

**Математическое моделирование температурного состояния пространственных стержневых конструкций.
Нестационарные и нелинейные задачи**

© И.В. Станкевич

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены особенности построения основных матричных соотношений в рамках конечно-элементной технологии решения нестационарных и нелинейных температурных задач применительно к стержневым конструкциям, имеющим сложное пространственное оформление. На основе данной технологии разработан комплекс прикладных программ, который позволяет решать широкий класс задач научного и прикладного характера; исследовать особенности влияния различных конструктивных, технологических и эксплуатационных факторов на температурное состояние стержневых конструкций. В качестве примера применения конечно-элементной технологии и возможностей созданного комплекса прикладных программ представлено решение нестационарной температурной задачи для стержневой конструкции.

Ключевые слова: *стержневая конструкция, нестационарная температурная задача, нелинейная температурная задача, конечно-элементная технология, комплекс прикладных программ.*

Введение. Сложные пространственные стержневые конструкции могут находиться под воздействием изменяющихся во времени тепловых потоков. В этой ситуации для определения температурного поля рассматриваемой стержневой конструкции необходимо решать нестационарную температурную задачу. Кроме того, параметры, характеризующие теплофизические свойства материалов элементов стержневой конструкции и граничные условия теплообмена, могут зависеть от температуры, что делает температурную задачу нелинейной. Для решения нелинейных нестационарных задач теплопроводности, описывающих распределение температуры в пространственных стержневых конструкциях, так же как и при решении линейных стационарных задач теплопроводности, перспективным является применение конечно-элементной технологии [1, 2]. В рамках данной работы рассмотрены особенности построения конечно-элементной технологии для определения нестационарного температурного состояния стержневых конструкций со сложным пространственным оформлением с учетом зависимости теплофизических свойств и параметров граничных условий от температуры.

Постановка нестационарной задачи теплопроводности. Рассмотрим простейшую стержневую конструкцию, представляющую собой однородный изотропный криволинейный стержень ([1], рис. 1). Введем одномерную пространственную криволинейную систему координат $O'\eta$, у которой координата η отсчитывается вдоль оси стержня. Запишем вариант начально-краевой задачи теплопроводности, но с учетом предположения о том, что в поперечных сечениях стержня отсутствуют градиенты температуры. Имеем

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau}(\eta, \tau) = \lambda (T(\eta, \tau))_{,\eta} + q_V(\eta), \quad (\eta, \tau) \in (\eta_1, \eta_2) \times (0, t]; \quad (1)$$

$$T(\eta, 0) = T_0(\eta), \quad \eta \in [\eta_1, \eta_2]; \quad (2)$$

$$\lambda T(\eta, \tau)_{,\eta}|_{\eta=\eta_1} = q_W, \quad \tau \geq 0; \quad (3)$$

$$\lambda T(\eta, \tau)_{,\eta}|_{\eta=\eta_2} = \alpha_W (T_f - T(\eta, \tau))|_{\eta=\eta_2}, \quad \tau \geq 0, \quad (4)$$

где c, ρ, λ — удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности материала стержня соответственно; τ — время; $T(\eta, \tau)$ — температура стержня; $q_V(\eta)$ — мощность внутренних источников (стоков) теплоты; $T_0(\eta)$ — начальная температура стержня (предполагается, что начальное и граничные условия согласованы); q_W — численное значение плотности теплового потока на поверхности S_2 , в данном случае принято, что $q_W > 0$, если теплота отводится от поверхности S_2 стержня ($T(\eta, \tau)_{,\eta}|_{\eta=\eta_1} > 0 \forall \tau \geq 0$); η_1, η_2 — координаты торцевых поверхностей S_2 и S_3 стержня соответственно ($\eta_1 < \eta_2$); α_W и T_f — коэффициент теплоотдачи и температура внешней среды вблизи поверхности S_3 соответственно.

Матричные соотношения МКЭ. При решении нестационарных задач теплопроводности конечно-элементную дискретизацию по пространству целесообразно выполнять на основе метода взвешенных невязок в форме Галёркина [2]. Каждому узлу p (в глобальной нумерации [1, 2]) поставим в соответствие финитную функцию N_p ($p = \overline{1, k_U}$, k_U — глобальное число узлов сетки конечно-элементной модели). Носителями функций N_p являются объединения областей $\bar{V}^{(e)}$ тех конечных элементов (e), которые содержат данный узел p . Кроме того, предположим что функции N_p линейно независимы. Тогда температуру и ее производные по координате η и времени τ на компакте \bar{G}_h можно интерполировать с помощью следующих соотношений

$$\tilde{T} = [N] \{T\}; \quad (5)$$

$$\tilde{T}_{,\eta} = [N_{,\eta}] \{T\}; \quad (6)$$

$$\dot{\tilde{T}} = [N] \{\dot{T}\}. \quad (7)$$

Здесь \tilde{T} , $\tilde{T}_{,\eta}$, $\dot{\tilde{T}}$ — интерполированные значения температуры, ее производных по криволинейной координате η и времени τ соответственно; $[N]$ — матрица-строка, составленная из финитных функций $N_p(\eta)$ ($p = \overline{1, k_U}$); $\{T\}$ — вектор-столбец, составленный из узловых значений температуры T_p ($p = \overline{1, k_U}$); $\{\dot{T}\}$ — вектор-столбец, составленный из узловых значений производных температуры по времени \dot{T}_p ($p = \overline{1, k_U}$).

