

## **Разработка математической модели высокомоментного синхронного двигателя при проектировании прецизионных приводов**

© М.В. Баранов, О.А. Корчагин

ООО «Научно-производственная фирма «Политех», Москва, 123001, Россия

*Рассмотрена «быстрая» нелинейная математическая модель синхронного двигателя с трапецеидальной ЭДС, к которому одновременно предъявляются повышенные требования по моменту, развиваемому двигателем, плавности управления, а также требования по минимизации массы двигателя и объема его конструкции. Выявлено, что особенность разработанной математической модели заключается в выборе ее параметров на основе экспериментальных данных.*

**Ключевые слова:** «быстрая» математическая модель синхронного двигателя с трапецеидальной ЭДС, высокая гладкость управляемого движения, прецизионный привод.

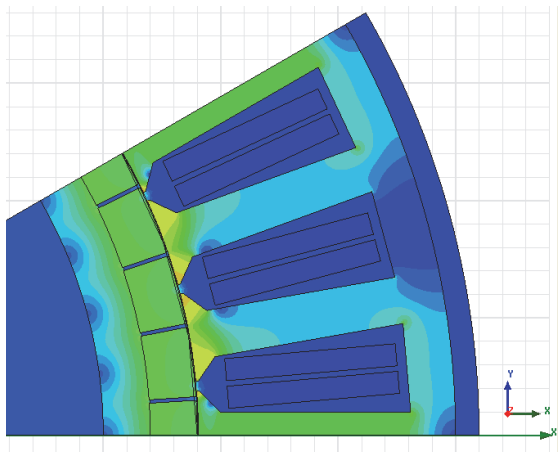
**Введение.** При проектировании прецизионных приводов с возбуждением от постоянных магнитов, характеризующихся высокой точностью и плавностью управляемого движения, общепринятой является рекомендация по применению двигателей с синусоидальными ЭДС [1]. Однако одно из основных требований заключается в минимизации объема, занимаемого двигателем, или его массы при одновременном увеличении развиваемого момента и коэффициента кратковременного форсирования. Для этого случая были начаты исследования использования двигателей с трапецеидальной ЭДС [2]. Нелинейная задача поиска рациональных конструктивных параметров двигателя, которые при проектировании привода должны выбираться одновременно с параметрами управляющей части исполнительного силового мехатронного модуля привода, требует применения математического моделирования.

В настоящее время расчет двигателя на основе метода конечных элементов – наиболее достоверный способ анализа его параметров и нелинейных зависимостей. Этот метод необходим при проектировании прецизионных приводов. Наиболее эффективный результат будет получен тогда, когда при расчете двигателя будет реализован перебор большого числа вариантов соотношений конструктивных параметров. В случае широкой области поиска анализ всех сопоставляемых вариантов только методом конечных элементов неэффективен вследствие значительных затрат машинного времени, не-

обходимых для расчета одного варианта. В особенности это справедливо для расчета пространственных трехмерных магнитных полей двигателя.

В настоящей статье разработана «быстрая» математическая модель двигателя с трапецеидальной ЭДС, которая при применении в совокупности с методом конечных элементов за счет возможной интерполяции результатов, позволяет при проектировании двигателя расширить область поиска его основных конструктивных параметров. Кроме того, такая модель дает возможность создать «быструю» модель прецизионного привода для отработки управляющих алгоритмов как двигателя, так и привода в целом.

**Расчетная схема для построения «быстрой» математической модели синхронного двигателя.** Расчетная схема протекания магнитных потоков в двигателе представляет собой, по существу, упрощенную идеализированную модель, в которой объект с распределенными параметрами заменен на модель с сосредоточенными параметрами, описываемыми дифференциальными уравнениями невысокого порядка. Для формирования такой расчетной схемы был рассмотрен результат моделирования магнитных потоков с использованием метода конечных элементов. При таком взаимном расположении ротора и статора двигателя, при котором середина зубца охватываемого обмоткой фазы А расположена напротив середины магнита, в теле двух соседних зубцов можно выделить трубку, в которой магнитный поток выше, чем в соседних областях магнитопровода. Граница такой трубки, отделяющая ее от остальной части зубца, нечеткая. На рис. 1 приведено распределение магнитной индукции, создаваемой только постоянными магнитами на роторе, в поперечном сечении двигателя при отсутствии токов управления. Результаты моделирования показали, что ширина и конфигурация воображаемой трубки зависит от тока, протекающего в обмотках управления двигателя.



