УДК 536.2.001.24

О новом подходе в методе функций Грина при решении краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа

© Э.М. Карташов
Московский государственный университет тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова, Москва, 119571, Россия

Описан новый подход в методе функций Грина при решении краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа на плоскости. В основе метода лежит построение «усеченной» функции Грина, что является достаточным для записи аналитического решения задачи.

Ключевые слова: *уравнение Лапласа на плоскости, задачи Дирихле и Неймана, функция Грина, интегральные записи аналитических решений.*

Введение. Уравнения эллиптического типа, к которому относится уравнение Лапласа, играют важную роль в приложениях. К ним приводят задачи о потенциальном движении несжимаемой жидкости, потенциале электростатического поля, стационарных тепловых и диффузионных процессах, потенциальном поле тяготения, а также задачи аэромеханики, теории упругости, электромагнетизма, дифракции и др.

Для линейных эллиптических уравнений второго порядка и, в частности, для уравнения Лапласа задачи Дирихле и Неймана являются основными краевыми задачами. Они детально разобраны в многочисленных руководствах по математической физике, в монографиях по теории ньютоновского потенциала, публикациях, касающихся применения соответствующих интегральных соотношений к изучению конкретных физических процессов. Для нахождения точных решений указанных задач существуют различные аналитические подходы, в основе которых лежат: теория потенциала и метод интегральных уравнений, метод отражения, метод конформных отображений, метод разделения переменных, метод интегральных преобразований, основанный на теории спектральных задач, метод разложения искомого решения в соответствующие ряды, функции единичных источников и диполей [1–5]. И как это ни странно, но в столь, казалось, завершенной области математической физики еще остались «математические резервы» для переосмысления основ некоторых развитых аналитических подходов, в частности, метода функций Грина при решении краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа на плоскости. Следствием последнего является существенное сокращение технических трудностей, связанных с нахождением точных аналитических решений классических краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Последнее касается ряда областей, наиболее часто встречающихся в практических приложениях: бесконечная или полубесконечная полоса, полуплоскость или ее четверть, прямоугольник, круг или его внешность, части круга, кольцо, области в параболической, эллиптической и биполярной системах координат. Следует подчеркнуть, что двумерные задачи Дирихле и Неймана могут быть точно решены только для сравнительно простых областей [6]. Полученные в настоящей статье результаты позволяют предвидеть интересные перспективы в дальнейшем развитии аналитической теории краевых задач для уравнений эллиптического типа.

Постановка задачи. Пусть D – конечная или частично ограниченная выпуклая область изменения $M(x, y)$; Γ – кусочно-гладкий контур, ограничивающий область D; $\vec{n}$ – внешняя нормаль к Γ, вектор, непрерывно меняющийся на Γ. В области D ищется гармоническая функция $T(x,y) \in C^2(D) \cap C^0(\overline{D})$, $\operatorname{grad}_M T(M) \in C^0(\overline{D}) \times$ $\times(\overline{D} = D + \Gamma)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа внутри D

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \ (x,y) \in D, \tag{1}$$

а на границе Γ граничным условиям вида (задача Дирихле)

$$T(x,y)\Big|_{(x,y)\in\Gamma} = \psi(x,y)\Big|_{(x,y)\in\Gamma} \tag{2}$$

либо (задача Неймана)

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial n}\Big|_{(x,y)\in\Gamma} = \psi(x,y)\Big|_{(x,y)\in\Gamma}. \tag{3}$$

Задача Дирихле (1) – (2) везде имеет решение при некоторых весьма общих предположениях относительно Γ и $\psi(x,y)$. Это решение имеет вид [3]

$$T(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left[\psi(x',y')\frac{\partial G(x,y,x',y')}{\partial n'}\right]\Bigg|_{(x',y')\in\Gamma} dl', \tag{4}$$

если известна функция Грина $G(x,y,x',y')$.

Для задачи Неймана (1), (3) функция $\psi(x, y)$ на кривой Γ не может быть задана произвольно. Условием существования задачи Неймана является выполнение равенства

$$\int\limits_{\Gamma} \psi(x', y')\Big|_{(x', y')\in \Gamma} dl' = 0 \,,$$

если D – замкнутая ограниченная область с кусочно-гладкой границей Γ, или если рассматриваемая бесконечная область имеет конечную границу.

