \mathbf{R}_{j-1} + \mathbf{R}^{rel}_j;$$

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{T}_{j-1} + \tilde{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}_{j-1,j}\mathbf{R}_{j-1} + \mathbf{T}^{rel}_j;\ \boldsymbol{\varepsilon}_j = \boldsymbol{\varepsilon}_{j-1} + \boldsymbol{\omega}_{j-1}\times\boldsymbol{\omega}^{rel}_j;$$

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{w}_{j-1} + \mathbf{E}_{j-1}\mathbf{r}_{j-1,j} + 2\boldsymbol{\omega}_{j-1}\times\mathbf{v}^{rel}_j,$$

где $\mathbf{r}_{j-1,j}$ – вектор из точки O_{j-1} в точку O_j; $\mathbf{q}$ – вектор обобщенных координат размерностью $n\times 1$; $\mathbf{v}^{rel}_j$, $\boldsymbol{\omega}^{rel}_j$ – векторы относительных поступательной и угловой скоростей в j-м шарнире; $\mathbf{v}_j$, $\boldsymbol{\omega}_j$ – абсолютная скорость точки O_j и абсолютная угловая скорость j-го тела; $\mathbf{R}_j^{rel\,(j)} = \partial \boldsymbol{\omega}_j^{rel\,(j)} / \partial \dot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{T}_j^{rel\,(j)} = \partial \mathbf{v}_j^{rel\,(j)} / \partial \dot{\mathbf{q}}$ и $\mathbf{R}_j = \partial \boldsymbol{\omega}_j / \partial \dot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{T}_j = \partial \mathbf{v}_j / \partial \dot{\mathbf{q}}$ – матрицы размерностью $3 \times n$; $\varepsilon_j, \mathbf{w}_j$ – векторы составляющих абсолютных ускорений, нелинейно зависящих от $\dot{\mathbf{q}}$; $\mathbf{E}_j = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_j + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j$; $\tilde{\mathbf{a}}$ – кососимметрическая матрица, составленная из компонент вектора $\mathbf{a}$, $\tilde{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Постоянный вектор $\mathbf{c}_j^{(j)} = m_j \mathbf{d}_j^{(j)}$ вычисляется однократно до начала процесса интегрирования уравнений движения, где m – масса звена. В базовую систему координат инерционные характеристики j-го тела преобразуются с помощью соотношений вида

$$\mathbf{c}_j = \boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{т}} \mathbf{c}_j^{(j)};\ \mathbf{I}_j = \boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{т}} \mathbf{I}_j^{(j)} \boldsymbol{\tau}_j.$$

На систему действуют внешние силы и моменты

$$\mathbf{f}_{l,j}^{E} = \boldsymbol{\tau}_{l,j}^{\mathrm{т}} \mathbf{f}_{l,j}^{E\,(j)};\ \mathbf{m}_{l,j}^{E} = \boldsymbol{\tau}_{l,j}^{\mathrm{т}} \mathbf{m}_{l,j}^{E\,(j)},$$

а также внутренние силы и моменты $\mathbf{f}_j^{J\,(j)}$, $\mathbf{m}_j^{J\,(j)}$ в шарнирах.

Матрица $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ обобщенной инерции размерностью $n \times n$ и вектор $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ обобщенных сил размерностью $n \times 1$ в уравнениях динамики в замкнутой форме

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\, \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tag{1}$$

могут быть определены с помощью алгоритма, полученного из уравнений Кейна [5],

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \mathbf{T}_j^{\mathrm{т}} m_j \mathbf{T}_j + \mathbf{T}_j^{\mathrm{т}} \tilde{\mathbf{c}}_j \mathbf{R}_j + [\mathbf{T}_j^{\mathrm{т}} \tilde{\mathbf{c}}_j^{\mathrm{т}} \mathbf{R}_j]^{\mathrm{т}} + \mathbf{R}_j^{\mathrm{т}} \mathbf{I}_j \mathbf{R}_j \right\}; \tag{2}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^{N} [\mathbf{T}_j^{\mathrm{т}} \mathbf{f}_j^{IE} + \mathbf{R}_j^{\mathrm{т}} \mathbf{m}_j^{IE}] + \sum_{j=1}^{N} [\mathbf{T}_j^{rel(j)\mathrm{т}} \mathbf{f}_j^{J\,(j)} + \mathbf{R}_j^{rel(j)\mathrm{т}} \mathbf{m}_j^{J\,(j)}], \tag{3}$$