**Рис. 1.** Распределение магнитной индукции в поперечном сечении двигателя при отсутствии токов управления

Суть упрощения, которое было принято при формировании расчетной схемы, заключается в следующем: весь магнитный поток, создаваемый постоянными магнитами, протекает в трубке с четкими границами. Далее, на конкретном примере будет показано, что за счет подбора ширины этой идеализированной трубки и значений параметров, описывающих изменение ширины трубки в зависимости от тока в фазных обмотках, можно с высокой точностью аппроксимировать экспериментальные данные в широком диапазоне значений изменения тока.

На рис. 2 приведена развертка двигателя для одной повторяющейся части рассмотренного выше взаимного положения ротора относительно статора (см. рис. 1). В таком положении в обмотке фазы А задается нулевой ток, а в обмотках фаз В и С – одинаковый по абсолютной величине и противоположный по направлению ток. С учетом этого противоположное направление имеют составляющие магнитного потока  $\Phi_y$ , создаваемого обмотками управления двигателя фаз В и С.

Рассмотрим расчетную схему прохождения магнитного потока двигателя при нулевом потоке управления  $\Phi_y$ . При  $\Phi_y = 0$  распределение магнитного потока в зубцах фазы В и С симметрично, поэтому достаточно рассмотреть магнитный поток, протекающий через один из этих зубцов, например зубец фазы В. Концентратор зубца фазы В имеет перекрытие шириной  $b_{\pi}$  с магнитом, обращенным в сторону концентратора полюсом N. Эта часть магнитного потока замыкается с соседним магнитом, обращенным к концентратору полюсом S, непосредственно через концентратор, минуя ту часть зубца, на которой уложена обмотка. В связи с этим данная часть магнитного потока не создает активный момент.

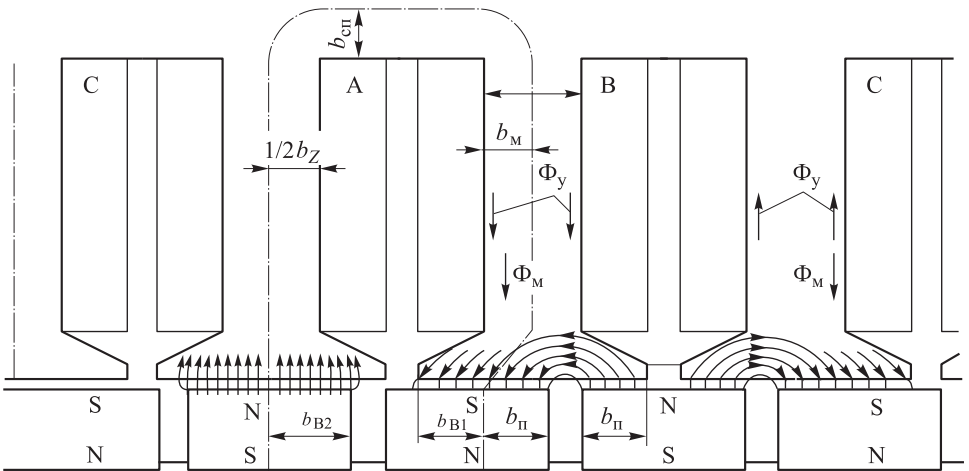


Рис. 2. Развертка двигателя для одной повторяющейся части

Магнит (см. рис. 2) условно разделен на две части штрихпунктирной линией. Только часть магнита шириной  $b_{B1}$  создает магнитный поток  $\Phi_m$ , протекающий непосредственно через зубец. Зубец шириной  $b_Z$  также разделен на две части. Левая часть имеет ширину  $b_m$ . В расчетной схеме полагается, что весь магнитный поток равномерно протекает через левую часть зубца.

