УДК 531.36;517.977

Проблема устойчивости в теории и практике формирования моделей динамических систем

© И.К. Романова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены проблемы формирования моделей динамических систем пониженного порядка, а именно сохранение свойства устойчивости и получение редуцированных моделей для неустойчивых систем. Проведен сравнительный анализ методов получения моделей пониженного порядка с позиции их устойчивости. Даны рекомендации по использованию методов для решения задачи моделирования динамики управляемого и неуправляемого движения устойчивых и неустойчивых объектов.

Ключевые слова: *редукция, устойчивость, линейные и нелинейные динамические системы, система управления, наблюдаемость и управляемость.*

Введение. Моделирование как способ научного познания реальной действительности предполагает использование модели в качестве эквивалента, который в определенных существенных структурах и отношениях аналогичен предмету исследования. Обоснованность применения этого метода невозможна без решения проблем достоверности получаемого знания и сохранения важнейших свойств исходной физической системы.

При формировании моделей динамических систем, в частности управляемых объектов, возникает практическая потребность достижения приемлемых размеров указанных моделей [1, 2]. Важнейшим требованием является сохранение свойства устойчивости при переходе от большеразмерной модели к редуцированной системе. Потеря устойчивости делает бесполезным, и даже вредным, применение такой модели, в связи с чем целесообразно сохранить исходную модель. Поэтому необходимо оценить возможности и границы применения методов редукции с позиции устойчивости.

Существует еще одна сторона проблемы: возможность применения методов редукции к системам, не обладающим устойчивостью, и сохранение свойств исходной системы в формируемой модели. Этим проблемам и будет посвящена настоящая статья.

Модели системы. Модель системы без ограничений на свойства линейности можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x,u); \\ &y = h(x),\ x \in \Re^n, u \in \Re^m, y \in \Re^p, \end{aligned} \qquad (1)$$

где x, u, y – вектора фазовых координат размерностью n, m и p.

Частными случаями являются представление линейной системы в пространстве состояний

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t); \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2}$$

(причем в некоторых методах матрица D принимается нулевой), а также неуправляемая система общего вида, которую можно привести к виду задачи для системы управления добавлением входа и выхода

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + u; \\ y &= x. \end{aligned} \tag{3}$$

Определение устойчивости. Для систем вида (2) справедлива теорема: система внутренне устойчива, если для собственных значений матрицы A выполняется условие

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0. \tag{4}$$

Критерий Ляпунова позволяет утверждать следующее: матрица A устойчива, т. е. выполняется условие (4), если для любой положительно определенной (симметричной) матрицы Q существует такая положительно определенная (симметричная) матрица P, что

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = -Q, \tag{5}$$

причем решение матрицы P для матрицы Q единственно и имеет вид

$$P = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}t} Q \mathrm{e}^{At} dt.$$

Физический смысл этого критерия соотносится со свойством энергии: если общая энергия динамической системы непрерывно рассеивается, тогда система называется устойчивой и стремится к точке равновесия. Если величину $V(x(t)) = x^{\mathrm{т}}(t)Px(t)$ можно рассмотреть как общую энергию, связанную с реализацией (2), то в устойчивой системе энергия должна распадаться со временем и определяться по дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = x^{\mathrm{т}}(t)(PA + A^{\mathrm{T}}P)x(t) = -x^{\mathrm{т}}(t)Qx(t). \tag{6}$$

Для систем управления полезно определение: система внутренне устойчива, если все сигналы, содержащие как измеряемые, так и неизмеряемые составляющие во всех компонентах, включая скрытые моды, остаются ограниченными при условии, что все входные сигналы (в любом возможном положении) и начальные условия ограниченны.

Метод сингулярных возмущений. Метод успешно применяется для моделей, имеющих быстрые и медленные компоненты. Сначала пренебрегают быстрыми компонентами. Затем аппроксимация улучшается повторным представлением их эффектов как коррекции «граничных условий», рассчитанные в разных временных масштабах.