При этом очевидно, что вместе с любым решением $T(x, y)$ решением будет также $T(x, y) + \text{const}.$ Можно доказать, что других решений задача Неймана не имеет, т. е. разность двух любых решений задачи Неймана постоянна. Это означает, что решение задачи Неймана единственно с точностью до аддитивной постоянной и может быть представлено в виде

$$T(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[\psi(x', y')\, G(x, y, x', y')\right]\Big|_{(x', y')\in \Gamma} dl' + \text{const}. \tag{5}$$

Согласно теории краевых задач, для уравнения (1) входящая в (4), (5) функция Грина $G(x, y, x', y')$ находится с использованием фундаментального решения $q(x, y, x', y') = \ln(1/r)$, $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ для уравнения (1) и записывается в виде

$$G(x, y, x', y') = W(x, y, x', y') - q(x, y, x', y'),$$

где $W(x, y, x', y')$ удовлетворяет условиям

$$\Delta_M W = 0\,, \quad (x, y) \in D\,, \tag{6}$$

$$W(x, y, x', y')\Big|_{(x, y)\in \Gamma} = q(x, y, x', y')\Big|_{(x, y)\in \Gamma} \tag{7}$$

в случае задачи Дирихле и

$$\Delta_M W = 0\,, \quad (x, y) \in D\,,$$

$$\frac{\partial W(x, y, x', y')}{\partial n}\Big|_{(x, y)\in \Gamma} = \frac{\partial q(x, y, x', y')}{\partial n}\Big|_{(x, y)\in \Gamma}$$

в случае задачи Неймана.

Всякий случай нахождения функции Грина соответствующей краевой задачи для той или иной области D весьма важен, так как содержит обширную информацию, позволяя выписать большое число аналитических решений в виде интегральных соотношений (4), (5) в зависимости от неоднородностей (2), (3). В то же время указанная процедура составляет основную трудность при решении задач Дирихле и Неймана, и в явном виде функция Грина известна только для небольшого числа простых областей.

Но и в этих случаях нахождение функции Грина связано с серьезными техническими (вычислительными) трудностями, однако в ряде случаев их можно избежать, если рассматривать следующий подход построения аналитических решений указанных задач в виде интегральных соотношений типа (4), (5).

Имея в виду задачи (1), (2) и (1), (3), определим функцию Грина $G(x,y,x',y')$ несколько иначе – как решение уравнения

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}=-\delta(x-x')\delta(y-y'),\ \left[(x,y),\ (x',y')\right]\in D \tag{8}$$

с граничными условиями в случае задачи Дирихле

$$G(x,y,x',y')\Big|_{(x,y)\in\Gamma}=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial G(x,y,x',y')}{\partial n}\bigg|_{(x,y)\in\Gamma}=0 \tag{10}$$

в случае задачи Неймана.

Применим вторую формулу Грина к функциям $G(M,P)$, где $P=P(x',y')$ и к искомому решению $T(M)$:

$$\begin{aligned}&\iint_D\left[G(M,P)\Delta T(M)-T(M)\Delta G(M,P)\right]d\sigma_M=\\&=\int_\Gamma\left[G(M,P)\frac{\partial T(M)}{\partial n}-T(M)\frac{\partial G(M,P)}{\partial n}\right]_{M\in\Gamma}dl_M.\end{aligned} \tag{11}$$

Учитывая теперь (1), (8), (9), (10), а также свойство симметрии формулы Грина $G(M,P)=G(P,M)$, найдем следующие интегральные соотношения:

для задачи Дирихле

$$T\left(M\right)=-\int_{\Gamma}\left[T\left(P\right)\frac{\partial G\left(M,P\right)}{\partial n_p}\right]\Bigg|_{P\in\Gamma}dl_p \tag{12}$$

и для задачи Неймана

$$T\left(M\right)=\int_{\Gamma}\left[\frac{\partial T\left(P\right)}{\partial n_p}G\left(M,P\right)\right]\Bigg|_{P\in\Gamma}dl_p\,. \tag{13}$$

