УДК 536.75

Стационарное решение уравнения для характеристической функции, описывающей броуновское движение при воздействии пуассоновского случайного процесса

© А.Н. Морозов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Приведено описание броуновского движения при воздействии на броуновскую частицу пуассоновского случайного процесса. Получено уравнение для характеристической функции флуктуаций импульса броуновской частицы и найдено его решение для стационарного случая. В первом приближении определена функция распределения флуктуаций импульса броуновской частицы и ее первые четыре момента и кумулянта. Рассчитаны асимметрия и эксцесс функции распределения. Установлена зависимость меры Кульбака от интенсивности пуассоновского процесса и эксцесса функции распределения. Предложено определять интенсивность пуассоновского процесса по результатам долговременных измерений флуктуаций тока в электролитах.

Ключевые слова: *броуновское движение, флуктуации импульса, винеровский процесс, пуассоновский процесс, характеристическая функция, функция распределения.*

При описании броуновского движения обычно предполагается, что на частицу воздействует случайный процесс, описываемый как производная винеровского процесса [1–3]. Данная модель позволяет адекватно решать целый ряд задач [4], в том числе не связанных с описанием броуновского движения [5]. Такое описание основывается на возможности применения теории марковских процессов и не учитывает наличие флуктуаций коэффициента вязкого трения [6]. Учет этих флуктуаций приводит к необходимости применения линейных интегральных преобразований и теории немарковских процессов [7, 8].

Другим способом учета особенностей взаимодействия броуновской частицы и частиц окружающей среды является предположение о независимости соударений таких частиц. В этом случае при микроскопическом описании воздействия частиц среды на броуновскую частицу считать, что случайная сила представляет собой пуассоновский случайный процесс со скачками, имеющими нормальное распределение [9, 10].

Целью данной работы является построение уравнения для характеристической функции, описывающей броуновское движение при воздействии на частицу случайной силы, задаваемой пуассоновским процессом, и нахождение стационарного решения этого уравнения.

Рассмотрим одномерное движение броуновской частицы в вязкой среде при воздействии на нее детерминированной и случайной сил.

Уравнение Ланжевена, описывающее движение такой частицы, имеет вид [11, 12]

$$\frac{dp}{dt} + \gamma p = F(t) + \xi(t). \tag{1}$$

Здесь p — импульс броуновской частицы; γ — коэффициент вязкого трения; $F(t)$ — детерминированная сила; $\xi(t)$ — δ-коррелированный случайный процесс, описывающий воздействие частиц среды на броуновскую частицу.

Уравнение (1) можно представить в виде уравнения Ито [1]:

$$dp = \left(F(t) - \gamma p\right) + dW(t), \tag{2}$$

где $W(t)$ — процесс с независимыми приращениями.

При традиционном описании считается, что $W(t)$ представляет собой винеровский случайный процесс, характеристическая функция которого имеет вид [10]

$$g_0(\lambda, t) = \exp\left(-\gamma mkT\lambda^2 t\right), \tag{3}$$

где m — масса броуновской частицы; k — постоянная Больцмана, T — температура среды; λ — фурье-образ импульса броуновской частицы.

Уравнение для характеристической функции $g(\lambda, t)$ в случае описания броуновского движения в линейной системе имеет вид [1, 9]

$$\frac{\partial g(\lambda, t)}{\partial t} = i\lambda F(t) g(\lambda, t) - \gamma\lambda \frac{\partial g(\lambda, t)}{\partial \lambda} + \chi(\lambda, t) g(\lambda, t). \tag{4}$$

Здесь $g(\lambda, t)$ — характеристическая функция, описывающая флуктуации импульса броуновской частицы, а функция $\chi(\lambda, t)$ выражается через характеристическую функцию (3) следующим образом:

$$\chi(\lambda, t) = \frac{\partial \ln g_0(\lambda, t)}{\partial \lambda} \tag{5}$$