Оригинальная формулировка метода сингулярных возмущений применяется для модели в виде [3]

$$\dot{x} = f(x, z, u, t, \mu)\,; \tag{7}$$

$$\mu\dot{z} = g(x, z, u, t, \mu)\,, \tag{8}$$

где $\mu > 0$ – скаляр; x, z и u – вектора размерностью n, m и r. Для $\mu = 0$ порядок $(n+m)$ уравнений (7) и (8) сокращается до n , а выражение (8) становится

$$0 = g(\overline{x}, \overline{z}, \overline{u}, t, 0). \tag{9}$$

Для (9) корни имеют вид

$$\overline{z} = \varphi(\overline{x}, \overline{u}, t). \tag{10}$$

После подстановки (10) в (7) получим редуцированную модель

$$\dot{\overline{x}} = f\left[\overline{x}, \varphi(\overline{x}, \overline{u}, t), \overline{u}, t, 0\right] \equiv \overline{f}(\overline{x}, \overline{u}, t). \tag{11}$$

Существует специальный случай, когда функция g линейна в векторе z, тогда модель (11) единственна. Для линейной системы принято записывать рассматриваемую систему в виде

$$\dot{x} = A_{11}(t, \mu)x + A_{12}(t, \mu)z + B_1 u; \tag{12}$$

$$\mu\dot{z} = A_{21}(t, \mu)x + A_{22}(t, \mu)z + B_2 u. \tag{13}$$

Тогда корень уравнения (13) будет равен

$$\overline{z} = -A_{22}^{-1}A_{21}\overline{x} - A_{22}^{-1}B_2\overline{u} \tag{14}$$

и порождает редуцированную модель

$$\dot{\overline{x}} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\overline{x} + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)\overline{u}. \tag{15}$$

Оценка устойчивости этого метода невозможна без рассмотрения проблемы начальных условий: когда редуцированное решение $\overline{x}$, $\overline{z}$ аппроксимирует исходное решение $\overline{x}$, $\overline{z}$ и в каком смысле? Для получения ошибки с учетом выражения (14) запишем

$$z - \overline{z} = z + A_{22}^{-1}A_{21}\overline{x}\,. \tag{16}$$

Введем новую переменную, которая будет учитывать разность $\overline{x}$ и x:

$$\eta = z + A_{22}^{-1}A_{21}x + \mu M_1 x \tag{17}$$

и выберем такое число M_1, что подстановка (16) в (12) и (13) выделяет подсистему по переменной η:

$$\dot{x} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} + \mu M_2)x + A_{12}\eta; \tag{18}$$

$$\mu\dot{\eta} = (A_{22} + \mu M_3)\eta. \tag{19}$$

Существует такое $\mu^* > 0$, что значения $M_i = M_i(\mu), i = 1, 2, 3,$ ограничены для всех $\mu \in [0, \mu^*]$. Для $\mu \to 0$ собственные значения для независимой подсистемы (19) по переменной η стремятся к бесконечности как собственные значения $(1/\mu)A_{22}$. Поэтому (19) – это «быстрая» часть выражений (12) и (13), которая может быть записана как

$$\frac{d\eta(\tau)}{d\tau} = (A_{22} + \mu M_3)\eta(\tau), \tag{20}$$

где τ – масштабированное время при $\mu \geq 0$,

$$\tau = \frac{t - t_0}{\mu}, \ \ \tau = 0 \text{ для } \quad t = t_0. \tag{21}$$

Система (19) непрерывно зависит от величины μ и при $\mu = 0$ она сводится к виду

$$\frac{d\eta(\tau)}{d\tau} = A_{22}\eta(\tau), \tag{22}$$

причем при $\mu = 0$ начальное условие для (22) определяется как

$$\eta(0) = z(t_0) - \bar{z}(t_0). \tag{23}$$

Решение $\eta(\tau)$ для быстрой подсистемы (20) является входом для медленной подсистемы (18).