В интегральных выражениях (12), (13) важно иметь в виду направление нормали при записи нормальной производной в конкретной системе координат, если учесть что в литературе по математической физике существуют разночтения в знаках в приведенных аналитических решениях задач Дирихле и Неймана. Дальнейшее упрощение процедуры нахождения аналитических решений в виде интегральных соотношений (12) и (13) заключается в том, что в (12) и (13) нет необходимости искать полное выражение для функции Грина $G\left(x,y,x',y'\right)$ путем решения задач (8), (9) или (8), (10). Действительно, введем новую функцию $G^*\left(x,y,x'\right)$ как решение

в случае задачи Дирихле

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G^*}{\partial y^2}=0\,,\quad \left(x,y\right)\in D\,,$$

$$G^*\left(x,y,x'\right)\Big|_{\left(x,y\right)\in\Gamma}=\delta\left(x-x'\right);$$

в случае задачи Неймана

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G^*}{\partial y^2}=0\,,\quad \left(x,y\right)\in D, \tag{14}$$

$$\frac{\partial G^*\left(x,y,x'\right)}{\partial n}\Bigg|_{\left(x,y\right)\in\Gamma}=\delta\left(x-x'\right).$$

Применим формулу Грина (11) к функциям $G\left(x,y,u,y'\right)$ и $G^*\left(u,y,x'\right)$, удовлетворяющим следующим условиям:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y'^2} = -\delta\left(x-u\right)\delta\left(y-y'\right), \tag{15}$$

$$G\left(x, y, u, y'\right)\Big|_{\left(u,y'\right)\in \Gamma} = 0, \tag{16}$$

либо

$$\left.\frac{\partial G\left(x, y, u, y'\right)}{\partial n}\right|_{\left(u,y'\right)\in \Gamma} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 G^*}{\partial y'^2} = 0, \tag{18}$$

$$G^*\left(u, y', x'\right)\Big|_{\left(u,y'\right)\in \Gamma} = \delta\left(u-x'\right), \tag{19}$$

либо

$$\left.\frac{\partial G^*\left(u, y', x'\right)}{\partial n}\right|_{\left(u,y'\right)\in \Gamma} = \delta\left(u-x'\right). \tag{20}$$

Имеем

$$\iint\limits_D \left[G\left(x, y, u, y'\right)\Delta G^*\left(u, y', x'\right) - G^*\left(u, y', x'\right)\Delta G\left(x, y, u, y'\right)\right] du dy' =$$

$$= \int\limits_\Gamma \left[G\left(x, y, u, y'\right)\frac{\partial G^*\left(u, y', x'\right)}{\partial n_p} - G^*\left(u, y', x'\right)\frac{\partial G\left(x, y, u, y'\right)}{\partial n_p}\right]_{\left(u,y'\right)\in \Gamma} dl_p,$$

где $p = p\left(u, y'\right)$.

Учитывая (15) – (20), приходим к основному результату:
в случае задачи Дирихле

$$G^*\left(x, y, x'\right) = -\left.\frac{\partial G\left(x, y, x', y'\right)}{\partial n'}\right|_{\left(x',y'\right)\in \Gamma}, \tag{21}$$

в случае задачи Неймана

$$G^*\left(x, y, x'\right) = G\left(x, y, x', y'\right)\Big|_{\left(x',y'\right)\in \Gamma}.$$

Таким образом, интегральные представления аналитических решений краевых задач Дирихле (1), (2) и Неймана (1), (3) теперь могут быть записаны в виде:

задача Дирихле

$$T\left(x,y\right)=\int\limits_{\Gamma}\left[T\left(x',y'\right)G^{*}\left(x,y,x'\right)\right]_{\left(x',y'\right)\in\Gamma}dl', \tag{22}$$

задача Неймана

$$T\left(x,y\right)=\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\partial T\left(x',y'\right)}{\partial n'}G^{*}\left(x,y,x'\right)\right]_{\left(x',y'\right)\in\Gamma}dl'. \tag{23}$$

Построение функции $G^{*}\left(x,y,x'\right)$ значительно проще по сравнению с процедурой нахождения полного выражения для функции Грина $G\left(x,y,x',y'\right)$.

Рассмотрим ряд иллюстративных примеров для классических областей, описанных в литературе по математической физике.