где $\mathbf{f}_j^{J\,(j)}, \mathbf{m}_j^{J\,(j)}$ – векторы сил и моментов, развиваемых приводами шарниров. Суммарные векторы инерционных и внешних сил и моментов находятся по выражениям

$$\mathbf{f}_j^{IE} = \mathbf{f}_j^{E} - m_j \mathbf{w}_j - \mathbf{E}_j \mathbf{c}_j;\ \mathbf{m}_j^{IE} = \mathbf{m}_j^{E} - \tilde{\mathbf{c}}_j \mathbf{w}_j - \mathbf{I}_j \boldsymbol{\varepsilon}_j - \mathbf{m}_{\omega,j},$$

где $\mathbf{E}_j = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_j + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j$; $\mathbf{m}_{\omega,j} = \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{I}_j \boldsymbol{\omega}_j$.

Этот алгоритм имеет вычислительную эффективность $O(n^3)$, вследствие того, что матрицы $\mathbf{T}_j$ и $\mathbf{R}_j$ (размерность $3 \times n$) входят в каждое из $n = N$ слагаемых суммы (2).

Матрицы $\mathbf{T}_j$ и $\mathbf{R}_j$ содержат одинаковые столбцы, соответствующие обобщенным скоростям в предшествующих шарнирах. Поэтому предлагаемый новый рекуррентный алгоритм основан на изменении порядка суммирования, что обеспечивает увеличение его вычислительной эффективности. Далее с учетом составления уравнений динамики космических манипуляторов рассматриваются только шарниры вращательного типа. В результате $\mathbf{T}_j^{rel}=0$, что упрощает суммы (2) и (3) и уменьшает количество необходимых вычислений в (1).

На первом этапе рекуррентно вычисляются векторы $\mathbf{r}_{i,j}$ из исходного базиса каждого очередного i-го тела в исходные базисы всех последующих тел

$$\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{r}_{i,i+1} + \mathbf{r}_{i+1,j},\ i = \overline{1, N-1},\ j = \overline{N,\ i+1}.$$

Затем только при наличии в кинематической цепи поступательных шарниров определяются векторы, обеспечивающие расчет центробежного момента инерции механической системы относительно каждой кинематической пары

$$\mathbf{c}_{i,i} = \mathbf{c}_i,\ i = \overline{N, 1};$$

$$\mathbf{c}^*_{i,j} = m_j \mathbf{r}_{i,j} + \mathbf{c}_j,\ i = \overline{1, N-1},\ j = \overline{N,\ i+1}.$$

Рекуррентное вычисление сумм, определяющее инерционные параметры подцепей простой кинематической цепи, а также действующие на нее суммарные силы и моменты, выполняются в следующей последовательности.

1. Суммарная масса тел от последнего до j-го включительно (только при наличии в кинематической цепи поступательных шарниров)

$$m_N^{\Sigma} = m_N;\ m_j^{\Sigma} = m_j + m_{j+1}^{\Sigma},\ j = \overline{N-1,\ 1}.$$

2. Матрицы инерции, обусловленные удаленностью от очередного i-го шарнира центров масс последующих тел от последнего до j-го включительно (только для вращательных шарниров)

$$\mathbf{I}_j^{\Sigma,1} = \mathbf{I}_N;$$

$$\mathbf{I}_j^{\Sigma,1} = \mathbf{I}_j^{\Sigma,1} + \mathbf{I}_{j+1}^{\Sigma,1},\ j = \overline{N-1,\ 1};$$

$$\mathbf{I}_{i,N}^{\Sigma,2} = m_N\,(\,\tilde{\mathbf{r}}_{i,N}\tilde{\mathbf{r}}^{\mathrm{т}}_{i,N}\,),\ \ i = \overline{N-1,\ 1};$$

$$\mathbf{I}_{i,j}^{\Sigma,2} = m_j(\tilde{\mathbf{r}}_{i,j}\tilde{\mathbf{r}}_{i,j}^{\text{т}}) + \mathbf{I}_{i,j+1}^{\Sigma,2},\ i = \overline{N-2,\ 1},\ \ j = \overline{N-1,\ i+1};$$

$$\mathbf{I}_{i,j,N}^{\Sigma,3} = \tilde{\mathbf{c}}_{i,N}^{*}\tilde{\mathbf{r}}_{j,N}^{\text{т}},\ i = \overline{N-2,\ 1},\ \ j = \overline{N-1,\ i+1},\ \ k = N;$$