Сформулируем условия устойчивости метода сингулярных возмущений. Если

1) все матрицы $A_{ij}(t, \mu)$ в (12) и (13) и их производные по t и по μ ограничены и непрерывны для всех $t \geq t_0$, $\mu \in [0, \mu^*]$;
2) действительные части всех собственных значений $A_{22}(\theta, 0)$ меньше, чем фиксированное отрицательное число для всех $\theta \geq t_0$;
3) система уравнений (18), (19) равномерно асимптотически устойчива,

то существует такое $\mu^* > 0$, что система (12), (13) равномерно асимптотически устойчива для всех $\mu \in [0, \mu^*]$.

Особый интерес представляет возможность применения метода для неустойчивых систем, причем условием применимости является устойчивость решения уравнения (22).

Применим формулы (7) – (22) к модели движения летательного аппарата [1]. Для практического моделирования представим их в нормализованном виде

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ A_{21}/\mu & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2/\mu \end{bmatrix} u.$$

Матрица перестроена по компонентам $x = [\,V\ \Theta]$; $z = [\alpha\ \omega_z]$:

$$A = \begin{bmatrix} -a_{00} & -a_{04} & -a_{02} & 0 \\ a_{40} & a_{44} & a_{42} & 0 \\ -a_{40} & -a_{44} & -a_{42} & 1 \\ -a_{10} + a'_{12}a_{40} & a'_{12}a_{44} & -a_{12} + a'_{12}a_{42} & -a_{11} - a'_{12} \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} -a_{03} \\ a_{43} \\ -a_{43} \\ a'_{12}a_{43} - a_{13} \end{bmatrix}. \qquad (24)$$

Результат моделирования медленной компоненты приведен на рис. 1, *а*, зависимость выделенной быстрой компоненты от времени – на рис. 1, *б*.

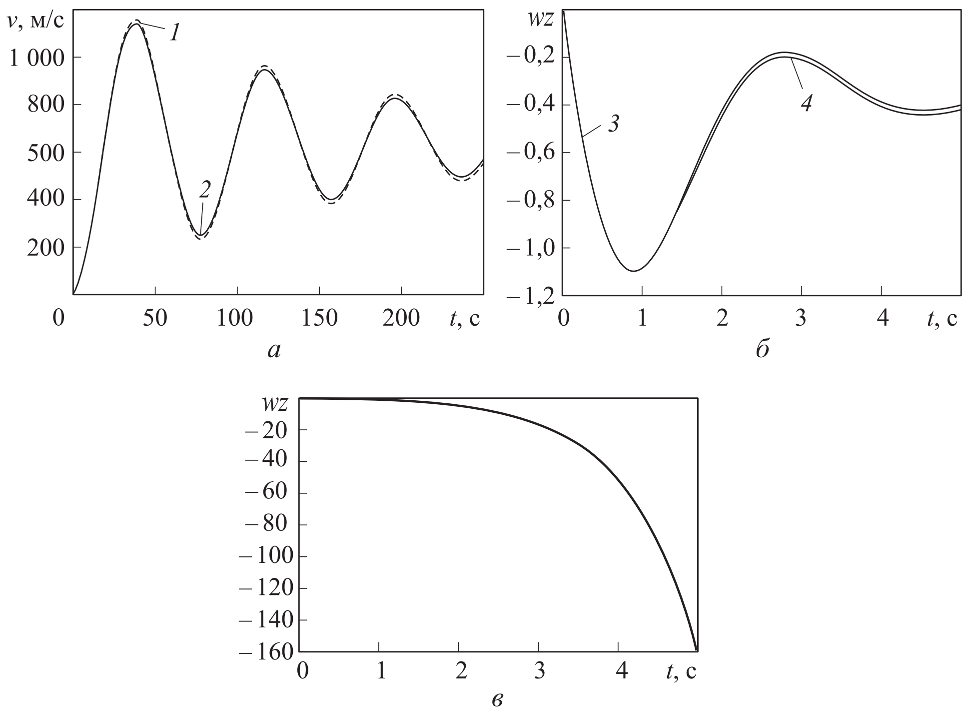

Рис. 1. Зависимость скорости от времени в свободном возмущенном движении для исходной (*1*) и редуцированной (*2*) систем (*а*), зависимости выделенной быстрой компоненты при точном (*3*) и приближенном (*4*) решении для угловой скорости по тангажу (*б*) и для угла атаки неустойчивой системы (*в*)

Расчеты также были проведены для неустойчивой системы. Физический смысл неустойчивости – статическая неустойчивость летательного аппарата. В рассматриваемом примере этому соответствует знак динамического коэффициента для $a_{12} < 0$. Результат моделирования быстрой компоненты приведен на рис. 1, *в*.