В соответствии с расчетной схемой магнитный поток  $\Phi_m$  после прохождения через зубец фазы В преодолевает воздушный зазор, проходит участок магнита шириной  $b_{B1}$ , магнитопровод ротора, участок шириной  $b_{B2}$  соседнего магнита, второй воздушный зазор, участок магнитопровода зубца фазы А шириной  $1/2b_Z$  и замыкается через участок магнитопровода спинки статора шириной  $b_{сп}$ .

**Математическая модель магнитного потока, создаваемого постоянными магнитами и обмотками управления.** Рассмотрим математическую модель вычисления магнитного потока, протекающего через зубец, соответствующую описанной выше расчетной схеме. В математической модели учитывается нелинейная зависимость индукции на участках магнитопровода от напряженности магнитного поля на этих участках. Для определения магнитного потока такой расчетной схемы поставим ей в соответствие эквивалентную электрическую схему замещения. В данной схеме замещения в качестве тока принят магнитный поток, в качестве сопротивлений – магнитные сопротивления участков контура замыкания магнитного потока, в качестве ЭДС источника питания – магнитодвижущая сила, измеряемая в ампер-витках, в качестве разности потенциалов на участках цепи – разность магнитных потенциалов, равная произведению магнитного потока и магнитного сопротивления участка цепи.

Магнитное сопротивление двух воздушных участков определяется по формуле

$$R_{Bi} = \frac{l_i}{S_i \mu_0}, \quad i = 1, 2, \dots$$

где  $l_i$  – длина воздушного участка, включающая длину воздушного зазора между магнитом и концентратором, и длину магнита;  $S_i$  – площадь воздушного участка;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  – магнитная постоянная.

Магнитное сопротивление участка магнитопровода можно представить в виде

$$R_m(B) = \frac{l_m H_m(B)}{S_m},$$

где  $l_m$  и  $S_m$  – длина участка магнитопровода и его площадь;  $H_m(B)$  – нелинейная зависимость напряженности магнитного поля от индукции поля на участке магнитопровода (является обратной по отношению к нелинейной зависимости индукции от напряженности магнитного

поля). В модели для описания функции  $H_m(B)$  используется кусочно-параболическая аппроксимация табличных значений.

Магнитодвижущая сила  $E_{мд} = (Iw)_{мд}$ , создаваемая постоянным магнитом с индукцией  $B_r$ , находится как

$$(Iw)_{мд} = \frac{B_r l}{\mu_0},$$

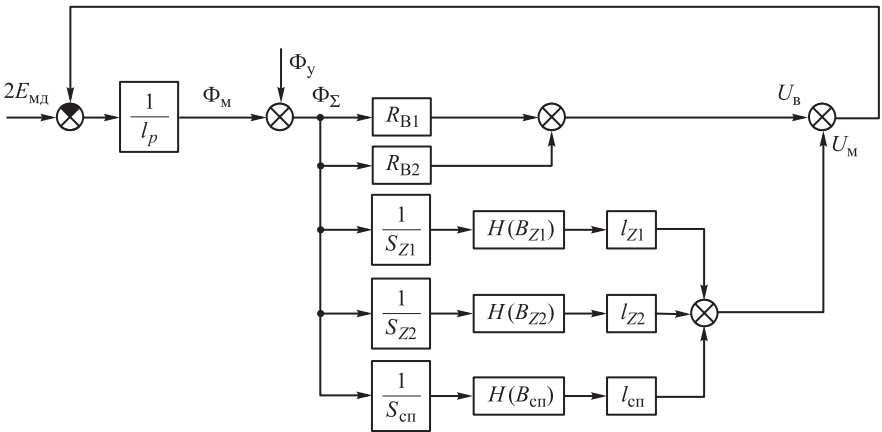
где  $l$  – длина магнита по направлению намагниченности.

Сумма всех магнитных напряжений и магнитодвижущих сил по замкнутому контуру эквивалентной электрической схемы замещения равна нулю. Для решения нелинейного уравнения может быть использован итерационный алгоритм поиска. Еще один простой способ определения магнитного потока заключается во введении в контур эквивалентной электрической схемы замещения фиктивной индуктивности  $L$ . В этом случае переменной  $\Phi_m$  присваивается начальное значение как переменной состояния. По заданному значению  $\Phi_m$  вычисляется сумма всех магнитных напряжений на воздушных участках цепи  $U_B$  и напряжений на участках магнитопровода  $U_M$ . Производная  $\Phi_m$  составляет

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{2E_m - U_B - U_M}{L}.$$

В результате численного интегрирования рассчитывается установившееся значение переменной  $\Phi_m$ .