Пусть D – полуплоскость $y>0$, на границе $y=0$ задано условие (задача Дирихле)

$$T\left(x,y\right)\Big|_{y=0}=\psi\left(x\right),\quad \left|x\right|<\infty. \tag{24}$$

Функция Грина для полуплоскости $y>0$ найдем, предварительного решив задачи (7) – (8), и получим [4]

$$G\left(x,y,x',y'\right)=\ln\left(1/r\right)-\ln\left(1/r^{*}\right), \tag{25}$$

где $r=\sqrt{\left(x-x'\right)^{2}+\left(y-y'\right)^{2}}$, $r^{*}=\sqrt{\left(x-x'\right)^{2}+\left(y+y'\right)^{2}}$.

Выражение (25) находим методом отражения. Интеграл (4) и выражение (25) дают решение указанной задачи в виде интеграла Пуассона для полуплоскости:

$$T\left(x,y\right)=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi\left(x'\right)}{\left(x-x'\right)^{2}+y^{2}}dx'. \tag{26}$$

Не менее громоздка процедура построения функции Грина $G\left(x,y,x',y'\right)$, если исходить из определения (8), (9):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}=-\delta(x-x')\delta(y-y'),\quad |x|<\infty,\ y>0; \tag{27}$$

$$G(x,y,x',y')\big|_{y=0}=0,\quad |x|<\infty; \tag{28}$$

$$\left|G(x,y,x',y')\right|<+\infty,\quad y\ge 0,\ |x|<\infty. \tag{29}$$

Рассмотрим задачу (27), (28). В пространстве изображений синус-преобразования Фурье $\overline{G}(x,\xi,x',y')=\left(\sqrt{2/\pi}\right)\int\limits_0^\infty G(x,y,x',y')\sin\xi y dy$ решение преобразованного уравнения (27) запишем в виде

$$\overline{G}(x,\xi,x',y')=C_1\exp(\xi x)+C_2\exp(-\xi x)+\left(1/\sqrt{2\pi}\,\xi\right)\sin\xi y'\times$$
$$\times\left[\exp(\xi x)\int\limits_x^\infty\exp(-\xi\alpha)\delta(\alpha-x')d\alpha+\exp(-\xi x)\int\limits_{-\infty}^x\exp(\xi\alpha)\delta(\alpha-x')d\alpha\right].$$

Далее, учитывая условие ограниченности решения в бесконечно удаленных точках (29), найдем функцию

$$\overline{G}(x,\xi,x',y')=\begin{cases}\left(1/\sqrt{2\pi}\,\xi\right)\sin\xi y'\exp\left[-\xi(x-x')\right], & x'<x,\\ \left(1/\sqrt{2\pi}\,\xi\right)\sin\xi y'\exp\left[-\xi(x'-x)\right], & x'>x.\end{cases}$$

Искомый оригинал (по формуле обращения) имеет вид

$$G(x,y,x',y')=(1/2\pi)\ln\frac{\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}. \tag{30}$$

Искомое решение $T(x,y)$ задачи (1), (24) по формуле (12), записанной для данной области в виде

$$T(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x')\left.\frac{\partial G(x,y,x',y')}{\partial y'}\right|_{y'=0}dx',$$

совпадает с интегралом Пуассона (26).

Теперь рассмотрим нахождение функции $G^*(x,y,x')$ как решение задачи

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^*}{\partial y^2} = 0, \quad |x| < \infty, \; y > 0; \tag{31}$$

$$G^*(x,y,x')\Big|_{y=0} = \delta(x - x'), \quad |x| < \infty; \tag{32}$$

$$\left|G^*(x,y,x')\right| < +\infty, \quad y \ge 0, \; |x| < \infty. \tag{33}$$

В пространстве экспоненциального преобразования Фурье $\overline{G^*}(\xi,y,x') = 1/2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\xi x) G^*(x,y,x') dx$ решение преобразованного уравнения (31) с учетом граничных условий (32), (33) имеет вид $G^*(\xi,y,x') = \left(1/\sqrt{2\pi}\right)\exp\left(i\xi x' - |\xi| y\right)$. Искомый оригинал находим по формуле обращения:

$$G^*(x,y,x') = (1/2\pi)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\xi x' - i\xi x - |\xi| y\right) d\xi = \frac{y}{\pi\left[(x-x')^2 + y^2\right]}. \tag{34}$$

Равенство (21), записанное для данной области в виде $G^*(x,y,x') = \left[\frac{\partial G(x,y,x',y')}{\partial y'}\right]_{y'=0}$, проверяется непосредственно выражениями (30), (34). Искомое решение $T(x,y)$ задачи (1), (24) имеет вид (24):

$$T(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x') G^*(x,y,x') dx'$$

и дает интеграл Пуассона (26).