Запишем условие применимости метода сингулярных возмущений, для чего рассмотрим матрицу A_{22}, входящую в (22):

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -a_{42} & 1 \\ -a_{12} & -a_{11} \end{bmatrix}, \tag{25}$$

где $a_{42} = \dfrac{P + Y^{\alpha}}{mV}$; $a_{11} = -\dfrac{M_z^{\omega z}}{I_z}$; $a_{12} = -\dfrac{M_z^{\alpha}}{I_z}$.

Условие устойчивости для (22) имеет вид

$$a_{42}a_{11} + a_{12} > 0 \tag{26}$$

и совпадает с условием устойчивости летательных аппаратов.

Определим коэффициент демпфирования, при котором неустойчивая система $a_{12} < 0$ с учетом знака выражения для коэффициента будет обладать устойчивостью по критерию (26)

$$a_{11} > \frac{\text{abs}\, a_{12}}{a_{42}}. \tag{27}$$

Для рассмотренного примера a_{11}>5,17, при этом собственные значения матрицы A_{22} равны [–0,071669, –6,7253], т. е. система устойчива по быстрой компоненте. В этом случае общая матрица A имеет собственные значения [–6,7252, –0,17956,(0,047198 + 0,12132i), (0,047198 – 0,12132i)], т. е. система неустойчива (расчет производных по скорости показал, что они сильно увеличиваются). Несмотря на то, что решение по быстрой компоненте, промоделированное отдельно, устойчиво, этот результат с учетом потери устойчивости по остальным компонентам не реалистичен. Таким образом, применение метода для рассматриваемых моделей движения ограничено устойчивыми системами.

Модальный анализ. Методы редукции моделей, основанные на модальном анализе (МА), идентифицируют и сохраняют некоторые представляющие интерес моды. Метод МА, вероятно, один из самых старых методов редукции моделей. Основная идея этого метода состоит в проецировании динамики линейной системы на A-инвариантное подпространство, соответствующее доминирующим модам системы (полюса $G(s)$, собственные значения A). Очевидно, но не всегда оптимально, выбирать доминирующие моды так, чтобы определить те собственные значения, которые имеют неотрицательные или маленькие отрицательные действительные части. Как правило, эти значения доминируют над долгосрочной динамикой решения (компоненты решения, соответствующие большим отрицательным действительным частям, быстро уменьшаются и в основном играют менее важную роль). В работе [4] предложен метод для сокращения линейных систем путем построения системы более низкого порядка, которая имеет те же самые доминирующие собственные векторы и собственные значения, как первоначальная система. Идея метода заключается в том, что необходимо пренебречь собственными значениями первоначальной системы, которые являются самыми дальними от начала, и сохранить только доминирующие собственные значения и, следовательно, доминирующие постоянные времени исходной системы в сокращенной модели. Моделирование осуществляется применительно к линеаризованной модели (2). Следует отметить, что система пониженного порядка также будет моделью в пространстве состояний. Она должна иметь тот же входной вектор, как и исходная система и вектор состояний, элементы которого должны иметь физический смысл. Поэтому они должны аппроксимировать самые важные исходные переменные состояния, называемые существенными состояниями. В работе [4] показано, что метод обладает устойчивостью для устойчивых моделей. Особенно важна возможность и обязательность включения неустойчивых состояний, которые признаются доминирующими, т. е. метод имеет достаточно широкое применение.

Для рассматриваемого примера обе компоненты неустойчивы, поэтому модель сохраняется в полном виде и разделение невозможно.

