

Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости

Димитриенко Ю.И.¹, Яковлев Д.О.^{1,2}

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

²ОАО «ВПК «НПО машиностроения»,

Московская область, г. Реутов, 143966, Россия

Представлены основные соотношения новой теории тонких многослойных анизотропных пластин, построенной из общих уравнений общей трехмерной теории упругости путем введения асимптотических разложений по малому параметру, без каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине. Показано, что глобальная (осредненная по определенным правилам) задача теории термоупругости пластин в разработанной теории получается близкой к теории пластин Кирхгофа – Лява, но отличается от нее наличием третьего порядка производных от продольных перемещений пластины. Предложенная теория позволяет вычислить все шесть компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига. Проведен численный сравнительный анализ решений, полученных с помощью предложенной новой теории тонких пластин и с помощью конечно-элементного решения трехмерной задачи теории упругости и термоупругости на основе программного комплекса ANSYS. Показано, что предложенный метод позволяет вычислять все шесть напряжений в пластине с очень высокой точностью, приблизиться к которому с помощью конечно-элементного трехмерного решения удастся только при использовании очень мелких сеток с большим числом конечных элементов (КЭ) по толщине пластины, что является серьезным ограничением при проведении расчетов тонкостенных пластин и оболочек.

Ключевые слова: многослойные композитные пластины, метод асимптотического осреднения, асимптотическая теория пластин, метод конечного элемента.

Введение. Проблемы модификации классических теорий пластин и оболочек с целью получения уточненных алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния тонких тел рассматриваются во многих работах, укажем лишь некоторые исследования в этой области [1–9]. Сравнительно недавно [2, 3] появились работы, в которых предложены теории тонких пластин и оболочек с двумерной микроструктурой – гофрированными, сотовыми и сетчатыми конструкциями, используя для этого метод асимптотического осреднения (метод гомогенизации – МГ), хорошо зарекомендовавший себя при осреднении композитов с трехмерной периодической структурой [10–19]. В этих работах использовано допущение о линейном характере перемещений по толщине. В работе [20] был разработан МГ для тонких многослойных пластин, в котором не делается предположение

о линейности распределения перемещений, в ней было показано, что для многослойных пластин такое линейное распределение отсутствует, а имеет место аналог гипотезы ломаной линии, используемой в теории Григолюка – Куликова [1]. Целью настоящей работы является проведение сравнительного анализа численных решений, получаемых с помощью разработанной асимптотической теории многослойных тонких пластин и с помощью непосредственного численного решения задачи трехмерной теории упругости на основе конечно-элементного метода, реализованного в одном из наиболее широко распространенных «тяжелых» программных комплексов ANSYS.

Основные допущения асимптотической теории пластин. Рассмотрим многослойную пластину (рис. 1) постоянной толщины, введем малый параметр $\kappa = h/L \ll 1$ как отношение общей толщины пластины h к характерному размеру всей пластины L (ее максимальной длине). Введем также глобальные x_k и локальную ξ координаты:

$$x_k = \tilde{x}_k / L \quad \xi = x_3 / \kappa, \quad k = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где \tilde{x}_k – обычные декартовы координаты, ориентированные таким образом, что ось $O\tilde{x}_3$ направлена по нормали к внешней и внутренней плоскостям пластины, а оси $O\tilde{x}_1$ $O\tilde{x}_2$ принадлежат срединной поверхности пластины. Полагаем, что существуют два масштаба изменения перемещений u_k : один по направлениям $O\tilde{x}_1$ $O\tilde{x}_2$, а второй по направлению $O\tilde{x}_3$. Координаты x_3 и ξ в методе асимптотического осреднения рассматриваются как независимые переменные. Координата ξ по толщине пластины изменяется в диапазоне $-0,5 < \xi_3 < 0,5$.

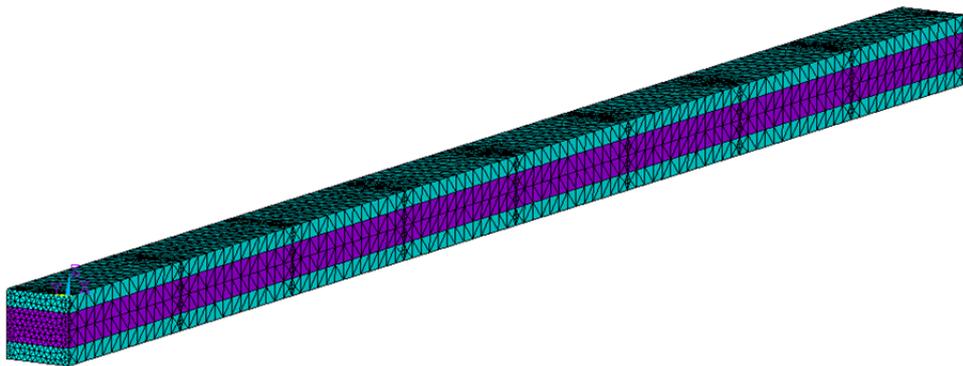


Рис. 1. Неравномерная конечно-элементная сетка трехслойной пластины, использованная в расчетах

Рассмотрим для пластины трехмерную задачу линейной теории упругости [21]:

$$\begin{aligned} \nabla_j \sigma_{ij} &= 0, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j), \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \\ \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3} &= -\tilde{p}_{\pm} \delta_{i3}, \quad \Sigma_T : u_i = u_{ei}, \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}] = 0, \quad [u_3] = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

состоящую из уравнений равновесия, соотношений Коши, обобщенного закона Гука, граничных условий на внешних поверхностях пластины оболочки – на внешней и внутренней поверхности $\Sigma_{3\pm}$ (их уравнение имеет вид $\tilde{x}_3 = \pm h/2$) и на торцевой поверхности Σ_T , а также граничных условий на поверхности контакта Σ_S слоев пластины ($[u_i]$ – скачок функций), которые могут и отсутствовать, например, для однослойной пластины.

В уравнениях (2) обозначены: σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; ε_{ij} – компоненты тензора деформаций; u_j – компоненты вектора перемещений; $\nabla_j = \partial / \partial \tilde{x}_j$ – оператор дифференцирования по декартовым координатам; $C_{ijkl}(\xi)$ – компоненты тензора модулей упругости, который полагается зависящим от координаты $\xi_3 = \xi$, так как этот тензор различен для разных слоев пластины. Никакого специального допущения об анизотропии материалов слоев пока не делаем, т. е. тензоры модулей упругости имеют по 21 независимой компоненте [21].