Рассмотрим далее задачу Дирихле для круга:

$$\frac{\partial^2 T(r,\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T(r,\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \le r < R, \quad 0 \le \varphi < 2\pi; \tag{35}$$

$$T(r,\varphi)\Big|_{r=R} = \psi(\varphi), \; 0 \le \varphi < 2\pi; \tag{36}$$

$$\left|T(r,\varphi)\right| < +\infty, \quad 0 \le r < R, \quad 0 \le \varphi < 2\pi. \tag{37}$$

В математической физике эта задача считается классической и стандартной, хотя ее решение связано с длительными вычислениями. Согласно теории функции Грина $G(r,\varphi,r',\varphi') = W(r,\varphi,r',\varphi') - q(r,\varphi,r',\varphi')$, где $q(r,\varphi,r',\varphi') = \ln(1/\rho)$, $\rho = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\varphi-\varphi')}$, а $W(r,\varphi,r',\varphi')$ является решением задачи (6), (7), записанной для круга в полярной системе координат, находим с использованием сопряженности точек относительно окружности [4]:

$$G(r,\varphi,r',\varphi') = \ln \frac{(R/r')}{\sqrt{r^2 + (R^4/r'^2) - 2r(R^2/r')\cos(\varphi-\varphi')}} - \\ - \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\varphi-\varphi')}}. \tag{38}$$

Интегральное выражение (4), записанное для области, указанной в (35), имеет вид

$$T(r,\varphi) = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varphi') \left. \frac{\partial G(r,\varphi,r',\varphi')}{\partial r'} \right|_{r'=R} d\varphi'$$

и с учетом (38) дает решение задачи (35) – (37) в виде интеграла Пуассона для круга

$$T(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varphi') \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi-\varphi')} d\varphi'. \tag{39}$$

Решение задачи (35) – (37) можно записать и в виде интегрального соотношения (12)

$$T(r,\varphi) = -\int_0^{2\pi} \psi(\varphi') \left[R \frac{\partial G(r,\varphi,r',\varphi')}{\partial r'} \right]_{r'=R} d\varphi', \tag{40}$$

если исходить из определения функции Грина (8), (9), то

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} = -\frac{1}{r}\delta(r-r')\delta(\varphi-\varphi'), \\ 0 \le r < R, \quad 0 \le \varphi < 2\pi; \tag{41}$$

$$G\left(r,\varphi,r',\varphi'\right)\Big|_{r=R}=0\,,\quad \left(\varphi,\varphi'\right)\in\left[0,2\pi\right); \tag{42}$$

$$\left|G\left(r,\varphi,r',\varphi'\right)\right|<+\infty\,,\quad r\geq\infty,\quad r\geq 0,\quad 0\leq\varphi<2\pi\,. \tag{43}$$

Однако полное выражение для функции Грина $G\left(r,\varphi,r',\varphi'\right)$ как решение задачи (41) – (43) можно не находить, так как согласно развиваемой в статье теории в виде (21) под знаком интеграла (40)

$$-\frac{\partial G\left(r,\varphi,r',\varphi'\right)}{\partial r'}\Bigg|_{r'=R}=G^{*}\left(r,\varphi,\varphi'\right), \tag{44}$$

где $G^{*}\left(r,\varphi,\varphi'\right)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial G^*}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G^*}{\partial\varphi^2}=0\,,\quad 0\leq r<R,\quad 0\leq\varphi<2\pi\,; \tag{45}$$

$$G^{*}\left(r,\varphi,\varphi'\right)\Big|_{r=R}=\frac{1}{R}\delta\left(\varphi-\varphi'\right),\ \left(\varphi,\varphi'\right)\in\left[0,2\pi\right); \tag{46}$$

$$\left|G^{*}\left(r,\varphi,\varphi'\right)\right|<+\infty\,,\quad r\geq 0,\quad 0\leq\varphi\leq 2\pi\,. \tag{47}$$

Эта задача интересна тем, что для ее решения можно применить теорию сопряженных гармонических функций – достаточно редкий подход в аналитической теории теплопроводности твердых тел для случаев установившихся температур. Предлагаемые ниже преобразования основаны на следующих соображениях.