Методы, основанные на декомпозиции по сингулярным значениям (SVD). Мур впервые представил балансировку (сбалансированную реализацию) в целях использования ее в качестве инструмента для редукции моделей. Главная идея состоит в соответствии сингулярных значений граммиана управляемости размеру энергии, которая должна быть передана в систему, чтобы изменять соответствующие состояния. Наибольшее влияние на поведение входа-выхода оказывают состояния, характеризующие самые большие сингулярные значения [1]. Отсечение состояний, соответствующих наименьшим сингулярным значениям, приводят к модели, свойства входа-выхода которой хорошо приближают поведение первоначальной модели.

Ответ на вопрос, сохраняет ли редуцированная модель свойства устойчивости, дает теорема Пернебо – Сильвермана [5].

Методы редукции, основанные на применении методов оптимизации. В работе [6] алгоритм роя частицы и алгоритм генетической оптимизации используются для нахождения редуцированных моделей с единственным входом и единственным выходом (SISO) для крупномасштабных линейных систем. Для заданных критериев оптимизируются параметры аппроксимации передаточной функции. Указанные методы гарантируют устойчивость модели сокращенного порядка, если первоначальная модель устойчива.

Квази кусочно-линейные методы для редукции нелинейных систем TPWL. Этот метод – один из основных методов, применяемых для решения задач редукции нелинейных систем, поэтому особенно интересно понять наличие свойств устойчивости метода. Идея метода – использование квази кусочно-линейного представления нелинейной функции

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{s-1} \tilde{w}_i(x)(f(x_i) + A_i(x - x_i)),$$

где x_i, $i = 1, \ldots, s-1$ – некоторые линеаризованные точки (состояния); $\boldsymbol{A_i}$ – Якобианы функции *f*, оцененные в состояниях x_i и $\tilde{w}_i(x)$, зависящие от состояний веса $\sum_{i=0}^{s-1} \tilde{w}_i(x) = 1$ для всех *x*. Применение указанного представления и проецирование системы вида (2) позволяет получить

$$\dot{z} = \left(\sum_{i=0}^{s-1} w_i(x) \left[V^{\mathrm{T}} f(x_i) + V^{\mathrm{T}} A_i (Vz - x_i) \right] \right) + V^{\mathrm{T}} Bu;$$

$$y = C^{\mathrm{T}} Vz.$$

Устойчивость моделей гарантируется использованием таких преобразований, которые сохраняют *A*-определенность матрицы системы.

Для нелинейной системы с функцией, удовлетворяющей условию $\exists \lambda > 0 \ \forall x \ \ x^{\mathrm{T}} f(x) \le -\lambda x^{\mathrm{T}} x$ проектируемая система $\dot{z} = V^{\mathrm{T}} f(Vz)$ также имеет вначале экспоненциально устойчивую точку равновесия. Для свободной TPWL-системы

$$\dot{z} = \sum_{i=0}^{s-1} w_i(x) \left[V^{\mathrm{T}} f(x_i) + V^{\mathrm{T}} A_i V z - V^{\mathrm{T}} A_i x_i \right]$$

условие

$$z^{\mathrm{T}} \left(\sum_{i=0}^{s-1} w_i(x) \left[V^{\mathrm{T}} f(x_i) + V^{\mathrm{T}} A_i V z - V^{\mathrm{T}} A_i x_i \right] \right) \le k_3 z^{\mathrm{T}} z$$

гарантирует показательную устойчивость системы (21). Проблемой метода является ответ на вопрос, может ли это условие быть выполнено, например, для некоторого распределения точек линеаризации или весов.

Методы, не гарантирующие устойчивость редукции. Эти методы также имеют трудности с глобальными границами ошибки, значительно зависят от выбора некоторых параметров, результирующие сокращенные модели обладают только локально хорошими свойствами приближения. Еще раз необходимо отметить, что и специальные свойства системы (стабильность или пассивность) не всегда сохраняются в сокращенной модели и обычно необходима постобработка, чтобы понять эти свойства. Перечислим методы, которые критичны к проблеме сохранения устойчивости.

1. Метод подпространств Крылова для редукции моделей, который фокусируется на соответствии коэффициентов рядов Тейлора или Макларена передаточной матрицы, однако в общем не гарантирует устойчивость редуцируемой модели [7].

