УДК 537.29/534.14

Спектр электрокапиллярных колебаний заряженной капли

© И.Н. Алиев
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены задачи о поверхностных гравитационных и электрокапиллярных колебаниях сильно заряженной сферической капли. Получены волновые спектры. Решение выполнено методом Гамильтона. Проведено сравнение полученных результатов с классическими исследованиями Дж. Рэлея.

Ключевые слова: *электродиспергирование капель, поверхностные колебания, функция Гамильтона, электрогидродинамика.*

Задача о колебаниях поверхности капли постоянно находилась в поле зрения исследователей. Первым к ней обратился Дж. Рэлей в классической работе [1]. Интерес к рассматриваемой проблеме вновь усилился в 1980–1990-х годах, когда одновременно возникло несколько научных и технических направлений, которые прямо или косвенно были связаны именно с этой задачей, в частности при разработке принтеров каплеструйной печати [2]. В это же время появились экспериментальные работы, в которых была предложена новая модель свечения электродиспергированных капель («Огни св. Эльма») [3]. Именно эмиссия заряженных капель на финальной стадии неустойчивости обусловила возможное приложение обсуждаемого явления к термоядерному синтезу [4]. Довольно подробную подборку публикаций на рассматриваемую тему можно найти в работе [5]. Обзор современного состояния вопроса приведен в [6].

В данной работе подробно рассмотрим вспомогательную задачу о поверхностных колебаниях капли несжимаемой жидкости радиусом R и плотностью ρ_0. Решение приведем в форме, отличающейся от общепринятой [7]. Для этого используем функцию Гамильтона. В общем случае она определяется через функцию Лагранжа и обобщенные координаты и импульсы. Рассмотрим случай, когда кинетическая энергия системы является однородной квадратичной формой обобщенных скоростей, а потенциальная энергия не зависит от скоростей и явно от времени, т. е. функция Гамильтона совпадает с полной механической энергией системы: $H = K + U$. Для одномерной системы с кинетической $K = \dfrac{a\dot{q}^2}{2}$ и потенциальной $U = \dfrac{cq^2}{2}$ энергиями с перенормировкой $Q = \sqrt{a}q$ функция Гамильтона для одной из мод имеет вид $H=\frac{1}{2}\left(\dot{Q}^2+\omega^2Q^2\right)$. В случае же суперпозиции колебаний соответственно $H=\frac{1}{2}\sum_l\left(\dot{Q}_l^2+\omega^2Q_l^2\right)$.

Потенциальную (гравитационную) энергию вычислим по аналогии с энергией электрического поля:

$$U=-\frac{1}{2}\int G\frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{r}d\vec{r}',$$

где G – гравитационная постоянная; $\rho(\vec{r})=\rho_0+\delta\rho(\vec{r})$, ρ_0 – плотность несжимаемой жидкости; $\delta\rho(\vec{r})=\pm\rho_0$.

Введем малое отклонение от изначально недеформируемой сферической поверхности: $\zeta\left(\frac{\vec{r}}{r},\ t\right)\equiv\zeta(\vec{n},\ t)\ll R$, причем знак при $\delta\rho(\vec{r})$ связан со знаком $\zeta(\vec{n})$: в точках, где жидкость приподнята над равновесным уровнем, $\zeta(\vec{n})>0$ и $\delta\rho(\vec{r})=\rho_0$, и наоборот. В дальнейшем для упрощения выкладок аргумент t не приводится в явном виде. Гравитационная энергия

$$U=-\frac{1}{2}\int G\frac{\rho_0\rho_0}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{r}d\vec{r}'-\int G\frac{\rho_0\delta\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{r}d\vec{r}'-\frac{1}{2}\int G\frac{\delta\rho(\vec{r})\delta\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{r}d\vec{r}'.$$

Первый интеграл U_0 не зависит от деформации поверхности и является энергией недеформируемого шара и постоянной величиной.