и для случая винеровского процесса с характеристической функцией (3) принимает вид

$$\chi(\lambda, t) = -\gamma mkT\lambda^2. \tag{6}$$

Подстановка выражения (6) в уравнение (4) дает

$$\frac{\partial g(\lambda, t)}{\partial t} = i\lambda F(t) g(\lambda, t) - \gamma\lambda \frac{\partial g(\lambda, t)}{\partial \lambda} - \gamma mkT\lambda^2 g(\lambda, t). \qquad (7)$$

Далее будем считать детерминированную силу постоянной: $F(t) = F = \text{const}$. Тогда можно записать уравнение (7) для стационарного случая, когда $\frac{\partial g(\lambda, t)}{\partial t} = 0$, в виде

$$\gamma\lambda \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} = \left(i\lambda F - \gamma mkT\lambda^2\right) g(\lambda), \qquad (8)$$

или

$$\frac{dg(\lambda)}{d\lambda} = \left(i\frac{F}{\gamma} - mkT\lambda\right) g(\lambda). \qquad (9)$$

Решение уравнения (9) дает

$$g(\lambda) = \exp\left(i\frac{F}{\gamma}\lambda - \frac{mkT}{2}\lambda^2\right). \qquad (10)$$

Обратное преобразование Фурье позволяет определить функцию распределения импульса броуновской частицы:

$$f(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mkT}} \exp\left[-\frac{(p - F/\gamma)^2}{2mkT}\right]. \qquad (11)$$

Далее рассмотрим случай, при котором процесс $W(t)$ в уравнении (2) считается пуассоновским с нормальным распределением скачков. Для такого процесса характеристическая функция $g_0(\lambda, t)$ имеет вид [1]

$$g_0(\lambda, t) = \exp\left[\left(\exp\left(-\frac{\gamma mkT}{\nu}\lambda^2\right) - 1\right)\nu t\right], \qquad (12)$$

где ν — интенсивность скачков пуассоновского процесса. Тогда в соответствии с выражением (5) функцию $\chi(\lambda, t)$ можно записать в виде

$$\chi(\lambda, t) = \left(\exp\left(-\frac{\gamma mkT}{\nu}\lambda^2\right) - 1\right)\nu, \qquad (13)$$

а уравнение (4) в виде

$$\frac{\partial g(\lambda, t)}{\partial t} = i\lambda F(t) g(\lambda, t) - \gamma\lambda \frac{\partial g(\lambda, t)}{\partial \lambda} +$$

$$+ \left(\exp\left(-\frac{\gamma mkT}{\nu} \lambda^2 \right) - 1 \right) \nu g(\lambda, t). \tag{14}$$

Считая детерминированную силу постоянной, т. е. $F(t) = F = $ $= \mathrm{const},$ запишем уравнение (14) для стационарного случая:

$$\gamma\lambda \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} = i\lambda F g(\lambda) + \left(\exp\left(-\frac{\gamma mkT}{\nu} \lambda^2 \right) - 1 \right) \nu g(\lambda), \tag{15}$$

или

$$\frac{dg(\lambda)}{d\lambda} = i\frac{F}{\gamma} g(\lambda) + \frac{\nu}{\gamma\lambda} \exp\left(-\frac{\gamma mkT}{\nu} \lambda^2 \right) g(\lambda) - \frac{\nu}{\gamma\lambda} g(\lambda). \tag{16}$$

Решение уравнения (16) имеет вид [13]

$$g(\lambda) = \exp\left[i\frac{F}{\gamma}\lambda + \frac{\nu}{2\gamma} \mathrm{Ei}\left(-\frac{\gamma mkT}{\nu}\lambda^2 \right) - \frac{\nu}{\gamma} \ln\left(\sqrt{\frac{\gamma mkT}{\nu}}\lambda \right) - \frac{\nu}{2\gamma} C \right], \tag{17}$$

где $\mathrm{Ei}(z)$ — интегральная показательная функция; $C = 0{,}577$ — постоянная Эйлера. Разложение интегральной показательной функции $\mathrm{Ei}(z)$ в ряд (см. [14]) позволяет представить решение (17) в виде

$$g(\lambda) = \exp\left[i\frac{F}{\gamma}\lambda + \frac{\nu}{2\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\gamma mkT}{\nu} \right)^n \frac{\lambda^{2n}}{n \cdot n!} \right]. \tag{18}$$

Если в выражении (18) сохранить только первый член ряда, то оно принимает вид, полностью совпадающий с формулой (10), описывающей случай винеровского процесса, соответствующий традиционному описанию броуновского движения.