Математическая модель для определения магнитного потока в зубце приведена на рис. 3. Падением магнитного напряжения на роторе в этой схеме пренебрегаем в силу достаточно большой площади сечения участка магнитопровода и его малой длины.



**Рис. 3.** Математическая модель для определения магнитного потока в зубце:  $B_{Z1}, B_{Z2}, B_{сп}$  – индукция в зубцах фаз В и А, в спинке статора;  $S_{Z1}, S_{Z2}, S_{сп}$  и  $l_{Z1}, l_{Z2}, l_{сп}$  – эффективные площади магнитопровода указанных зубцов, спинки статора и длины соответствующих участков магнитопровода

В рассматриваемой математической модели суммирование магнитных потоков, создаваемых постоянными магнитами на роторе и обмотками управления на статоре, осуществляется в соответствии с принципом суперпозиции. Магнитный поток от действия обмоток управления  $\Phi_y$  вычисляется независимо от магнитного потока  $\Phi_m$ .

Для упрощения математической модели при вычислении магнитного потока  $\Phi_y$  учитывается магнитное сопротивление только воздушного зазора и собственно магнитов. При этом следует принять во внимание, что основная часть магнитного потока создается постоянными магнитами на роторе. Погрешность, возникающая ввиду указанного упрощения, компенсируется подбором вида функции, аппроксимирующей изменение ширины идеализированной трубки от тока в обмотках управления, и ее параметров. Магнитный поток, создаваемый обмоткой управления, вычисляется по формуле

$$\Phi_{yZ} = \frac{I_y w_y}{R_{kZ}},$$

где  $I_y$  – ток в обмотке управления;  $w_y$  – число витков в сосредоточенной обмотке управления, охватывающей зубец;  $R_{kZ}$  – магнитное сопротивление воздушного участка под концентратором зубца,  $R_{kZ} = l_b / (\mu_0 S_{kZ})$ ;  $l_b$  – длина воздушного зазора, включающая высоту магнита и длину воздушного зазора между магнитом и концентратором;  $S_{kZ}$  – площадь воздушного зазора под концентратором зубца. Для анализа совместного влияния двух составляющих магнитного потока на изменение магнитной проводимости участков магнитопровода необходимо учитывать не весь магнитный поток  $\Phi_{yZ}$ , а только ту его часть, которая протекает через участок зубца шириной  $b_m$  (см. рис. 2), поэтому в модели используется составляющая магнитного потока

$$\Phi_y = \frac{b_m \Phi_{yZ}}{b_z}.$$

В разрабатываемой модели для зубца фазы В суммарный магнитный поток  $\Phi_\Sigma$  складывается из магнитного потока  $\Phi_m$ , создаваемого постоянными магнитами на роторе, и магнитного потока  $\Phi_y$ , создаваемого обмотками управления:

$$\Phi_\Sigma = \Phi_m + \Phi_y.$$

Для того чтобы при действии управляющего тока суммарный магнитный поток увеличивался, в выражении для нахождения  $\Phi_{yZ}$  ток необходимо задать со знаком «←».

Рассмотрим формулу для вычисления момента. Для этого запишем выражение для вычисления полезной мощности  $N$ , развиваемой исполнительным двигателем, с использованием ЭДС и токов.

Для положения ротора и статора, указанного на рис. 2, в формировании момента участвуют фазы В и С. Фаза А не создает момент. Мощность  $N$  вычисляется по формуле

$$N = I_y (E_B + E_C),$$

где  $E_B$  и  $E_C$  – ЭДС, наводимые в обмотках фаз В и С, от вращения с учетом токов,

$$E_B = w_\phi \frac{d\Phi_B}{dt} = w_\phi \frac{d\Phi_B}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = w_\phi \frac{d\Phi_B}{d\alpha} \Omega,$$

$$E_C = w_\phi \frac{d\Phi_C}{dt} = w_\phi \frac{d\Phi_C}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = w_\phi \frac{d\Phi_C}{d\alpha} \Omega;$$

$w_\phi$  – число витков в обмотках одной фазы;  $\alpha$  – угловое положение ротора;  $\Omega$  – угловая скорость вращения ротора двигателя;  $\Phi_B$  и  $\Phi_C$  – магнитные потоки, протекающие через зубцы фаз В и С.