Далее принимаем основное допущение, состоящее в том, что давление \tilde{p}_{\pm} на внешней и внутренней поверхностях пластины имеет порядок малости $O(\kappa^3)$:

$$\tilde{p}_{\pm} = \kappa^3 p_{\pm}, \quad p_{\pm} = O(1)E_0, \quad (3)$$

где E_0 – характерное значение модуля упругости материала пластины (размерная величина); $O(1)$ – безразмерная величина, порядок которой не превышает 1. Допущение (3), как правило, соответствует реальным условиям нагружения тонких пластин, числовой пример для пластины из стеклотекстолита приведен далее.

Асимптотические разложения. Задача (2) содержит локальную координату ξ , а также малый параметр κ в граничных условиях (это

коэффициент при давлении), поэтому ее решение ищем в виде асимптотических разложений по параметру κ в виде функций, зависящих от глобальных и локальной координат:

$$u_k = u_k^{(0)}(x_I) + \kappa u_k^{(1)}(x_I, \xi) + \kappa^2 u_k^{(2)}(x_I, \xi) + \kappa^3 u_k^{(3)}(x_I, \xi) + \dots, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \kappa \varepsilon_{ij}^{(1)} + \kappa^2 \varepsilon_{ij}^{(2)} + \dots, \quad (5)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \kappa \sigma_{ij}^{(1)} + \kappa^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \dots \quad (6)$$

Здесь и далее индексы, обозначенные заглавными буквами I, J, K, L , принимают значения 1, 2, а индексы i, j, k, l – значения 1, 2, 3.

Далее будем использовать обозначения для производных по локальной координате $u_{i/3}^{(1)} = \partial u_i^{(1)} / \partial \xi$ и по глобальным координатам $u_{i,j}^{(1)} = \partial u_i^{(1)} / \partial x_j$, введем также операцию осреднения по толщине пластины

$$\langle u_i^{(1)} \rangle = \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(3)} d\xi. \quad (7)$$

Перемещения в пластине. Подставляя асимптотические разложения (4)–(6) в систему уравнений (2) и собирая в ней члены при одинаковых степенях от κ , получим рекуррентную последовательность специальных локальных задач теории упругости 0-, 1-, 2- и 3-го и т. д. приближений для нахождения всех членов асимптотических разложений (4)–(6). Подробности этого метода изложены в [20]. Для перемещений все члены разложения выше 0-го приближения, т. е. $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, u_k^{(3)}, \dots$ являются линейными функциями от нулевого приближения $u_k^{(0)}$ и его производных: $u_{k/I}^{(0)}, u_{k/IK}^{(0)}$ и т. д. После подстановки всех этих выражений для $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, u_k^{(3)}, \dots$ в асимптотическое разложение (4), после удерживания только главных членов ряда (более высокие асимптотики отбрасываем) получим, что перемещения в пластине с точностью до членов 2-го порядка малости имеют вид

$$u_I = u_I^{(0)} + \kappa(-\xi u_{3,I}^{(0)} + \varepsilon_{KL}^{(0)} U_{IKL}(\xi)), \quad (8)$$

$$u_3 = u_3^{(0)} + \kappa \varepsilon_{KL}^{(0)} U_{3KL}(\xi), \quad (9)$$

где обозначены деформации срединной поверхности пластины в нулевом приближении

$$\varepsilon_{KL}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{K,L}^{(0)} + u_{L,K}^{(0)}), \quad (10)$$

а также функции, относящиеся к известным величинам

$$U_{iKL}(\xi) = 2\left(\int_{-0,5}^{\xi} C_{i3j3}^{-1} C_{j3KL} d\xi\right) - \int_{-0,5}^{\xi} C_{i3j3}^{-1} C_{j3KL} d\xi. \quad (11)$$

Полученные выражения (8) и (9) для многослойных пластин близки по характеру распределения перемещений по толщине к теории ломаной нормали Э.И. Григолюка [1], в которых похожие выражения принимаются как гипотезы. Тем не менее имеется и отличие (8), (9) от формул для перемещений из [1], заключающееся в нелинейной зависимости перемещений u_k от «толщинной» координаты ξ , наличие которой обусловлено различием модулей упругости для разных слоев пластины.

Осредняя выражения (8) и (9) по толщине с учетом (7) и (11), получим, что

$$\langle u_I \rangle = u_I^{(0)}, \quad \langle u_3 \rangle = u_3^{(0)}, \quad (12)$$

т. е. перемещения нулевого приближения $u_k^{(0)}$ являются средними по толщине перемещениями пластины и, вообще говоря, могут не совпадать с перемещениями срединной поверхности пластины $u_k|_{\xi=0}$, относительно которых, как правило, в теории пластин и формулируются кинематические допущения в приближенных теориях пластин. Перемещения $u_k|_{\xi=0}$ и $\langle u_I \rangle = u_I^{(0)}$ совпадают для однослойных пластин.

Отметим также, что в классической теории пластин С.П. Тимошенко функции $U_{iKL}(\xi)$ полагают равными нулю [21].

Осредненные уравнения равновесия многослойных пластин. Для вычисления перемещений нулевого приближения $u_k^{(0)}$, согласно разработанному методу [20], получим осредненные уравнения равновесия тонких пластин:

$$T_{IJ,J} = 0, \quad Q_{J,J} = \Delta \bar{p}, \quad M_{IJ,J} - Q_I = 0, \quad (13)$$

которые по форме совпадают с традиционными уравнениями теории тонких пластин, где T_{IJ} – усилия; M_{IJ} – моменты и Q_I – перерезывающие силы; $\Delta \bar{p} = \kappa^2 \Delta p$, $\Delta p = p_+ - p_-$.

В разработанной теории усилия T_{IJ} , моменты M_{IJ} и перерезывающие силы Q_I вводятся с помощью следующих осредненных соотношений:

$$\begin{aligned} T_{IJ} &= \langle \sigma_{IJ}^{(0)} \rangle + \kappa \langle \sigma_{IJ}^{(1)} \rangle + \dots, \\ Q_I &= \kappa \langle \sigma_{I3}^{(1)} \rangle + \kappa^2 \langle \sigma_{I3}^{(2)} \rangle + \dots, \\ M_{IJ} &= \kappa \langle \xi \sigma_{IJ}^{(0)} \rangle + \kappa^2 \langle \xi \sigma_{IJ}^{(1)} \rangle + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя выражения (5), (6) для деформаций и напряжений $\sigma_{IJ}^{(0)}$, $\sigma_{IJ}^{(1)}$, а также определяющие соотношения системы (2) в интегралы формул (14) и удерживая в них только первые два приближения, получим осредненные определяющие соотношения теории пластин

$$\begin{aligned} T_{IJ} &= \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + B_{IJKL} \eta_{KL} + K_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)}, \\ M_{IJ} &= B_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + D_{IJKL} \eta_{KL} + \bar{K}_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)}, \\ Q_I &= K_{IJKL} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \kappa^2 \langle \sigma_{I3}^{(2)} \rangle, \end{aligned} \quad (15)$$