Пусть $\xi=\xi\left(x,y\right)$ и $\eta=\eta\left(x,y\right)$ – действительные функции x и y, причем такие, что

$$\xi+i\eta=f\left(x+iy\right)=f\left(z\right).$$

Тогда

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+i\frac{\partial\eta}{\partial x}=f'\left(z\right);\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}+i\frac{\partial\eta}{\partial y}=if'\left(z\right),$$

откуда

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y};\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{\partial\xi}{\partial y}\,. \tag{48}$$

Отсюда следует, что кривые $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ ортогональны.

В задаче (45) – (47) запишем уравнение (47) в декартовой системе координат, а граничные условия оставим без изменения:

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^*}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \le \sqrt{x^2 + y^2} < R; \tag{49}$$

$$G^*\left(r, \varphi, \varphi'\right)\Big|_{r=R} = \frac{1}{R}\delta\left(\varphi - \varphi'\right), \quad \left(\varphi, \varphi'\right) \in \left[0, 2\pi\right); \tag{50}$$

$$\left|G^*\left(r, \varphi, \varphi'\right)\right| < +\infty, \quad 0 \le r \le R, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \tag{51}$$

Введем преобразование

$$\xi + i\eta = -i\ln\left[\left(x + iy\right)/R\right],$$

а вместо функции $G^*\left(x, y, x'\right)$ тождественно равную ей: $W\left(\xi, \eta, \xi'\right) = G^*\left(x, y, x'\right)$. Так как $x + iy = r\exp\left(i\varphi\right)$, то

$$\xi = \varphi, \quad \eta = \ln\left(R/r\right) \tag{52}$$

и область $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi < 2\pi$ перейдет в область $\eta \ge 0$, $0 \le \xi < 2\pi$. Используя (48), можно показать, что функция $W\left(\xi, \eta, \xi'\right)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа, и задача (49) – (51) теперь будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0, \quad \eta > 0,\ 0 \le \xi < 2\pi; \tag{53}$$

$$W\left(\xi, \eta, \xi'\right)\Big|_{\eta=0} = \frac{1}{R}\delta\left(\xi - \xi'\right), \quad \left(\xi, \xi'\right) \in \left[0, 2\pi\right); \tag{54}$$

$$W\left(\xi, \eta, \xi'\right) = W\left(\xi + 2\pi, \eta, \xi'\right), \quad \eta > 0,\ \xi' \in \left[0, 2\pi\right); \tag{55}$$

$$\left|W\left(\xi, \eta, \xi'\right)\right| < +\infty, \quad \eta \ge 0,\ 0 \le \xi < 2\pi. \tag{56}$$

Задача (53) – (56) может быть решена методом разделения переменных [6], что дает в конечном счете

$$W\left(\xi,\eta,\xi'\right)=\frac{1}{2\pi R}\frac{1-\exp\left(-2\eta\right)}{1-2\exp\left(-\eta\right)\cos\left(\xi-\xi'\right)+\exp\left(-2\eta\right)}.$$

Возвращаясь к старым переменным (52), находим искомую функцию

$$G^{*}\left(r,\varphi,\varphi'\right)=\frac{1}{2\pi R}\frac{R^{2}-r^{2}}{R^{2}+r^{2}-2Rr\cos\left(\varphi-\varphi'\right)}, \qquad (57)$$

вместе с этим на основании (40), (44), (57) и искомое решение задачи (35) – (37) в виде интеграла Пуассона (47) для круга.

Аналогично можно записать ограниченное решение внешней задачи (при $r\geq R$) для уравнения (35) в виде

$$T\left(r,\varphi\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\psi\left(\varphi'\right)\frac{r^{2}-R^{2}}{R^{2}+r^{2}-2Rr\cos\left(\varphi-\varphi'\right)}d\varphi'.$$

Так же могут быть рассмотрены задачи Неймана для полуплоскости и круга.

Ограничимся краткой справкой.