$$\mathbf{I}_{i,j,k}^{\Sigma,3} = \tilde{\mathbf{c}}_{i,k}^{*}\tilde{\mathbf{r}}_{j,k}^{\text{т}} + \mathbf{I}_{i,j,k+1}^{\Sigma,3},\ i = \overline{N-3,\ 1},\ j = \overline{N-2,\ i+1},\ k = \overline{N-1,\ j+1};$$

$$\mathbf{I}_{i,N-1}^{\Sigma,4} = \mathbf{I}_{i,N-1,N}^{\Sigma,3},\ i = \overline{N-2,\ 1};$$

$$\mathbf{I}_{i,j}^{\Sigma,4} = \mathbf{I}_{i,j,j+1}^{\Sigma,3},\ i = \overline{N-3,\ 1},\ \ j = \overline{N-2,\ i+1};$$

$$\mathbf{I}_{i,N}^{\Sigma,5} = \tilde{\mathbf{c}}_N\tilde{\mathbf{r}}_{i,N}^{\text{т}},\ i = \overline{N-1,\ 1};$$

$$\mathbf{I}_{i,j}^{\Sigma,5} = \tilde{\mathbf{c}}_j\tilde{\mathbf{r}}_{i,j}^{\text{т}} + \mathbf{I}_{i,j+1}^{\Sigma,5},\ i = \overline{N-2,\ 1},\ j = \overline{N-1,\ i+1}.$$

3. Суммарные матрицы инерции размерностью 3×3 относительно i-го шарнира, которые обусловлены последующими телами от последнего до j-го ($j \ge i$) включительно (только для вращательных шарниров)

$$\mathbf{I}_{N,N}^{\Sigma} = \mathbf{I}_N^{\Sigma,1};$$

$$\mathbf{I}_{i,i}^{\Sigma} = \mathbf{I}_i^{\Sigma,1} + \mathbf{I}_{i,i+1}^{\Sigma,2} + 2\mathbf{I}_{i,i+1}^{\Sigma,5},\ i = \overline{1,\ N-1};$$

$$\mathbf{I}_{i,j}^{\Sigma} = \mathbf{I}_j^{\Sigma,1} + \mathbf{I}_{i,j}^{\Sigma,5\text{т}},\ i = \overline{1,\ N-1},\ \ j = N;$$

$$\mathbf{I}_{i,j}^{\Sigma} = \mathbf{I}_j^{\Sigma,1} + \mathbf{I}_{i,j}^{\Sigma,4} + \mathbf{I}_{i,j}^{\Sigma,5\text{т}},\ i = \overline{1, N-2},\ j = \overline{i+1, N-1}.$$

4. Суммарные внешние и инерционные силы и моменты тел от последнего до j-го включительно

$$\mathbf{f}_N^{\Sigma} = \mathbf{f}_N^{IE};$$

$$\mathbf{f}_j^{\Sigma} = \mathbf{f}_j^{\Sigma} + \mathbf{f}_{j+1}^{\Sigma},\ \ j = \overline{N-1,\ 1};$$

$$\mathbf{m}_N^{\Sigma,1} = \mathbf{m}_N^{IE};$$

$$\mathbf{m}_j^{\Sigma,1} = \mathbf{m}_j^{\Sigma,1} + \mathbf{m}_{j+1}^{\Sigma,1},\ \ j = \overline{N-1,\ 1};$$

$$\mathbf{m}_N^{\Sigma} = \mathbf{m}_N^{\Sigma,1};$$

$$\mathbf{m}_j^{\Sigma} = \mathbf{m}_j^{\Sigma,1} + \sum_{k=N}^{j+1}\tilde{\mathbf{r}}_{j,k}\mathbf{f}_k^{IE},\ j = \overline{N-1,\ 1}.$$

На основе приведенных выше рекуррентно вычисляемых сумм определяются непересекающиеся множества элементов симметричной матрицы обобщенной инерции $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ размерностью $n \times n$:

$$\mathbf{A}_{j \geq i}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i}^{N} \mathbf{R}_i^{rel\,\mathrm{T}} \mathbf{I}_{i,j}^{\Sigma,rr} \mathbf{R}_j^{rel},$$

и непересекающиеся множества элементов вектора обобщенных сил $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ размерностью $n \times 1$:

$$\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2;\ \mathbf{b}_1 = \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{R}_j^{rel\,\mathrm{T}} \mathbf{m}_j^{\Sigma} + \mathbf{R}_N^{rel\,\mathrm{T}} \mathbf{m}_N^{\Sigma,1};$$

$$\mathbf{b}_2 = \sum_{j=1}^{N} [\mathbf{R}_j^{rel(j)\,\mathrm{T}} \mathbf{m}_j^{J(j)}].$$

Матрица $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ симметричная, поэтому элементы, расположенные ниже главной диагонали, определяются из элементов, находящихся выше главной диагонали.