где обозначены тензоры осредненных упругих констант пластины:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{IJKL} &= \langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle = \langle C_{IJKL} \rangle - \langle C_{Ijk3} C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle, \\ C_{IJKL}^{(0)} &= C_{IJKL} - C_{Ijk3} C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL}, \end{aligned} \quad (16)$$

а также

$$\begin{aligned} B_{IJKL} &= \kappa \langle \xi C_{IJKL}^{(0)} \rangle, \quad K_{IJKLM} = \kappa \langle \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} \rangle, \\ K_{IJKL} &= \kappa \langle \int_{-0,5}^{\xi} (\langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi \rangle, \\ \bar{D}_{IJKL} &= \kappa^2 \langle \xi^2 C_{IJKL}^{(0)} \rangle, \quad \bar{K}_{IJKLM} = \kappa^2 \langle \xi \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} \rangle, \\ \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} &= N_{IJKLM}^{(0)} + \Phi_{IJKLM}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$N_{IJKLM}^{(0)} = -C_{Ijk3} C_{k3P3}^{-1} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle C_{PMKL}^{(0)} \rangle - C_{PMKL}^{(0)}) d\xi,$$

$$\Phi_{KLMNS}(\xi) = \tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) - \langle \tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) \rangle,$$

$$\tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) = - \int_{-0,5}^{\xi} (C_{K3i3}^{-1} \delta_{SL} + C_{L3i3}^{-1} \delta_{SK}) C_{i3MN} d\xi.$$

В систему осредненных определяющих соотношений (15) входят деформации нулевого приближения $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ (10), кривизны η_{KL} и градиенты деформаций $\varepsilon_{KL,N}^{(0)}$:

$$\eta_{KL} = -u_{3,KL}^{(0)}, \quad \varepsilon_{IJ,K}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{I,JK}^{(0)} + u_{J,IK}^{(0)}), \quad (18)$$

которые зависят от трех функций $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$, глобальных переменных x_I

Подставляя далее выражения (10), (17) в (18), а затем (15) в (13), получим систему осредненных уравнений равновесия пластины относительно трех неизвестных функций $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{IJKL}u_{K,LJ}^{(0)} + B_{IJKL}u_{3,KLJ}^{(0)} + K_{IJKLM}u_{K,LMJ}^{(0)} &= 0, \\ B_{IJKL}u_{K,LJI}^{(0)} + D_{IJKL}u_{3,KLJI}^{(0)} + \bar{K}_{IJKLM}u_{K,LMJI}^{(0)} &= \Delta \bar{p}. \end{aligned} \quad (19)$$

Эта система имеет четвертый порядок относительно прогиба $u_3^{(0)}$, как в классической теории пластин Кирхгофа – Лява, и третий порядок производных относительно продольных перемещений $u_I^{(0)}$, чем отличается от теории Кирхгофа – Лява.

Напряжения в пластине. После того как решена осредненная задача (18) и найдены функции $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$, вычисляем деформации (10), а затем напряжения $\sigma_{IJ}^{(0)}$ по формуле: $\sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL}^{(0)}\varepsilon_{KL}^{(0)}$. Сдвиговые напряжения $\sigma_{I3}^{(0)}$ и поперечное напряжение, $\sigma_{33}^{(0)}$, как было установлено в [20], в пластине тождественно равны нулю. Ненулевые значения сдвиговых напряжений появляются у следующего члена асимптотического разложения – $\sigma_{I3}^{(1)}$. Для поперечного напряжения первое в асимптотическом ряду ненулевое значение – это значение $\sigma_{33}^{(2)}$. В результате, сохраняя в асимптотическом разложении (6) только главные ненулевые члены и отбрасывая члены более высокого порядка малости, получим следующие выражения для всех шести компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ} &= \sigma_{IJ}^{(0)}, \\ \sigma_{33} &= -\kappa^2 \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{3J,J}^{(1)} \rangle - \sigma_{3J,J}^{(1)}) d\xi + \kappa^3 (-p_- - \Delta p(\xi + 0,5) + \\ &+ \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{3J,J}^{(2)} \rangle - \sigma_{3J,J}^{(2)}) d\xi), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\sigma_{I3} = \kappa \sigma_{I3}^{(1)} + \kappa^2 \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{IJ,J}^{(1)} \rangle - \sigma_{IJ,J}^{(1)}) d\xi.$$

Входящие в эти выражения напряжения $\sigma_{I3}^{(1)}$, $\sigma_{IJ}^{(1)}$ и $\sigma_{I3}^{(2)}$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^{(0)} &= C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(0)}, \\ \sigma_{IJ}^{(1)} &= \xi C_{IJKL}^{(0)} \eta_{KL} + \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} \varepsilon_{KL,M}^{(0)}, \\ \sigma_{I3}^{(1)} &= \varepsilon_{KL,J}^{(0)} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi, \quad \sigma_{33}^{(1)} = 0, \\ \sigma_{I3}^{(2)} &= \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{IJ,J}^{(1)} \rangle - \sigma_{IJ,J}^{(1)}) d\xi. \end{aligned} \quad (21)$$

Все соотношения (21) содержат только один набор неизвестных функций – деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ (а также их производные $\varepsilon_{KL,M}^{(0)}$) и компоненты тензора искривлений η_{KL} . Эти величины полностью вычисляются после того, как решены осредненные уравнения теории пластин (19).

Таким образом, разработанная теория тонких пластин позволяет найти все шесть компонент тензора напряжений.

Пластины с симметричным расположением слоев. В частном случае, когда слои пластины расположены симметрично относительно срединной плоскости $\xi = 0$, часть тензоров (17) являются нулевыми:

$$B_{IJKL} = 0, \quad K_{IJKLM} = 0, \quad (22)$$

и определяющие соотношения (15) принимают вид

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)}, \quad M_{IJ} = D_{IJKL} \eta_{KL} + \bar{K}_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)}. \quad (23)$$

Такие соотношения отличаются от определяющих классической теории пластин Кирхгофа – Лява и Тимошенко наличием слагаемого $\bar{K}_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)}$ в выражении для моментов.