Запишем далее

$$U_1=-\int G\frac{\rho_0\delta\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{r}d\vec{r}'=-\int\delta\rho(\vec{r})\psi(\vec{r})d\vec{r},$$

где $\psi(\vec{r})=\int\frac{G\rho_0}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{r}'$ – гравитационный потенциал, созданный исходным шаром (очевидная аналогия с потенциалом электрического поля). Тогда

$$U_1=-\int\delta\rho(\vec{n})d\Omega\int\limits_R^{R+\zeta(\vec{n})}\psi(\vec{r})r^2dr.$$

Разлагая $\psi(r)$ в ряд Тейлора вблизи $r=R$, получаем

$$U_1 = -\int d\Omega \delta\rho(\vec{n})\left(\psi(R) R^2 \zeta(\vec{n}) + \frac{1}{2}\zeta^2(\vec{n})\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\psi(r)\right)\Big|_{r=R}\right).$$

При выводе использовались следующие соотношения:

$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\psi(r)\right)\Big|_{r=R} = (\nabla\psi)\Big|_{r=R}$ – радиальная компонента потенциала;

$$\int\limits_R^{R+\zeta(\vec{n})} r^2 dr = \frac{1}{3}r^3\Big|_R^{R+\zeta(\vec{n})} = \frac{1}{3}\left(\left(R+\zeta(\vec{n})\right)^3 - R^3\right) \approx \frac{1}{3}3R^2\zeta(\vec{n}) = R^2\zeta(\vec{n}).$$

Запишем

$$U_1 = -\int d\Omega\left(\rho_0 R^2 \zeta(\vec{n})\psi(R) + \frac{1}{2}\zeta^2(\vec{n})\rho_0 R^2 (\nabla\psi)_r\Big|_{r=R}\right) =$$

$$= -\int d\Omega\left(\rho_0 R^2\zeta(\vec{n})\frac{GM}{R} + \frac{1}{2}\zeta^2(\vec{n})\rho_0 R^2 \frac{GM}{R^2}\right) =$$

$$= -GM\rho_0\int d\Omega\left(R\zeta(\vec{n}) + \frac{1}{2}\zeta^2(\vec{n})\right),$$

где $M = \frac{4\pi}{3}R^3\rho_0$ – масса капли.

Из условия несжимаемости, пренебрегая слагаемыми более высокого порядка малости, получаем

$$0 = \int\limits_R^{R+\zeta} r^2 dr d\Omega = \int d\Omega\left(\zeta R^2 + \frac{1}{2}2R\zeta^2\right);$$

$$R\int \zeta(\vec{n})d\Omega = -\int\zeta^2(\vec{n})d\Omega.$$

Подставив последнее соотношение в выражение для U_1, получим

$$U_1 = -GM\rho_0\int d\Omega\left(-\zeta^2(\vec{n}) + \frac{1}{2}\zeta^2(\vec{n})\right) = \frac{1}{2}GM\rho_0\int d\Omega\zeta^2(\vec{n}),$$

тогда

$$U_2 = -\frac{1}{2}\int G\frac{\delta\rho(\vec{r})\delta\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{r}d\vec{r}' = -\frac{G}{2}\int\limits_R^{R+\zeta(\vec{n})} r^2 dr \int\limits_R^{R+\zeta(\vec{n})} r'^2 dr' \int\frac{\rho_0^2 d\Omega d\Omega'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} =$$

$$= -\frac{G}{2}\rho_0^2\int\frac{R^2\zeta(\vec{n})R^2\zeta(\vec{n}')d\Omega d\Omega'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{G}{2}\rho_0^2 R^4\int\frac{\zeta(\vec{n})\zeta(\vec{n}')d\Omega d\Omega'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.$$

Разложим деформацию в ряд по шаровым функциям. При этом учтем, что это не только функция координат, но и функция времени, а также то, что разложение ведется в комплексной области, т. е.

$$\frac{\zeta(\vec{n})}{R} = \sum_{l,m} a_{lm}(t) Y_{lm}(\vec{n}),$$

где $Y_{lm}(\vec{n}) \equiv Y_{lm}(\Omega) \equiv Y_{lm}(\theta,\varphi) = C_{lm} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}$.

Здесь $P_l^{|m|}(\cos\theta)$ – присоединенная функция Лежандра; C_{lm} выбирается из условия нормировки, $C_{lm} = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}$ [8].