Сравнительная оценка вычислительных затрат расчета матрицы обобщенной инерции простой кинематической цепи, состоящей из N тел, с помощью матричной записи уравнений Кейна и уравнений для рекуррентного алгоритма приведена в таблице. Оценка объема вычислений, необходимых для алгоритма «косынка», взята из работы [6].

Оценка вычислительных затрат при расчете матрицы обобщенной инерции для простой кинематической цепи, состоящей из N тел, при наличии только вращательных шарниров

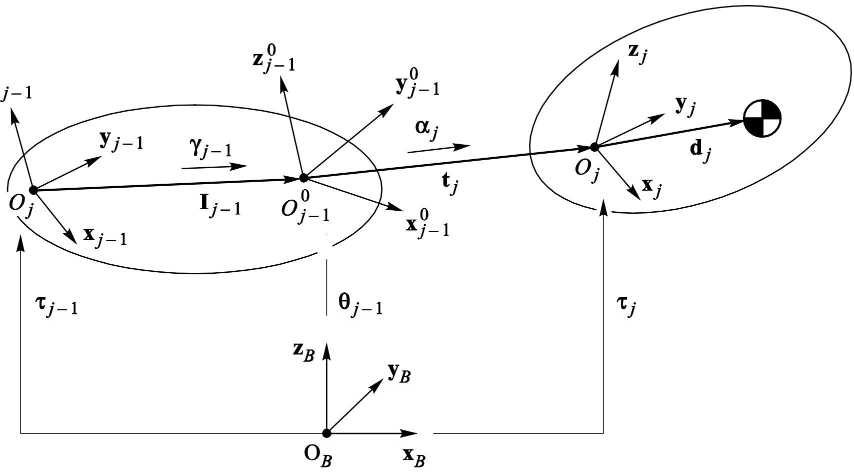
Вектор, матрица	Число	
	умножений	сложений
Соотношения, общие для двух алгоритмов		
$\boldsymbol{\theta}_j = \boldsymbol{\gamma}_{j-1} \boldsymbol{\tau}_{j-1}$	$27N$	$18N$
$\boldsymbol{\tau}_j = \boldsymbol{\alpha}_j \boldsymbol{\theta}_j$	$27N$	$18N$
$\mathbf{r}_{j-1,j} = \boldsymbol{\tau}_{j-1}^{\mathrm{T}} (\mathbf{l}_{j-1} + \boldsymbol{\gamma}_{j-1}^{\mathrm{T}} \mathbf{t}_j)$	$18N$	$15N$
$\mathbf{R}_j^{rel} = \boldsymbol{\theta}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_j^{rel(j)}$	$9N$	$6N$
$\mathbf{c}_j^{(j)} = m_j \mathbf{d}_j^{(j)}$	$3N$	0

Продолжение табл.