Задача об изгибе симметричной пластины равномерным давлением. Рассмотрим в качестве примера классическую задачу об изгибе многослойной пластины прямоугольной формы под действием

равномерно распределенного давления. Слои пластины расположены симметрично относительно плоскости $\xi = 0$, поэтому имеют место соотношения (22). В этом случае для задачи изгиба пластины

$$u_I^{(0)} = 0, \varepsilon_{KL}^{(0)} = 0, T_{IJ} = 0, \sigma_{IJ}^{(0)} = 0, \sigma_{I3}^{(1)} = 0, \quad (24)$$

и ненулевыми неизвестными функциями являются только $u_3^{(0)}(x)$, $M_{11}(x)$, $Q_1(x)$, где $x = x_1$ – безразмерная продольная координата пластины. Тождественно ненулевые уравнения равновесия (13), определяющие соотношения (15) и кинематические соотношения (17), принимают вид

$$M_{11,11} = \Delta \bar{p}, \quad M_{11} = D_{1111} \eta_{11}, \quad \eta_{11} = -u_{3,11}^{(0)}. \quad (25)$$

Напряжения в 1-го и 2-го приближений согласно формулам (21) в данной задаче имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^{(1)} &= -\xi C_{IJ11}^{(0)} u_{3,11}^{(0)}, \quad \sigma_{I3}^{(1)} = 0, \\ \sigma_{I3}^{(2)} &= -u_{3,111}^{(0)} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \xi C_{I111}^{(0)} \rangle - \xi C_{I111}^{(0)}) d\xi. \end{aligned} \quad (26)$$

Тогда изгибные напряжения, напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения согласно (20) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ} &= -\kappa \xi C_{IJ11}^{(0)} u_{3,11}^{(0)}, \\ \sigma_{I3} &= -\kappa^2 u_{3,111}^{(0)} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \xi C_{I111}^{(0)} \rangle - \xi C_{I111}^{(0)}) d\xi, \\ \sigma_{33} &= -\kappa^3 (p_- + \Delta p(\xi + 0,5) + u_{3,1111}^{(0)} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma^{(2)} \rangle - \sigma^{(2)}) d\xi), \quad (27) \\ \sigma^{(2)} &= \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \xi C_{1111}^{(0)} \rangle - \xi C_{1111}^{(0)}) d\xi. \end{aligned}$$

Из этих выражений следует, что напряжения σ_{IJ} распределены по толщине пластины кусочно-линейным образом. Для однослойной пластины, у которой $C_{ijkl} = \text{const}$, эти напряжения имеют линейное распределение по толщине, как и в классической теории пластин.

Решение уравнений (25) вместе с граничными условиями жесткого защемления $x = 0$ и $x = 1$: $u_3^{(0)} = 0$, $u_{3,1}^{(0)} = 0$ – это классическое решение для прогиба пластины в теории Кирхгофа – Лява [21]:

$$u_3^{(0)} = -\frac{\Delta p}{24D_{11}} x(x^3 - 2x^2 + x), \quad D_{11} = \langle \xi^2 C_{1111}^{(0)} \rangle, \quad (28)$$

а напряжения (27) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ} &= \frac{C_{IJ11}^{(0)} \Delta \tilde{p}}{24\kappa^2 D_{11}} x(x-1), \\ \sigma_{I3} &= \frac{\Delta \tilde{p}}{\kappa D_{11}} (x-1/2) \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \xi C_{I111}^{(0)} \rangle - \xi C_{I111}^{(0)}) d\xi, \\ \sigma_{33} &= -(\tilde{p}_- + \Delta \tilde{p}(\xi + 0,5) - \frac{\Delta \tilde{p}}{D_{11}} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma^{(2)} \rangle - \sigma^{(2)}) d\xi), \end{aligned} \quad (28)$$

с учетом того, что

$$\frac{\Delta \bar{p}}{D_{1111}} = \frac{\Delta p}{D_{11}} = \frac{\Delta \tilde{p}}{\kappa^3 D_{11}}, \quad (29)$$

где $\Delta \tilde{p} = \kappa^3 \Delta p$; $\tilde{p}_- = \kappa^3 p_-$.

Если пластина однослойная, т. е. $C_{ijkl} = \text{const}$, то напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения согласно (28) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{I3} &= -\frac{\kappa^2}{2} C_{I111}^{(0)} u_{3,111}^{(0)} \left(\xi^2 - \frac{1}{4} \right), \\ \sigma_{33} &= -\kappa^3 \left(p_- + \Delta p(\xi + 0,5) + u_{3,1111}^{(0)} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} + \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi}{4} \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (30)$$

С учетом (28) для случая жесткого защемления однослойной пластины получаем явное выражение напряжений сдвига

$$\sigma_{I3} = \frac{6\Delta \tilde{p}}{\kappa} \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(\xi^2 - \frac{1}{4} \right). \quad (31)$$

Отсюда следует, что максимальное значение касательного напряжения: $\max \sigma_{I3} = \frac{3\Delta \tilde{p}}{4\kappa}$, такое же, как и в классической теории Кирхгофа – Лява [21].

фа – Лява. Однако для многослойной пластины формулы для напряжений (30) отличаются от выражений, получаемых из теории Кирхгофа – Лява с единой деформируемой нормалью, а также от выражений, получаемых с помощью модели Григолюка – Куликова с ломаной линией.

Результаты численных расчетов и сравнение с трехмерной теорией. Для анализа точности разработанной теории многослойных пластин было проведено сравнение результатов расчетов напряжений по формуле (28) с результатами расчетов по точной трехмерной теории упругости. Для нахождения численного решения по трехмерной теории использовался программный конечно-элементный пакет ANSYS с тетраэдральным 10-узловым конечным элементом SOLID187. Пластина в этом случае рассматривалась как трехмерное тело (параллелепипед), торцы которого $x = 0$ и $x = 1$ были жестко защемлены, на одной внешней поверхности $\xi = 0,5$ было задано равномерное давление $\tilde{p}_- = \kappa^3 p_-$, вторая поверхность $\xi = -0,5$ полагалась свободной, а боковые грани $x_2 = \pm b / (2L)$ (b – ширина пластины) были защемлены со свободным скольжением: $u_2 = 0$, $\sigma_{12} = 0$, $\sigma_{13} = 0$. Пластина состояла из трех слоев симметрично расположенных относительно срединной плоскости (см. рис. 1). Толщина средней пластины была выбрана в 2 раза большей, чем толщина внешних слоев, числа $\kappa = h / L$ и $b / L - \kappa = b / L = 0,04$, что обеспечило условие «тонкости» пластины. Материалы слоев были выбраны ортотропными, с главными осями ортотропии совпадающими с осями симметрии пластины, значения упругих характеристик слоев соответствовали двум типам стеклопластика и приведены в табл. 1.