Проанализируем решение (18) при сохранении двух первых членов ряда в сумме под экспонентой:

$$g(\lambda) = \exp\left[i\frac{F}{\gamma}\lambda - \frac{mkT}{2}\lambda^2 + \frac{\nu}{8\gamma} m^2 k^2 T^2 \lambda^4 \right]. \tag{19}$$

Тогда можно определить первые четыре момента функции распределения импульса броуновской частицы [10]:

$$D_1 = \left.\frac{\partial g(\lambda)}{i\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = \frac{F}{\gamma}; \qquad (20)$$

$$D_2 = \left.\frac{\partial^2 g(\lambda)}{(i\partial\lambda)^2}\right|_{\lambda=0} = mkT + \left(\frac{F}{\gamma}\right)^2; \qquad (21)$$

$$D_3 = \left.\frac{\partial^3 g(\lambda)}{(i\partial\lambda)^3}\right|_{\lambda=0} = 3mkT\frac{F}{\gamma} + \left(\frac{F}{\gamma}\right)^3; \qquad (22)$$

$$D_4 = \left.\frac{\partial^4 g(\lambda)}{(i\partial\lambda)^4}\right|_{\lambda=0} = 3\frac{\gamma}{\nu}m^2k^2T^2 + 3m^2k^2T^2 + 6mkT\left(\frac{F}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{F}{\gamma}\right)^4, \qquad (23)$$

которые, в свою очередь, позволяют найти первые четыре кумулянта [15]:

$$k_1 = D_1 = \frac{F}{\gamma}; \qquad (24)$$

$$k_2 = D_2 - D_1^2 = mkT; \qquad (25)$$

$$k_3 = D_3 - 3D_2D_1 + 2D_1^3 = 0; \qquad (26)$$

$$k_4 = D_4 - 4D_3D_1 + 6D_2D_1^2 - 3D_1^4 = 3\frac{\gamma}{\nu}m^2k^2T^2 + 3m^2k^2T^2. \qquad (27)$$

Используя полученные кумулянты, можно вычислить асимметрию функции распределения

$$\kappa_3 = \frac{k_3}{k_2^{3/2}} = 0 \qquad (28)$$

и эксцесс

$$\kappa_4 = \frac{k_4 - 3k_2^2}{k_2^2} = 3\frac{\gamma}{\nu}. \qquad (29)$$

Из выражения (29) следует, что экспериментальное определение эксцесса функции распределения флуктуаций импульса (скорости) броуновской частицы дает возможность определить интенсивность пуассоновского процесса ν, описывающего взаимодействие частиц среды с броуновской частицей.

Если $F = 0$, то выражение (19) принимает вид

$$g(\lambda) = \exp\left[-\frac{mkT}{2}\lambda^2 + \frac{\nu}{8\gamma}m^2k^2T^2\lambda^4\right], \qquad (30)$$

или, считая второе слагаемое малым, в первом приближении можно записать

$$g(\lambda) = \left(1 + \frac{\nu}{8\gamma} m^2 k^2 T^2 \lambda^4\right) \exp\left(-\frac{mkT}{2}\lambda^2\right). \tag{31}$$

Характеристическая функция (31) позволяет с помощью обратного преобразования Фурье определить функцию распределения для импульса броуновской частицы

$$f(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mkT}} \left(1 + \frac{3\gamma}{8\nu} - \frac{3\gamma}{8\nu}\frac{p^2}{mkT} + \frac{\gamma}{8\nu}\frac{p^4}{m^2k^2T^2}\right) \exp\left[-\frac{p^2}{2mkT}\right], \tag{32}$$

которая при $\nu \to \infty$ совпадает с выражением (11) в случае отсутствия внешней детерминированной силы $(F = 0)$.