Вектор, матрица	Число	
	умножений	сложений
$\mathbf{c}_j = \boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{т}} \mathbf{c}_j^{(j)}$	$9N$	$6N$
$\mathbf{I}_j = \boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{т}} \mathbf{I}_j^{(j)} \boldsymbol{\tau}_j$	$54N$	$36N$
Всего для общих соотношений	$147N$	$99N$
Всего операций для общих соотношений	$246N$	
Матричная запись уравнений Кейна		
$\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_{j-1} + \mathbf{R}_j^{rel}$	0	$3N^2$
$\mathbf{T}_j = \mathbf{T}_{j-1} + \tilde{\mathbf{r}}_{j-1,j}^{\mathrm{т}} \mathbf{R}_{j-1}$	$9N^2$	$9N^2$
$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{N} \{ \mathbf{T}_j^{\mathrm{т}} m_j \mathbf{T}_j + \mathbf{T}_j^{\mathrm{т}} \tilde{\mathbf{c}}_j^{\mathrm{т}} \mathbf{R}_j +$ $+ [\mathbf{T}_j^{\mathrm{т}} \tilde{\mathbf{c}}_j^{\mathrm{т}} \mathbf{R}_j]^{\mathrm{т}} + \mathbf{R}_j^{\mathrm{т}} \mathbf{I}_j \mathbf{R}_j \}$	$9N^3 + 21N^2$	$7N^3 + 13N^2$
Всего для уравнений Кейна	$9N^3 + 30N^2$	$7N^3 + 25N^2$
Всего операций для уравнений Кейна	$16N^3 + 55N^2 + 246N$	
Рекуррентный алгоритм		
$\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{r}_{i,i+1} + \mathbf{r}_{i+1,j}$, $i = \overline{1,\ N-1}$; $j = \overline{N,\ i+1}$	0	$1{,}5N^2 – 1{,}5N$
$\mathbf{c}_{i,j}^{*} = m_j \mathbf{r}_{i,j} + \mathbf{c}_j$, $i = \overline{1,\ N-1}$; $j = \overline{N,\ i+1}$	$1{,}5N^2 – 1{,}5N$	$1{,}5N^2 – 1{,}5N$
$m_j^{\Sigma} = m_j + m_{j+1}^{\Sigma}$, $j = \overline{N-1,\ 1}$	0	$N – 1$
$\mathbf{I}_j^{\Sigma,1} = \mathbf{I}_j^{\Sigma,1} + \mathbf{I}_{j+1}^{\Sigma,1}$, $j = \overline{N-1,1}$,	0	$9N – 9$
$\mathbf{I}_{i,N}^{\Sigma,2} = m_N (\tilde{\mathbf{r}}_{i,N} \tilde{\mathbf{r}}_{i,N}^{\mathrm{т}})$, $i = \overline{N-1,\ 1}^{*}$	$21N – 21$	$6N – 6$
$\mathbf{I}_{i,j}^{\Sigma,2} = m_j (\tilde{\mathbf{r}}_{i,j} \tilde{\mathbf{r}}_{i,j}^{\mathrm{т}}) + \mathbf{I}_{i,j+1}^{\Sigma,2}$, $i = \overline{N-2,\ 1}$, $j = \overline{N-1,\ i+1}^{*}$	$10{,}5N^2 –$ $–31{,}5N + 21$	$7{,}5N^2 –$ $–22{,}5N + 15$
$\mathbf{I}_{i,j,N}^{\Sigma,3} = \tilde{\mathbf{c}}_{i,N}^{*} \tilde{\mathbf{r}}_{j,N}^{\mathrm{т}}$, $i = \overline{N-2,\ 1}$, $j = \overline{N-1,\ i+1}$, $k = N^{*}$	$6N^2 – 8N + 12$	$3N^2 – 9N + 6$

Окончание табл.