Запишем также условие ортонормировки для шаровых функций:

$$\int Y_{lm}(\Omega) Y^*_{l'm'}(\Omega) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta Y_{lm}(\theta,\varphi) Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

Используя известное стандартное разложение [8]

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{R}\sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\vec{n}) Y^*_{lm}(\vec{n}'),$$

с учетом записанного выше получаем

$$U = U_0 + \frac{1}{2} GM\rho_0 \int d\Omega R \sum_{lm} a_{lm}(t) Y_{lm}(\vec{n}) R \sum_{l'm'} a^*_{l'm'}(t) Y^*_{l'm'}(\vec{n}) -$$

$$-\frac{1}{2} GR^4 \rho_0^2 \sum_{lm} \frac{1}{R} \int d\Omega d\Omega' \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\vec{n}) Y^*_{lm}(\vec{n}') R \sum_{l'm'} a_{l'm'}(t) Y_{l'm'}(\vec{n}') R \times$$

$$\times \sum_{l''m''} a^*_{l''m''}(t) Y^*_{l''m''}(\vec{n}) = U_0 + \frac{1}{2} GM\rho_0 R^2 \sum_{lm}\sum_{l'm'} a_{lm}(t) a^*_{l'm'}(t) \times$$

$$\times \int d\Omega Y_{lm}(\vec{n}) Y^*_{l'm'}(\vec{n}) - \frac{1}{2} GR^5 \rho_0^2 \sum_{lm}\sum_{l'm'}\sum_{l''m''} \frac{4\pi}{2l+1} a_{l'm'}(t) a^*_{l''m''}(t) \times$$

$$\times \int d\Omega Y_{lm}(\vec{n}) Y^*_{l''m''}(\vec{n}) \int d\Omega' Y^*_{lm}(\vec{n}') Y_{l'm'}(\vec{n}') =$$

$$= U_0 + \frac{1}{2} GM\rho_0 R^2 \sum_{lm}\sum_{l'm'} a_{lm}(t) a^*_{l'm'}(t) \delta_{ll'}\delta_{mm'} -$$

$$-\frac{1}{2}GR^5\rho_0^2\sum_{lm}\sum_{l'm'}\sum_{l''m''}\frac{4\pi}{2l+1}a_{l'm'}(t)\,a^*_{l''m''}(t)\,\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{ll''}\delta_{mm''}=$$

$$=U_0+\frac{1}{2}GM\rho_0R^2\sum_{lm}a_{lm}(t)\,a^*_{lm}(t)-\frac{1}{2}GR^5\rho_0^2\sum_{lm}\frac{4\pi}{2l+1}a_{lm}(t)\,a^*_{lm}(t)=$$

$$=U_0+\frac{1}{2}G\frac{4\pi}{3}\rho_0^2R^5\sum_{lm}a_{lm}(t)\,a^*_{lm}(t)-\frac{4\pi}{3}GR^5\rho_0^2\sum_{lm}\frac{3}{2}\frac{1}{2l+1}a_{lm}(t)\,a^*_{lm}(t)=$$

$$=U_0+G\frac{4\pi}{3}\rho_0^2R^5\sum_{lm}a_{lm}(t)\,a^*_{lm}(t)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\frac{1}{2l+1}\right)=$$

$$=U_0+G\frac{4\pi}{3}\rho_0^2R^5\sum_{lm}a_{lm}(t)\,a^*_{lm}(t)\frac{l-1}{2l+1}.$$

Рассмотрим кинетическую энергию. Пусть движение безвихревое, течение потенциальное, поэтому можно ввести потенциал скоростей φ, который также разложим по шаровым функциям:

$$\frac{d\zeta(\vec{n})}{dt}=v_r=\vec{v}\vec{n}=\frac{\partial\varphi}{\partial r};$$

$$\varphi=\sum_{lm}b_{lm}(t)\left(\frac{r}{R}\right)^l Y_{lm}(\vec{n});$$

$$R\sum_{lm}\dot{a}_{lm}(t)Y_{lm}(\vec{n})=\sum_{lm}b_{lm}(t)l\left(\frac{r}{R}\right)^{l-1}\frac{1}{R}Y_{lm}(\vec{n})\Big|_{r=R};$$