2. Метод взвешенной сбалансированной редукции, который состоит в том, что для полосы частоты $[\omega_1, \omega_2]$ не рассчитываются веса, а просто используется представление граммиана в частотной области. Метод весьма эффективен на практике, но устойчивость не гарантируется и не существует границ ошибки.

3. Метод балансировки и усечения с помощью двустороннего взвешивания, предложенный Енном, фокусируется на аппроксимации исходной модели в специально указанном диапазоне значений частоты, что тоже может привести к потере устойчивости.

Стремление повысить устойчивость методов редукции привело к идеям использования вместо критерия Ляпунова (5) неравенство вида $AP + PA^{\mathrm{T}} < 0$.

Предложение автора настоящей статьи состоит в том, что этот подход может быть использован для редукции неуправляемых систем, у которых матрица B равна нулю, чему будут посвящены следующие работы автора.

Редукция неустойчивых систем. Можно выделить две технологии, используемые для редукции неустойчивых систем. Первая технология состоит в редукции только устойчивой проекции G и включении неустойчивой проекции без модификаций в результирующую редуцированную модель с помощью простой процедуры:

1) декомпозиция проекции G в виде суммы $G = G_1 + G_2$ так, что G_1 имеет только устойчивые полюсы, G_2 – только неустойчивые;

2) определение G_{1r} – редуцированной аппроксимации устойчивой части G_1;

3) сборка редуцированной модели так, что $G_r = G_{1r} + G_2$.

Вторая технология основана на вычислении устойчивой рациональной факторизации RCF для проекции G (например, в форме $G = M^{-1}N$, где M, N – устойчивые и правильно рациональные матричные передаточные функции) и редуцировании устойчивых систем $[NM]$. Из результирующей редуцированной модели $[N_rM_r]$ получим $G_r = M_r^{-1}N_r$. Самым трудным процессом является факторизация RCF [8].

Применим одну из технологий для редукции тестовой модели [9]. Решение уравнений Ляпунова для граммианов управляемости и наблюдаемости записывается как

$$L_c = \int_0^\infty \mathrm{e}^{At} BB^{\mathrm{т}} \mathrm{e}^{A^{\mathrm{т}} t} dt;$$

$$L_o = \int_0^\infty \mathrm{e}^{A^{\mathrm{т}} t} C^{\mathrm{т}} C \mathrm{e}^{At} dt.$$

Эти граммианы не могут быть применимы к неустойчивым системам, поскольку интегралы будут неограничены для неустойчивых систем. Тем не менее уравнения Ляпунова могут все же иметь решения, даже если система неустойчива. Фактически они имеют единственные решения при $\lambda(A) + \lambda(\bar{A}) \neq 0$. В рассматриваемом случае это условие выполняется: [–12,481; –0,333; (0,00187+0,0701i); (0,00187–0,0701i)].

Если решение для неустойчивой системы существует, то стремление уменьшить погрешность, возникающую в процессе редукции, приводит к использованию технологии, основанной на обобщении граммианов управляемости и наблюдаемости на неустойчивые системы с помощью частотных характеристик известных граммианов. Эта сбалансированная реализация по действию эквивалентна отделению устойчивых и неустойчивых состояний передаточной функции и выполняет балансировку реализации по двум частям отдельно.

Запишем формулы для расчета в матричной форме.

1. Расчет граммианов управляемости и наблюдаемости по уравнениям

$$AW_c + W_c A^{\mathrm{т}} + BB^{\mathrm{т}} = 0;$$

$$A^{\mathrm{т}} W_o + W_o A + C^{\mathrm{т}} C = 0.$$

2. Определение стабилизирующих решений

$$XA + A^{\mathrm{т}} X - XBB^{\mathrm{т}} X = 0;$$

$$AY + YA^{\mathrm{т}} - YC^{\mathrm{т}} CY = 0.$$

3. Вычисление матрицы $F = -B^{\mathrm{т}} X;\ L = -YC^{\mathrm{т}}$.