Для полуплоскости $\left|x\right|<\infty$, $y>0$ функция $T\left(x,y\right)$ удовлетворяет уравнению (1) и согласно (3) граничному условию

$$\left.\frac{\partial T\left(x,y\right)}{\partial y}\right|_{y=0}=-\psi\left(x\right),\quad \left|x\right|<\infty.$$

Функция $G^{*}\left(x,y,x'\right)$ удовлетворяет уравнению (14), граничному условию

$$\left.\frac{\partial G^{*}\left(x,y,x'\right)}{\partial y}\right|_{y=0}=-\delta\left(x-x'\right),\quad \left|\left(x,x'\right)\right|<\infty$$

и имеет вид

$$G^{*}\left(x,y,x'\right)=-\left(1/\pi\right)\ln\sqrt{\left(x-x'\right)^{2}+y^{2}}=\left.G\left(x,y,x',y'\right)\right|_{y'=0}=$$

$$=\left.\left\{-\left(1/2\pi\right)\left[\ln\sqrt{\left(x-x'\right)^{2}+\left(y-y'\right)^{2}}+\ln\sqrt{\left(x-x'\right)^{2}+\left(y+y'\right)^{2}}\right]\right\}\right|_{y'=0}.$$

Искомое решение

$$T(x,y) = -(1/\pi)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x')\ln\sqrt{(x-x')^2+y^2}\,dx' + \text{const}.$$

Для круга $0 \le r \le R, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$ функция $T(r,\varphi)$ удовлетворяет уравнению (35) и граничному условию

$$\left.\frac{\partial T(r,\varphi)}{\partial r}\right|_{r=R} = \psi(\varphi), \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Функция $G^*(r,\varphi,\varphi')$ удовлетворяет уравнению (45) и граничному условию

$$\left.\frac{\partial G^*(r,\varphi,\varphi')}{\partial r}\right|_{r=r'} = \frac{1}{R}\delta(\varphi-\varphi').$$

Искомое решение $T(r,\varphi)$ имеет вид (29) (интеграл Дини)

$$T(r,\varphi) = R\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial T(r'\varphi')}{\partial r'}G^*(r,\varphi,\varphi')\right]_{r'=R} d\varphi' =$$

$$= R\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\varphi')\ln\frac{r^2-2Rr\cos(\varphi-\varphi')+R^2}{R^2}d\varphi' + \text{const}.$$

Ограниченным решением внешней задачи (при $r \ge R$) для уравнения (35) с граничным условием $\left.\frac{\partial T(r,\varphi)}{\partial r}\right|_{r=R} = -\psi(\varphi), \; 0 \le \varphi < 2\pi$ является интеграл вида

$$T(r,\varphi) = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\varphi)\ln\frac{r^2-2Rr\cos(\varphi-\varphi')+R^2}{r^2}d\varphi' + \text{const}.$$

Рассмотренный подход касался краевых задач для уравнения Лапласа. Для уравнения Пуассона $\Delta T(M) + F(M) = 0, \; M \in D$ остаются в силе классические представления теории уравнений эллиптического типа.

Заключение. Краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа на плоскости принадлежат к числу достаточно трудных случаев для исследований. Несмотря на развитую теорию решения уравнений эллиптического типа двумерных задач Дирихле и Неймана, точно решены задачи только для сравнительно простых областей. Метод функций Грина в этих исследованиях имеет преимущество по сравнению с другими подходами, хотя и связан с длительными и громоздкими выкладками. Развитый в статье метод нахождения «усеченной» функции Грина значительно упрощает процедуру нахождения точных аналитических решений указанных задач и позволяет предвидеть дальнейшее развитие аналитической теории уравнений эллиптического типа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Избранные труды В.А. Ильина*. Т. 1. Москва, Макс-Пресс, 2008, 727 с.

[2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. Москва, Наука, 1966, 724 с.

[3] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*. Москва, Наука, 1971, 512 с.

[4] Полянин А.Д. *Линейные уравнения математической физики*. Москва, Физматлит, 2001, 576 с.

[5] Карташов Э.М., Кудинов В.А. *Аналитическая теория теплопроводности и термоупругости*. Москва, URSS, 2012, 970 с.

[6] Карташов Э.М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*. Москва, Высшая школа, 2001, 540 с.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Карташов Э.М. О новом подходе в методе функций Грина при решении краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 13. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/900.html

Карташов Эдуард Михайлович – д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» Московского государственного университета тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова. e-mail: kartashov@mitht.ru