Результаты экспериментальных исследований и моделирования показали, что для двигателей рассматриваемого типа, в которых используется режим сильного насыщения участков магнитопровода зубцов статора, существует нелинейная зависимость моментного коэффициента двигателя от управляющего тока. Чем выше степень насыщения, тем сильнее изменяется моментный коэффициент в функции управляющего тока.

Желательно, чтобы «быстрая» модель с малой погрешностью аппроксимировала бы эту нелинейную зависимость. Это удастся достичь, если принять гипотезу о зависимости эквивалентной эффективной площади участка магнитопровода зубца, по которому проходит магнитный поток, не только от переменной  $\alpha$ , но и от тока  $I_y$ . При этом зависимость эквивалентной площади от тока вводится только для зубца фазы В, в котором магнитные потоки  $\Phi_m$  и  $\Phi_y$  суммируются и эффект насыщения усиливается. Для зубца фазы С, в котором указанные магнитные потоки вычитаются и эффект насыщения ослабляется, эквивалентная площадь в модели такая же, как при нулевом токе.

Введем следующее обозначение:  $k_\phi(I_y) = w_\phi d\Phi_\Sigma(I_y, \alpha) / d\alpha$  – моментный коэффициент фазы. С учетом этого мощность  $N$  можно представить в виде

$$N = I_y \Omega (k_\phi(I_y) + k_\phi(0)) = I_y \Omega k_d(I_y),$$

где  $k_d(I_y) = k_\phi(I_y) + k_\phi(0)$  – моментный коэффициент двигателя.

Для определения моментного коэффициента необходимо знать производную суммарного магнитного потока по переменной  $\alpha$ .



Рассмотрим зависимости площадей воздушных зазоров  $S_1$  и  $S_2$  и эквивалентных эффективных площадей зубцов  $S_{Z1}$  и  $S_{Z2}$ , принятые в модели.

На развертке двигателя (см. рис. 2) присвоим малое приращение  $\Delta\alpha$  угловой координате ротора, например, в направлении слева на право. При этом под зубцом фазы В на малую величину  $\Delta b$ , пропорциональную приращению  $\Delta\alpha$ , уменьшится ширина перекрытия  $b_{п}$ . Только за счет этого ширина части магнита  $b_{B1}$ , создающего магнитный поток  $\Phi_m$ , увеличится на  $\Delta b$ . Дополнительно ширина  $b_{B1}$  возрастет на  $\Delta b$  за счет движения магнита вправо, поэтому суммарно площадь эффективной части магнита увеличится пропорционально  $2\Delta\alpha$ . Под зубцом фазы А площадь эффективной части магнита возрастет пропорционально  $\Delta\alpha$ .

В модели приняты следующие формулы для вычисления эффективных площадей:

$$k_d(I_y) = k_\phi(I_y) + k_d(0);$$

$$k_d(I_y) = k_\phi(I_y) + k_d(0);$$

$$S_{Z1}(\Delta\alpha, I_y) = \begin{cases} b_m a_z + 2\Delta\alpha R_z b_m + I_y a_l + I_y^2 b_l & \text{при } I_y > 0; \\ b_m a_z + 2\Delta\alpha R_z b_m & \text{при } I_y \leq 0; \end{cases}$$

$$S_{Z2}(\Delta\alpha) = b_z 0,5 a_z + \Delta\alpha R_z b_m.$$

Здесь  $R$  – радиус концентратора со стороны, обращенной к магнитам;  $a_k$  – размер концентратора по осевому направлению двигателя;  $(S_1)_0$  и  $(S_2)_0$  – начальные площади перекрытия концентраторов (соответствуют положению ротора относительно статора, показанному на рис. 1) фаз В и А относительно магнитов;  $S_{Z1}(\Delta\alpha, I_y)$  и  $S_{Z2}(\Delta\alpha)$  – эффективные площади магнитопроводов зубцов фаз В и А;  $a_z$  – размер зубца по осевому направлению;  $R_z$  – радиус, на котором расположена середина статора;  $a_l$  и  $b_l$  – коэффициенты, характеризующие увеличение эффективной площади зубца при возрастании тока.