Вектор, матрица	Число	
	умножений	сложений
$\mathbf{I}^{\Sigma,3}_{i,j,k}=\tilde{\mathbf{c}}^{*}_{i,k}\tilde{\mathbf{r}}^{\mathrm{т}}_{j,k}+\mathbf{I}^{\Sigma,3}_{i,j,k+1},\ i=\overline{N-3,1}$, $j=\overline{N-2,i+1},\ k=\overline{N-1,j+1}^{*}$	$2N^3$–$12N^2$+ +$22N$–12	$2{,}5N^3$–$5N^2$+ +$27{,}5N$–15
$\mathbf{I}^{\Sigma,4}_{i,N-1}=\mathbf{I}^{\Sigma,3}_{i,N-1,N},\ i=\overline{N-2,1}$	0	0
$\mathbf{I}^{\Sigma,4}_{i,j}=\mathbf{I}^{\Sigma,3}_{i,j,j+1},\ i=\overline{N-3,1},\ \ j=\overline{N-2,i+1}$	0	0
$\mathbf{I}^{\Sigma,5}_{i,N}=\tilde{\mathbf{c}}_{N}\tilde{\mathbf{r}}^{\mathrm{т}}_{i,N},\ i=\overline{N-1,1}^{*}$	$12N$–12	$6N$–6
$\mathbf{I}^{\Sigma,5}_{i,j}=\tilde{\mathbf{c}}_{j}\tilde{\mathbf{r}}^{\mathrm{т}}_{i,j}+\mathbf{I}^{\Sigma,5}_{i,j+1},\ i=\overline{N-2,1}$, $j=\overline{N-1,i+1}^{*}$	$6N^2$–$8N$+12	$7{,}5N^2$– $22{,}5N$+15
$\mathbf{I}^{\Sigma}_{N,N}=\mathbf{I}^{\Sigma,1}_{N}$	0	0
$\mathbf{I}^{\Sigma}_{i,i}=\mathbf{I}^{\Sigma,1}_{i}+\mathbf{I}^{\Sigma,2}_{i,i+1}+2\mathbf{I}^{\Sigma,5}_{i,i+1},\ i=\overline{1,N-1}$	0	$27N$–27
$\mathbf{I}^{\Sigma}_{i,j}=\mathbf{I}^{\Sigma,1}_{j}+\mathbf{I}^{\Sigma,5\mathrm{т}}_{i,j},\ i=\overline{1,N-1},\ \ j=N$	0	$9N$–9
$\mathbf{I}^{\Sigma}_{i,j}=\mathbf{I}^{\Sigma,1}_{j}+\mathbf{I}^{\Sigma,4}_{i,j}+\mathbf{I}^{\Sigma,5\mathrm{т}}_{i,j},\ i=\overline{1,N-2}$, $j=\overline{i+1,N-1}$	0	$9N^2$–$7N$+18
$\mathbf{A}^{rr}_{j\geq i}=\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=i}^{N}\mathbf{R}^{rel\,\mathrm{т}}_{i}\mathbf{I}^{\Sigma}_{i,j}\mathbf{R}^{rel}_{j}$	$6N^2$+$6N$	$4N^2$+$4N$
Всего для рекуррентного алгоритма	$2N^3$+$18N^2$– –$8N$	$2{,}5N^3$+$19N^2$+ +$5{,}5N$–19
Всего операций для рекуррентного алгоритма	$4{,}5N^3$+$37N^2$+$243{,}5N$–19	
Алгоритм «косынка»	$3N^3$+$24N^2$– –$9N$	$11N^3$+$105N^2$– –$50N$
Алгоритм «косынка» всего вычислений	$14N^3$+$129N^2$–$59N$	
* Умножение кососимметричных матриц выполняется по специальному алгоритму, учитывающему их структуру и обеспечивающему исключение избыточных вычислений.		



Системы координат смежных тел простой кинематической цепи

Заключение. Получен новый рекуррентный алгоритм расчета инерционных коэффициентов уравнений динамики в замкнутой форме. Его вычислительная эффективность составляет $O\,(n^3)$, это эффективнее, чем у других используемых в настоящее время алгоритмов. Заметное преимущество достигается при большом числе звеньев, вследствие чего можно эффективно использовать алгоритм для расчета динамики манипулятора с учетом упругих деформаций методом твердотельных конечных элементов. Кроме того, поскольку соотношения, описывающие алгоритм, вычисляются независимо, при его реализации предполагается применять параллельные вычисления, что также повысит его эффективность.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Featherstone R., Orin D. Robot dynamics: equations and algorithms. *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, San Francisco, CA, April 2000, pp. 826–834.

[2] Степаненко Ю.А. Алгоритм анализа динамики пространственных механизмов с разомкнутой кинематической цепью. *Механика машин*. Москва, Наука, 1974, вып. 44, с. 77–88.

[3] Featherstone R. The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias. *International Journal of Robotic Research*, vol. 2, no. 1, 1983 pp. 13–30.

[4] Лесков А.Г., Ющенко А.С. *Моделирование и анализ робототехнических систем*. Москва, Машиностроение, 1992, 80 с.

[5] Kane T.R., Wang C.F.On the derivation of equations of motion. *Journal of the Society of Industrial and applied mathematics*, vol. 13, no. 2, June 1965, pp. 487–492.

[6] Лесков А.Г. *Теоретические основы моделирования и анализа динамики манипуляционных роботов, их приложение к задачам проектирования и подготовки операторов*. Дис. … д-ра техн. наук. Москва, 2002, 329 с.

Статья поступила в редакцию 19.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Яскевич Н.А. Рекуррентный алгоритм вычисления коэффициентов уравнений динамики в замкнутой форме для космического манипулятора. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 8.
URL: http://engjournal.ru/catalog/pribor/robot/939.html

Яскевич Никита Андреевич – аспирант кафедры «Специальная робототехника и мехатроника» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области робототехники и мехатроники. e-mail: nikita.yaskevich@gmail.com