$$R^2\dot{a}_{lm}(t)=lb_{lm}(t).$$

При вычислении интегралов в выражении для кинетической энергии воспользуемся теоремой о среднем и вновь при разложении в ряд Тейлора отбросим малые более высокого порядка:

$$K=\int_R^{R+\zeta(\vec{n})}\frac{\rho v^2}{2}dV=\frac{\rho_0}{2}\int d\Omega\int_R^{R+\zeta(\vec{n})}vv^*r^2dr=$$

$$=\frac{\rho_0}{2}\int d\Omega\int_R^{R+\zeta(\vec{n})}\frac{\partial\varphi(r,\,\Omega)}{\partial r}\frac{\partial\varphi^*(r,\,\Omega)}{\partial r}r^2dr=$$

$$=\frac{\rho_0}{2}\int d\Omega\int_R^{R+\zeta(\vec{n})}\frac{\partial\varphi^*(r,\,\Omega)}{\partial r}r^2d\varphi=\frac{\rho_0}{2}\int d\Omega R^2\left.\frac{\partial\varphi^*(r,\,\Omega)}{\partial r}\right|_{r=R}\varphi(R)=$$

$$= \frac{\rho_0}{2} R^2 \int d\Omega \left(\sum_{lm} b_{lm}(t) \left(\frac{r}{R} \right)^l Y_{lm}(\vec{n}) \right) \Bigg|_{r=R} \times$$

$$\times \left(\sum_{l'm'} b^*_{l'm'}(t) l' \left(\frac{r}{R} \right)^{l'-1} \frac{1}{R} Y^*_{l'm'}(\vec{n}) \right) \Bigg|_{r=R} =$$

$$= \frac{\rho_0}{2} R \int d\Omega \left(\sum_{lm} b_{lm}(t) Y_{lm}(\vec{n}) \right) \left(\sum_{l'm'} b^*_{l'm'}(t) l' Y^*_{l'm'}(\vec{n}) \right) =$$

$$= \frac{\rho_0}{2} R \sum_{lm} b_{lm}(t) \sum_{l'm'} b^*_{l'm'}(t) l' \int d\Omega Y_{lm}(\vec{n}) Y^*_{l'm'}(\vec{n}) =$$

$$= \frac{\rho_0}{2} R \sum_{lm} b_{lm}(t) \sum_{l'm'} b^*_{l'm'}(t) l' \delta_{ll'} \delta_{mm'} = \frac{\rho_0}{2} R \sum_{lm} b_{lm}(t) b^*_{lm}(t) l =$$

$$= \frac{\rho_0}{2} R \sum_{lm} \dot{a}_{lm}(t) \frac{R^2}{l} \dot{a}^*_{lm}(t) \frac{R^2}{l} l = \frac{\rho_0}{2} R^5 \sum_{lm} \dot{a}_{lm}(t) \dot{a}^*_{lm}(t) \frac{1}{l}.$$

Функция Гамильтона принимает следующий вид (несущественное постоянное слагаемое U_0 опускается):

$$H = \frac{\rho_0}{2} R^5 \sum_{lm} \dot{a}_{lm}(t) \dot{a}^*_{lm}(t) \frac{1}{l} + G \frac{4\pi}{3} \rho_0^2 R^5 \sum_{lm} a_{lm}(t) a^*_{lm}(t) \frac{l-1}{2l+1}.$$

Проведем перенормировку обобщенных координат $A_{lm} = \sqrt{s_l} a_{lm}$ с помощью множителя $s_l = \dfrac{\rho_0 R^5}{l}$, тогда

$$H = \frac{1}{2} \sum_{lm} \left(\dot{A}^*_{lm} \dot{A}_{lm} + \omega_l^2 A^*_{lm} A_{lm} \right),$$

$$\omega_l^2 = G \frac{4\pi}{3} \rho_0^2 R^5 \frac{l-1}{2l+1} \frac{2l}{\rho_0 R^5} = G \frac{4\pi}{3} \rho_0 \frac{2l(l-1)}{2l+1}.$$

В результате получили спектр поверхностных волн с соответствующими частотами.