Функция распределения (32) позволяет вычислить меру Кульбака [16, 17]:

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \ln\left(\frac{f(p)}{f_0(p)}\right) dp, \tag{33}$$

где $f_0(p)$ — равновесное распределение флуктуаций импульса броуновской частицы,

$$f_0(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mkT}} \exp\left[-\frac{p^2}{2mkT}\right]. \tag{34}$$

После подстановки выражений (32) и (34) в интеграл (33) и проведения необходимых вычислений имеем

$$H = \frac{3}{16}\frac{\gamma}{\nu}, \tag{35}$$

или с учетом формулы (29)

$$H = \frac{\kappa_4}{16}. \tag{35}$$

Таким образом, в первом приближении мера Кульбака и эксцесс связаны между собой простым выражением (35). Полученная формула (34) для определения меры Кульбака через коэффициент вязкого трения γ и интенсивность пуассоновского процесса ν позволяет проводить оценку этих величин по результатам долговременных измерений меры Кульбака флуктуаций тока в малых объемах электролита [15].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пугачев В.С., Синицын И.Н. *Стохастические дифференциальные системы*. Москва, Наука, 1990, 632 с.

[2] Стратонович Р.Л. *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.* Москва, Советское радио, 1961, 321 с.

[3] Климонтович Ю.Л. *Статистическая физика*. Москва, Наука, 1982, 608 с.

[4] Морозов А.Н. Применение теории немарковских процессов при описании броуновского движения. *ЖЭТФ*, 1996, т. 109, вып. 4, с. 1304–1315.

[5] Марков Ю.Г., Синицын И.Н. Одно- и многомерные распределения флуктуаций неравномерности вращения Земли. *ДАН*, 2009, т. 428, № 5, с. 616–619.

[6] Морозов А.Н. Функция распределения скоростей броуновской частицы в среде с флуктуирующим коэффициентом вязкого трения. *Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки*, 2012, спец. вып. № 5, с. 39–43.

[7] Морозов А.Н. Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием. *Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки*, 2004, № 3, с. 47–56.

[8] Morozov A.N., Skripkin A.V. Spherical Particle Brownian Motion in Viscous Medium as Non-Markovian Random Process. *Physics Letters A*, 2011, vol. 375, pp. 4113–4115.

[9] Морозов А.Н. Описание диффузии и броуновского движения как пуассоновских случайных процессов. *Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки*, 1999, № 2, с. 85–90.

[10] Бункин Н.Ф., Морозов А.Н. *Стохастические системы в физике и технике*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 366 с.

[11] Леонтович М.А. *Введение в термодинамику. Статистическая физика*. Москва, Наука, 1983, 416 с.

[12] Морозов А.Н. *Необратимые процессы и броуновское движение*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997, 332 с.

[13] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды*. Москва, Наука, 1981, 800 с.

[14] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. *Специальные функции математической физики*. Москва, Наука, 1984, 344 с.

[15] Малахов А.Н. *Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований*. Москва, Советское радио, 1978, 370 с.

[16] Кульбак С. *Теория информации и статистика*. Москва, Наука, 1967, 408 с.

[17] Зарипов Р.Г. *Новые меры и методы в теории информации*. Казань, Изд-во Казан. гос. тех. ун-та, 2005, 364 с.

[18] Морозов А.Н. Предварительные результаты измерений меры Кульбака флуктуаций напряжения на электролитической ячейке. *Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки*, 2011, № 2, с. 16–24.

Статья поступила в редакцию 05.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Морозов А.Н. Стационарное решение уравнения для характеристической функции, описывающей броуновское движение при воздействии пуассоновского случайного процесса. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 8. URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/902.html

Морозов Андрей Николаевич родился в 1959 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1982 г., д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области прецизионных измерений и физической кинетики. e-mail: amor@mx.bmstu.ru