4. Расчет уточненных значений граммианов управляемости и наблюдаемости

$$(A + BF)P + P(A + BF)^{\mathrm{т}} + BB^{\mathrm{т}} = 0;$$

$$Q(A + LC) + (A + LC)^{\mathrm{т}} Q + C^{\mathrm{т}} C = 0.$$

5. Выполнение процедуры диагонализации $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathrm{PQ})}$, т. е. определение числа Ханкеля и выделение подсистем.

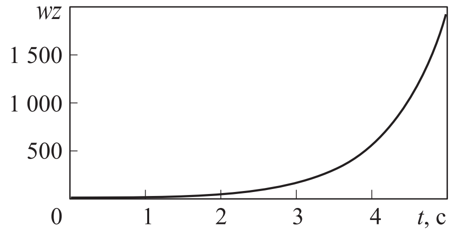

Рис. 2. Зависимость скорости от времени для полной и редуцированной моделей

Подсистемы могут выделяться как по сингулярным числам, так и по разделению устойчивой и неустойчивой частей. Оценка ошибки осуществляется по формуле

$$\left\| G(s) - G_r(s) \right\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \sigma_{r+2} + ... + \sigma_n),$$

где $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} \geq \sigma_{r+2} \geq ... \geq \sigma_n$.

Зависимость скорости от времени для полной и редуцированной моделей приведена на рис. 2. Расчеты выполнены с помощью указанной технологии, реализованной автором, в виде программы, написанной на языке MATLAB. Результаты показали очень хорошую сходимость, в связи с чем и технология может быть использована для моделирования неустойчивых систем.

Выводы. Для неустойчивых моделей наилучшие результаты показало применение технологии частотной интерпретации граммианов со стабилизированными промежуточными решениями. Обеспечение устойчивости методов редукции устойчивых систем гарантирует применение методов сбалансированной реализации в линейной постановке. Для нелинейных устойчивых систем рекомендуется применение методов кусочно-линейной аппроксимации. Гарантированное обеспечение устойчивости в процессе проведения эквивалентных преобразований, сводящееся к использованию неравенств как критерия устойчивости Ляпунова, открывает возможности получения аналогов методов для неуправляемых систем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Романова И.К. Современные методы редукции систем и их применение к задачам анализа и синтеза систем управления. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Спец.вып.*, 2011.

[2] Романова И.К. Современные методы редукции нелинейных систем и их применение к формированию моделей движущихся объектов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*, *Спец.вып.,* 2012.

[3] Kokotovic P.V. Singular Perturbation and Order Reduction in Control Theory – An Overview. *Automatica*, 1976, vol. 12, pp.123–132.

[4] Litz L., Roth H. State decomposition for singular perturbation order reduction- A modal approach. *Int. Journal of Control*, 1981, XXVI, no 5, vol. 34, pp. 937–945.
[5] Pernebo L., Silverman L. Model reduction via balanced state space representations. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1996, no 27, pp. 1466–1477.
[6] Rewienski M., White J. Model order reduction for nonlinear dynamical systems based on trajectory piecewise-linear approximations. Linear Algebra and its *Applications*, 2006, no 415, pp. 426–454.
[7] Gugercin S., Antoulas A.C. *Survey of model reduction by balanced truncation and some new results*. NSF through Grants DMS-9972591, CCR-9988393, ACI-0082645.
[8] Varga A. Coprime factors model reduction based on accuracy enhancing techniques. *Syst. Anal. Model. Sim.*,1993, no 11, pp. 303–311.
[9] Zhou K., Salomon G. And Wu E. Balanced realization and model reduction for unstable systems. *J. Robust Nonlinear Control*, 1999, no 9, pp. 183–198.

Статья поступила в редакцию 19.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Романова И.К. Проблема устойчивости в теории и практике формирования моделей динамических систем. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 8. URL:http://engjournal.ru/catalog/pribor/robot/935.html

Романова Ирина Константиновна – канд. техн. наук, доцент кафедры «Специальная робототехника и мехатроника» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 научных работ в области моделирования динамических систем и автоматизированного проектирования систем управления мехатроники и робототехники.
e-mail: marti2003@yandex.ru