Таблица 1

Упругие характеристики материалов слоев

№	E_1 , ГПа	E_2 , ГПа	E_3 , ГПа	G_{12} , ГПа	G_{13} , ГПа	G_{23} , ГПа	ν_{12}	ν_{31}	ν_{23}
1	14	14	5,3	1,8	0,75	0,75	0,08	0,14	0,15
2	21	21	7,95	2,7	1,25	1,25	0,12	0,21	0,225

В процессе проведения трехмерных конечно-элементных расчетов с помощью ANSYS была установлена существенная зависимость решения от использованной при расчетах конечно-элементной (КЭ) сетки. В начале расчеты проводились с равномерной КЭ-сеткой с числом элементов по толщине пластины равным $N = 12$ (что соответствует минимум трем КЭ по толщине на каждый из четырех слоев пластины). Общее число КЭ для всей пластины в та-

кой сетке составило 492 544 (693 634 узла). Однако точность решения, получаемого на такой сетке, оцениваемая по отклонению от решения (28), полученного с помощью асимптотической теории (далее АТ-решение), оказалась крайне неудовлетворительной. Для повышения точности КЭ-решения необходимо было существенно измельчить сетку до $N = 80$ КЭ по толщине пластины. Однако при этом резко возрос общий размер КЭ – примерно до 50 млн, что сделало затруднительным не только решение задачи на персональном компьютере, но и само хранение КЭ-сетки в оперативной памяти компьютера. Для того чтобы избежать необходимость применения параллельных вычислений, было предложено создать специальную неравномерную КЭ-сетку, для которой сгущение реализуется только вблизи девяти нормальных сечений пластины (см. рис. 1), названных опорными, для остальных частей пластины использовалась существенно более крупная сетка. Так, для $N = 12$ число КЭ по толщине и ширине пластины вне областей опорных сечений составляло четыре (девять узлов, см. рис. 1).

Число КЭ в опорном сечении выбиралось исходя из условия близости скачка напряжения σ_{22} на поверхности раздела слоев, рассчитанного по АТ-решению (28) и с помощью комплекса ANSYS:

$$\Delta[\sigma_{22}] = \frac{|[\sigma_{22}]_{\text{ANSYS}} - [\sigma_{22}]_{\text{АТ}}|}{[\sigma_{22}]_{\text{АТ}}} \cdot 100 \% < 20 \% . \quad (32)$$

В табл. 2 приведено сравнение невязки $\Delta[\sigma_{22}]$ вычисления скачка поперечного нормального напряжения $[\sigma_{22}]$ в зависимости от числа КЭ в опорных сечениях. Для относительно крупных сеток с $N = 12$ и 20 значение невязки $\Delta[\sigma_{22}]$ является достаточно большим и не удовлетворяет условию (32). Выполнение этого условия обеспечивает только достаточно мелкая сетка с $N = 80$.

Таблица 2

Зависимость невязки $\Delta[\sigma_{22}]$ вычисления скачка напряжения $[\sigma_{22}]$ от измельчения КЭ-сетки

Число КЭ (узлов) по толщине пластины в опорных сечениях	Невязка $\Delta[\sigma_{22}]$ вычисления скачка напряжения $[\sigma_{22}]$ в сечении $x_1 = 0,25 \%$
12 (25)	73,7
20 (41)	55,3
80 (161)	18,5

Исходя из полученных результатов число КЭ по толщине и ширине пластины в опорных сечениях было выбрано равным $N = 80$ (по 20 элементов на слой). Общее число КЭ в такой неравномерной сетке оставалось относительно небольшим – 224 733 (319 869 узлов), что позволяло относительно быстро проводить расчеты на этой сетке.

Сравнение распределений напряжений, рассчитанных по АТ-решению с ANSYS-решением, приведено на рис. 2–5 для четырех различных сечений $x = x_1 = [0,125; 0,25; 0,375; 0,5]$, ($y = x_2, z = x_3$).

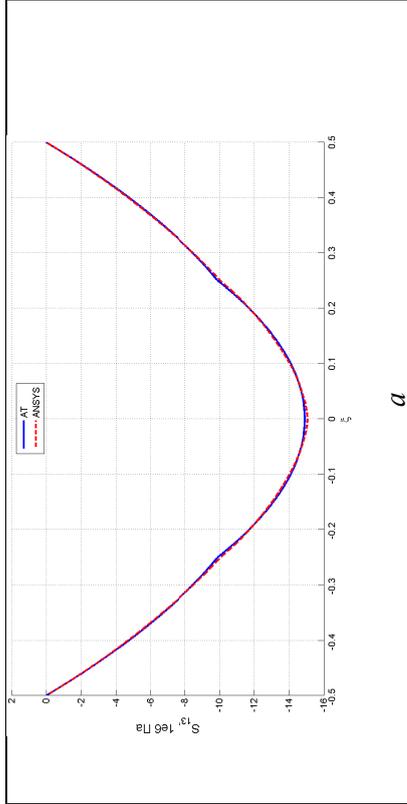
На этих рисунках, как и ранее, поперечная безразмерная координата ξ изменяется в пределах $[-0,5; 0,5]$: значение $\xi = 0,5$ соответствует верхней плоскости, на которой задано равномерно распределенное давление: $k^3 p_+ = 10^6$ Па; а значения $\xi = \pm 0,25$ – соответствуют плоскостям стыка слоев. Так как материалы слоев выбраны ортотропными, то два касательных напряжения отсутствуют во всех слоях: $\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$.

Распределения остальных четырех напряжений – $\sigma_{13}, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$, – рассчитанные с помощью разработанной асимптотической теории (АТ) по формулам (28) и с помощью пакета ANSYS для сетки с $N = 80$, достаточно хорошо совпадают (см. рис. 2–5). В качестве количественной характеристики близости решений, кроме невязки (32), рассматривалась также среднеинтегральная по толщине невязки численного решения для напряжений в различных сечениях x_1 (по поперечной координате x_2 в данной задаче напряжения не изменяются):