Применим рассмотренное решение к следующей задаче: моделируя Землю в виде шара несжимаемой жидкости плотностью ρ_0 и радиусом R = 6 400 км, приближенно вычислить периоды поверхностных волн. Для упрощения расчета введем ускорение свободного падения, причем, учитывая оценочный характер решения, примем, что оно равно реальному значению:

$$G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0}{R^2}m = mg; \qquad G\frac{4}{3}\pi\rho_0 = \frac{g}{R}; \qquad \omega_l^2 = \frac{g}{R}\frac{2l\left(l-1\right)}{2l+1}.$$

Период основных $\left(l = 2\right)$ колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2} = \pi\sqrt{\frac{5R}{g}} = 5600 \text{ с.}$$

Аналогично можно рассмотреть основную задачу о колебаниях в радиальном направлении объемно заряженного шара, так как рассмотренный метод решения применим и в этом случае. Однако задача усложняется следующим обстоятельством. Поскольку в предыдущей задаче силы гравитационного взаимодействия являются притягивающими, а в случае заряженного шара учет только сил электростатического взаимодействия, которые носят отталкивающий характер, согласно теореме Ирншоу, приводит к нестабильности системы. Поэтому необходимо учесть поверхностные силы, связанные с поверхностным натяжением.

Таким образом, рассматривается сферическая капля радиусом R слабовязкой несжимаемой жидкости, на поверхности которой существуют капиллярные волны малой амплитуды, возникающие вследствие теплового движения молекул. Жидкость считается диэлектриком, $\varepsilon = 1$, и имеет однородное по объему распределение заряда плотностью ρ.

К линеаризованной системе уравнений электрогидродинамики добавим соответствующие граничные условия:

$$\rho_0\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v},\nabla\right)\vec{v}\right) = -\nabla p + \eta\Delta\vec{v};$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0; \qquad \vec{\tau}\left(\vec{n},\nabla\right)\vec{v} + \vec{n}\left(\vec{\tau},\nabla\right)\vec{v} = 0;$$

$$-(p + p_e) + 2\eta\vec{n}\left(\vec{n},\nabla\right)\vec{v} + p_g = 0.$$

Здесь, как обычно, ρ_0, γ, η, $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$ – плотность, коэффициент поверхностного натяжения, динамическая и кинематическая вязкости, p, $\vec{v}$ – давление и скорость жидкости.

Граничные условия краевой задачи должны выполняться на свободной поверхности: $r = R + \zeta$ $\left(\zeta \ll R\right)$. Давление Лапласа, связанное с искривлением поверхности, в рассматриваемом случае имеет следующий вид: $p_g = \frac{2\gamma}{r} = \frac{2\gamma}{R+\zeta} = \frac{2\gamma}{R} - \frac{2\gamma}{R^2}\zeta$. Давление электрического поля на поверхности заряженной капли определяется выражением из работы [9] (знак минус связан с тем, что электростатическое давление действует изнутри):

$$-p_e = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}E\frac{\varphi}{R} = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{\varphi}{R} = \frac{Q\varphi}{8\pi R^3} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3\varphi}{8\pi R^3} = \frac{\rho\varphi}{6},$$

где φ – потенциал поля вблизи поверхности, $Q = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$ – заряд капли.

Тогда можно записать

$$p_e = -\frac{1}{6}\rho\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{1}{6}\rho\frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\varepsilon_0\left(R+\zeta\right)} = -\frac{1}{18\varepsilon_0}\rho^2 R^2\left(1-\frac{\zeta}{R}\right).$$

После преобразований, аналогичных преобразованиям в задаче о гравитационных колебаниях шара, приходим к дифференциальному уравнению, описывающему временную эволюцию амплитуды капиллярных колебаний капли:

$$\frac{d^2\zeta_l}{dt^2} + 2\alpha_l\frac{d\zeta_l}{dt} + \omega_l^2\zeta_l = 0,$$