В модели принято, что эффективная площадь зубца  $S_{Z1}(\Delta\alpha, I_y)$  фазы В увеличивается при возрастании тока только тогда, когда протекает ток такого направления, при котором магнитный поток от его действия суммируется с магнитным потоком от действия постоянных магнитов на роторе. Добавка к площади аппроксимирована полиномом второго порядка с коэффициентами  $a_l$  и  $b_l$ , поскольку при использовании полинома первого порядка погрешность вычисления момента двигателя по отношению к экспериментальным данным в несколько раз выше, чем в первом случае.



При определении моментного коэффициента фазы заменим в формуле производной магнитного потока дифференциалы приращениями:

$$k_{\phi}(I_y) = w_{\phi} \frac{d\Phi_{\Sigma}(I_y, \alpha)}{d\alpha} = w_{\phi} \frac{\Phi_{\Sigma}(I_y, \alpha_0 + \Delta\alpha) - \Phi_{\Sigma}(I_y, \alpha_0)}{\Delta\alpha}.$$

Для нахождения приращения магнитного потока при фиксированном значении тока  $I_y$  математическая модель (см. рис. 2) задействуется два раза при  $\alpha = \alpha_0$  и  $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ .

Представленная в настоящей статье «быстрая» модель позволяет оценить момент двигателя только для одного взаимного положения ротора относительно статора. Для получения модели при произвольном положении ротора относительно статора результаты, приведенные в этой статье, должны быть дополнены зависимостями ЭДС, наводимых в обмотках двигателя, от угла поворота ротора [2]. При этом вид функции, аппроксимирующей изменение трапецеидальной фазной ЭДС, будет такой же, как при изменении моментного коэффициента фазы в функции угла.

Сопоставление экспериментальных данных и математического моделирования. Результаты сопоставления экспериментальных данных и данных математического моделирования приведены в таблице.

**Экспериментальные (числитель) и полученные при моделировании (знаменатель) значения моментного коэффициента двигателя и максимального момента, развиваемого двигателем, в зависимости от тока**

Параметр	Ток $I_y$ , А			
	2	4	6	8
Моментный коэффициент двигателя, Н·м/А	215,8/207,6	201/194,6	189,7/187,5	181,5/181,0
Максимальный момент, развиваемый двигателем, Н·м	431,6/415,2	804,4/778,4	1138,0/ 1125,0	1452,0/ 1448,0

**Выводы.** Разработана «быстрая» математическая модель синхронного двигателя, учитывающая трапецеидальную форму ЭДС двигателя и нелинейную зависимость моментного коэффициента от тока. Модель позволяет на основе экспериментальных данных, либо на основе моделирования с помощью метода конечных элементов существенно расширить область поиска выбираемых конструктивных параметров и, следовательно, повысить качество принимаемых проектных решений.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Балковой А.П., Цаценкин В.К. *Прецизионный электропривод с вентильными двигателями*. Москва, Издательский дом МЭИ, 2010, 328 с.
- [2] Баранов М.В., Корчагин О.А. Высокомоментный мехатронный модуль привода телескопа. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2012, вып. 11. URL: <http://engjournal.ru/catalog/pribor/robot/461.html>

Статья поступила в редакцию 19.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Баранов М.В., Корчагин О.А. Разработка математической модели высокомоментного синхронного двигателя при проектировании прецизионных приводов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 8.

URL: <http://engjournal.ru/catalog/pribor/robot/931.html>

**Баранов Михаил Васильевич** – канд. техн. наук, старший научный сотрудник, генеральный директор ООО «Научно-производственная фирма «Политех». Автор более 39 научных работ в области электропривода и разработки цифровых систем управления. e-mail: [info@npf-polytech.ru](mailto:info@npf-polytech.ru)

**Корчагин Олег Александрович** – начальник отдела ООО «Научно-производственная фирма «Политех». Автор четырех научных работ в области электропривода и разработки цифровых систем управления. e-mail: [koroleg@inbox.ru](mailto:koroleg@inbox.ru)