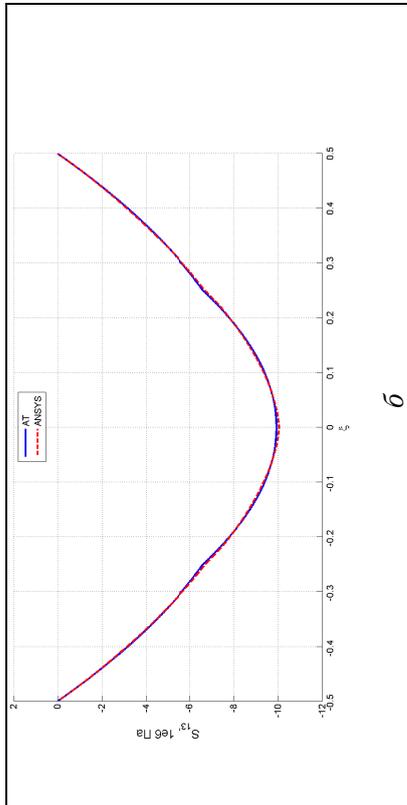
$$\delta(\sigma_{\alpha\alpha}) = \frac{\int_{-0,5}^{0,5} ((\sigma_{\alpha\alpha})_{\text{ANSYS}} - (\sigma_{\alpha\alpha})_{\text{АТ}})^2 d\xi}{\int_{-0,5}^{0,5} ((\sigma_{\alpha\alpha})_{\text{АТ}})^2 d\xi} \cdot 100\% . \quad (33)$$

Для $N = 80$ значение среднеинтегральной невязки $\delta(\sigma_{\alpha\alpha})$ составило: для $\delta(\sigma_{22}) = 8,8\%$, $\delta(\sigma_{11}) = 3,5\%$, $\delta(\sigma_{33}) = 0,6\%$, $\delta(\sigma_{13}) = 0,7\%$ в сечении $x_1 = 0,25$.

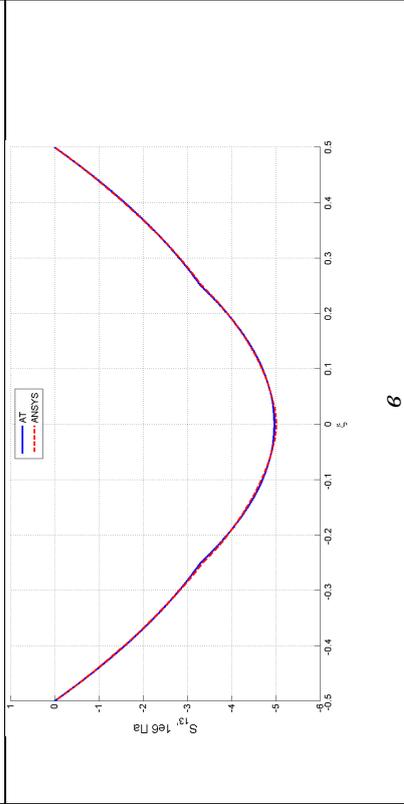
Решение, показанное на рис. 2, *з*, отражает тот факт, что теоретически нулевое распределение касательного напряжения $\delta(\sigma_{13})$ в центральном сечении $x_1 = 0,5$ при численной КЭ-реализации близко к машинному нулю, максимальное значение отклонений от нуля есть величина примерно на три порядка меньшая, чем максимальное значение касательных напряжений в сечении $x_1 = 0,375$ (рис. 2, *в*).



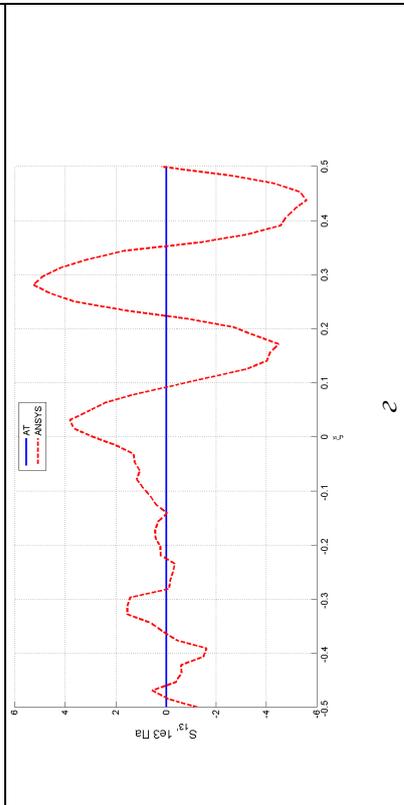
a



b



в



г

Рис. 2. Распределение напряжения σ_{13} по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью разрабатываемой теории (AT) и пакета ANSYS:

$a - x_1 = 0,125$; $b - x_1 = 0,25$; $c - x_1 = 0,375$; $d - x_1 = 0,5$

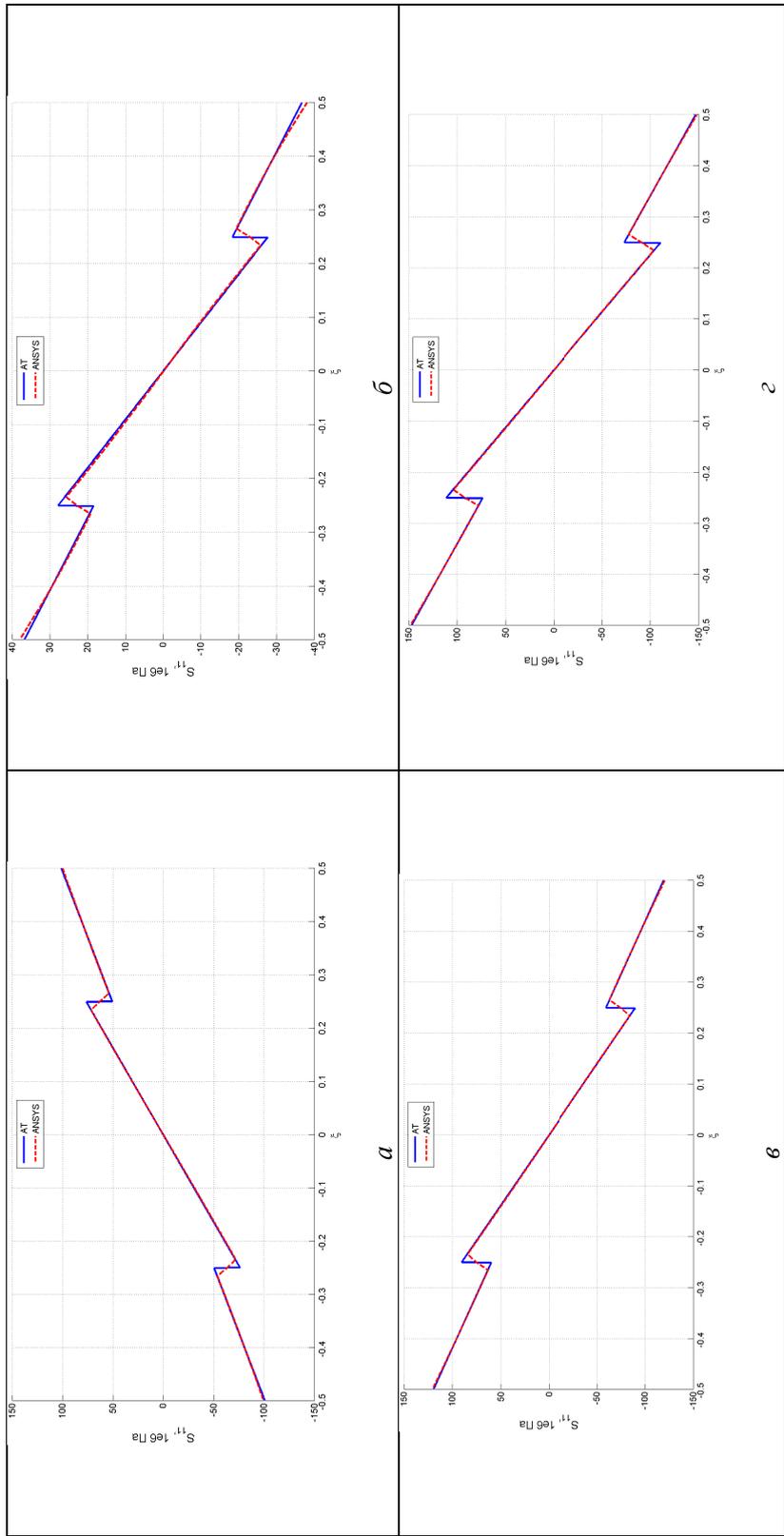


Рис. 3. Распределение изгибного напряжения σ_{11} по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью разработанной теории (АТ) и пакета ANSYS:

$$a - x_1 = 0,125; \delta - x_1 = 0,25; \theta - x_1 = 0,375; z - x_1 = 0,5$$

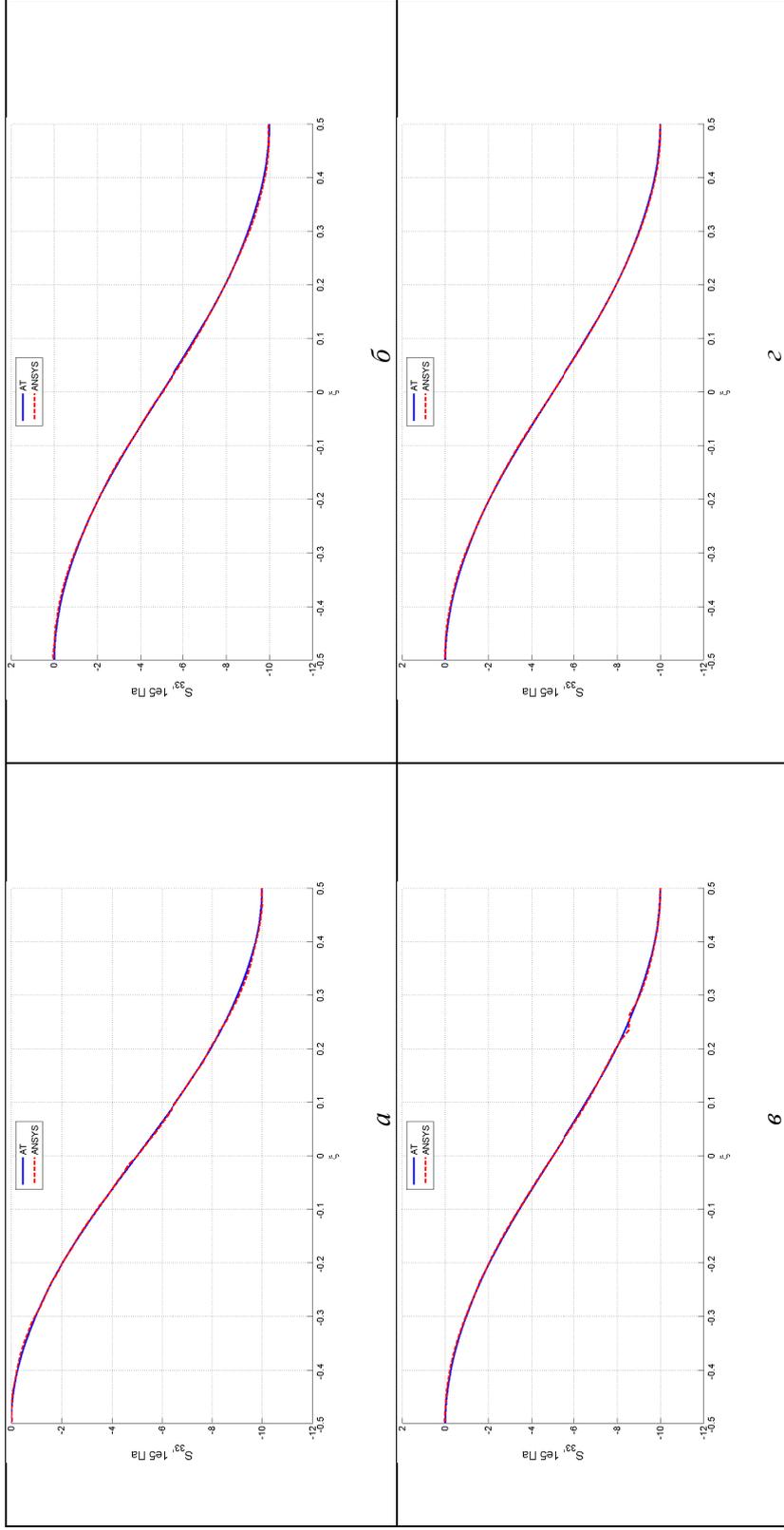


Рис. 4. Распределение поперечного напряжения σ_{33} по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью разработанной теории (АТ) и пакета ANSYS:

$$a - x_1 = 0,125; \sigma - x_1 = 0,25; \nu - x_1 = 0,375; z - x_1 = 0,5$$

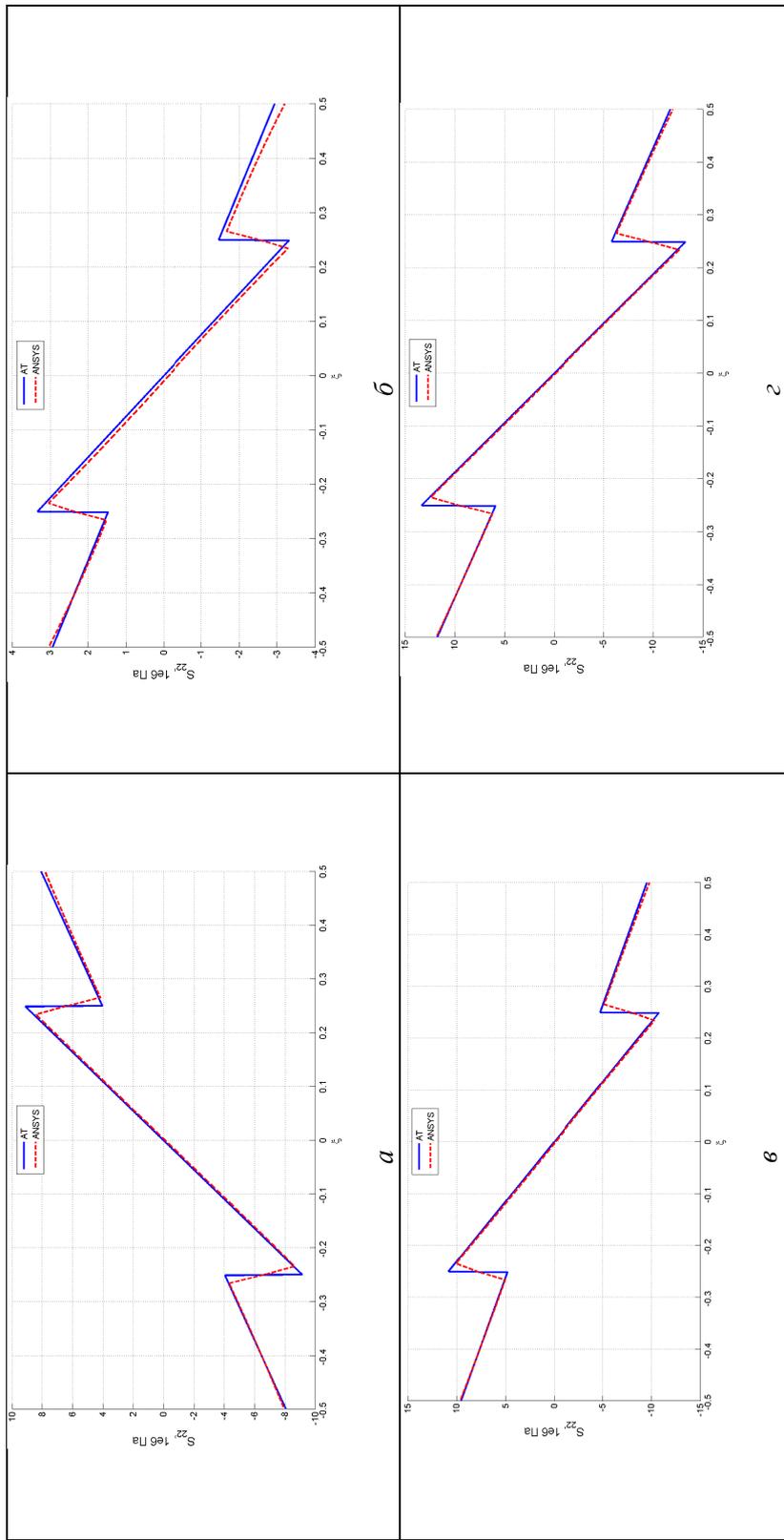


Рис. 5. Распределение поперечного напряжения σ_{22} по толщине трехслойной пластины, полученное с помощью разработанной теории (АТ) и пакета ANSYS:

$$a - x_1 = 0,125; \delta - x_1 = 0,25; \theta - x_1 = 0,375; z - x_1 = 0,5$$

Выводы. Представлены основные соотношения новой теории тонких многослойных анизотропных пластин.

Предложенная в работе теория позволяет вычислить шесть компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига.

На основе программного комплекса ANSYS проведен сравнительный анализ решений, получаемых с помощью теории тонких пластин и конечно-элементного решения трехмерной задачи теории упругости и термоупругости. Предложенный метод позволяет вычислять все шесть напряжений в пластине с очень высокой точностью, приблизиться к которой с помощью конечно-элементного трехмерного решения удастся только при использовании очень мелких сеток с большим числом КЭ по толщине пластины, что является серьезным ограничением при проведении расчетов тонкостенных пластин и оболочек.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (номер НИР 1.5433.2011) и РФФИ (грант № 12-08-00998-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов. *Механика композитных материалов*, 1988, № 4, с. 698–704.
- [2] Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2006, № 6, с. 71–79.
- [3] Шешенин С.В., Ходос О.А. Эффективные жесткости гофрированной пластины. *Вычислительная механика сплошной среды*, 2011, т. 4, № 2, с. 128–139.
- [4] Зверьяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко. *Прикладная математика и механика*, 2008, т. 72, вып. 2, с. 308–321.
- [5] Зверьяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит. *Прикладная математика и механика*, 2003, т. 67, вып. 3, с. 472–483.
- [6] Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids and Struct.*, 1984, vol. 20 (4), pp. 333–350.
- [7] Панасенко Г.П., Резцов М.В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине. *Докл. АН СССР*, 1987, т. 294, № 5, с. 1061–1065.
- [8] Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. Singapore; London, World Sci. Publ., 2000, 739 p.
- [9] Kolpakov A.G. *Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses*. Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2004, 228 p.
- [10] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984, 336 с.
- [11] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. Москва, Наука, 1984.

- [12] Санчес-Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Москва, Мир, 1984.
- [13] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, № 2.
- [14] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с. 102–116.
- [15] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Разработка автоматизированной технологии вычисления эффективных упругих характеристик композитов методом асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2008, № 2, с. 57–67.
- [16] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Автоматизация прогнозирования свойств композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения. *Информационные технологии*. 2008. № 8, с. 31–38.
- [17] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Современный численный анализ механических свойств композиционных материалов. *Известия РАН. Физическая серия*, т. 75, № 11, 2011, с. 1551–1556.
- [18] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов. *Математическое моделирование*, 2012, т. 24, № 5, с. 3–20.
- [19] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of Composites under High Temperatures*. Dordrecht; Boston; London, Kluwer Academic Publishers, 1999, 347 p.
- [20] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–100.
- [21] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4: Основы механики твердого тела*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 580 с.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html>

Димитриенко Юрий Иванович родился в 1962 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана (НОЦ «СИМПЛЕКС»), действительный член академии инженерных наук. Автор более 250 научных работ в области вычислительной механики, газодинамики, термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Яковлев Дмитрий Олегович родился в 1990 г., окончил в 2012 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Ведущий инженер ОАО «ВПК «НПО машиностроения», аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор нескольких работ в области вычислительной механики и теории оптимизации.