где α_l – характеристика системы, отвечающая за затухание волн и пропорциональная вязкости. В маловязком приближении частоты примерно равны ω_l, для которых получаем следующее выражение:

$$\omega_l^2 = \frac{\gamma}{\rho_0 R^3}l\left(l-1\right)\left(l+2\right) - \frac{2l\left(l-1\right)}{2l+1}\frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

Проанализируем полученное выражение. Первое слагаемое – классический результат Дж. Рэлея для частот собственных капиллярных колебаний сферической капли. Второе слагаемое структурно совпадает с результатом, полученным при решении вспомогательной задачи. Знак минус является существенным и, как отмечалось выше, связан с тем, что в предыдущей задаче гравитационные силы – силы притяжения, а для заряженной капли электрические силы – силы отталкивания. Множитель $\frac{\rho}{\rho_0}$ тоже физически объясним. В предыдущей задаче гравитация, характеризуемая параметром ρ_0, несет двойную функцию: она связана с силовым фактором, а также отвечает за инерциальные свойства среды. В рассматриваемом же случае эти функции разнесены: за взаимодействие отвечает электростатика, характеризуемая электрической плотностью ρ, а за инерцию – по-прежнему ρ_0. Естественно, мы считаем, что силы электрического отталкивания намного больше сил гравитационного притяжения. Поскольку напряженность электрического поля вблизи поверхности играет роль аналога ускорения свободного падения, т. е. $\frac{E}{R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho$, находят объяснение и оставшиеся множители. Из выражения для частот выводим условие устойчивости: $\omega_l^2 \geq 0$.

После несложных преобразований это условие примет вид $Q^2 \leq$ $\leq \gamma(l+2)(2l+1)\frac{8}{3}\pi^2\varepsilon_0 R^3$. Для основной моды $(l=2)$ $Q^2 \leq \frac{160}{3}\pi^2\varepsilon_0 R^3\gamma$, что отличается от результата Дж. Рэлея множителем (160/3 вместо 64). Это связано с тем, что в рассматриваемой модели $\varepsilon = 1$, тогда как в классическом решении $\varepsilon \to \infty$.

Таким образом, при решении методом Гамильтона комплексной задачи о гравитационно-капиллярных колебаниях сильно заряженной сферической капли получен волновой спектр, учитывающий все приведенные факторы. Этот результат в предельных случаях переходит как в классический, рассмотренный Дж. Рэлеем без электрического поля, так и в результаты, полученные для заряженной капли.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Rayleigh J.W. On the Equilibrium of Liquid Conducting Masses Charged with Electricity. Phil. Mag., 1882, vol. 14, pp. 184–186.

[2] Tomita Y., Ishibashi Y. Fundamental Studies on an Electrostatic Ink Jet Printer. *Bull.JSME*, 1986, vol. 29, № 257, pp. 3737–3743.

[3] Габович М.Д., Хомич В.А. О некоторых механизмах испускания микрокапель поверхностью расплавленного металла. *Письма в ЖТФ*, 1987, т. 13, № 11, с. 673–677.

[4] Woosley J.P. Field Injection Electrostatic Spraying of Liquid Hydrogen. *J.Appl.Phys*, 1988, vol. 21, pp. 4278–4284.

[5] Ширяева С.О. *Релаксационные и дисперсионные явления в капиллярных электростатических неустойчивостях и электродиспергирование жидкости*. Дис. … д-ра физ.-мат. наук. Ярославль, 1996, 341 с.

[6] Алиев И.Н., Алтунин В.А. Анализ исследований электрических полей в различных средах и условиях. *Инженерно-физический журнал*, 2012, т. 85, № 4, с. 881–896.

[7] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. Москва, Наука, 1986, 736 с.

[8] Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. *Дифференциальные уравнения математической физики*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996, 366 с.

[9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред*. Москва, Наука, 1992, 661 с.

Статья поступила в редакцию 05.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Алиев И.Н. Спектр электрокапиллярных колебаний заряженной капли. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 8. URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/906.html

Алиев Измаил Новрузович родился в 1945 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, академик РАЕН, профессор Академии военных наук. Автор более 100 работ в различных областях физики. e-mail: alievprof@yandex.ru