Перенесем все члены уравнения (1) в правую часть, подставим в нее интерполированные значения температуры, ее производных и рассмотрим невязку

$$R = \lambda \left(\tilde{T}_{,\eta} \right)_{,\eta} + q_V - c\rho \dot{\tilde{T}}.$$

Теперь в соответствии с методом Галёркина умножим невязку R последовательно на функции N_p ($p = \overline{1, k_U}$), проинтегрируем по области G_h и результат приравняем нулю, получим

$$\int_{G_h} R N_p dv = \int_{G_h} \left[\lambda \left(\tilde{T}_{,\eta} \right)_{,\eta} + q_V - c\rho \dot{\tilde{T}} \right] N_p(\eta) dv = 0, \quad p = \overline{1, k_U}. \quad (8)$$

С учетом соотношений (5)–(7) выражение (8) представляет собой систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно узловых значений температуры (как функций времени). Для ее решения необходимо добавить начальное условие (2), записанное в соответствующем виде.

Перепишем выражение (8) в виде

$$\int_{G_h} \left[\lambda \left(\tilde{T}_{,\eta} \right)_{,\eta} + q_V \right] N_p dv - \int_{G_h} c\rho \dot{\tilde{T}} N_p dv = 0, \quad p = \overline{1, k_U}. \quad (9)$$

С учетом выражения (7) второй интеграл в формуле (9) представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{G_h} c\rho \dot{\tilde{T}} N_p dv &= \int_{G_h} c\rho [N] N_p dv \{ \dot{T} \} = \\ &= \int_{G_h} c\rho [N_1 N_p \ N_2 N_p \ \dots \ N_{k_U} N_p] dv \{ \dot{T} \}, \quad p = \overline{1, k_U}. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим глобальную матрицу теплоемкости $[C]$, которую на основании выражения (10) можно записать в виде

$$[C] = \int_{G_h} c\rho [N]^T [N] dv. \quad (11)$$

Выражение (11) для вычислений и формирования системы линейных алгебраических уравнений является крайне неудобным. Интегрирование следует проводить по объемам конечных элементов, используя

нормированную локальную систему координат $O''\xi$, а результат суммировать. Для этого вместо глобальной матрицы-строки $[N]$ используем локальные матрицы-строки $[N_V^{(e)}]$, что позволит формирование глобальной матрицы теплоемкости выполнить по формуле

$$[C] = \sum_{e=1}^{k_V} [a_V^{(e)}]^T \left(\int_{V^{(e)}} c^{(e)} \rho^{(e)} [N_V^{(e)}]^T [N_V^{(e)}] dv \right) [a_V^{(e)}]. \quad (12)$$

Здесь $[a_V^{(e)}]$ — матрица геометрических связей объемного конечного элемента с идентификационной меткой (e) [1, 2].

Обозначим интегралы, входящие в выражения (12), следующим образом:

$$[I_{\text{cp}}^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} c^{(e)} \rho^{(e)} [N_V^{(e)}]^T [N_V^{(e)}] dv, \quad (13)$$

где элемент объема

$$dv = A^{(e)}(\xi) d\eta = A^{(e)}(\xi) \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_{i,\xi})^2} d\xi.$$

Здесь $A^{(e)}(\xi)$ — площадь поперечного сечения конечного элемента (e) , а производные $x_{i,\xi}$, $i = \overline{1, 3}$, определяются формулами (19), которые приведены в работе [1].

Площадь поперечного сечения $A^{(e)}(\xi)$ можно аппроксимировать с помощью функций формы:

$$A^{(e)}(\xi) = [N_V^{(e)}] \{A^{(e)}\}, \quad (14)$$

где $\{A^{(e)}\}$ — вектор, составленный из площадей поперечных сечений $A_k^{(e)}$ ($k = \overline{1, p^{(e)}}$, отнесенных к узлам элемента (e) ; $p^{(e)}$ — число узлов конечного элемента).

Если материал стержня неоднородный, аналогично можно представить удельную теплоемкость $c^{(e)}(\xi)$ и плотность $\rho^{(e)}(\xi)$ материала стержня в пределах конечного элемента (e) :

$$c^{(e)}(\xi) = [N_V^{(e)}] \{c^{(e)}\}; \quad (15)$$

$$\rho^{(e)}(\xi) = [N_V^{(e)}] \{\rho^{(e)}\}. \quad (16)$$

Здесь $\{c^{(e)}\}$ и $\{\rho^{(e)}\}$ — векторы, составленные из значений удельной теплоемкости $c_k^{(e)}$ и плотности $\rho_k^{(e)}$, $k = \overline{1, p^{(e)}}$, соответственно, отнесенные к узлам $k = \overline{1, p^{(e)}}$ элемента (e) ($p^{(e)}$ — число узлов конечного элемента).

Квадратурная формула для вычисления интегралов (13) по объему конечного элемента (e) с учетом соотношений (14)–(16) принимает вид

$$[I_{cp}^{(e)}] = \sum_{l=1}^n c^{(e)}(\xi) \rho^{(e)}(\xi) A^{(e)}(\xi) [N_V^{(e)}]^T [N_V^{(e)}] \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_{i,\xi})^2} \Big|_{\xi=\xi_l} H_l,$$

где n — число гауссовых точек; l — номер гауссовой точки; ξ_l — локальная координата гауссовой точки; H_l — весовой коэффициент квадратурной формулы.

Аналогично можно определить первый интеграл в формуле (9), при преобразовании дивергентной части используют вторую формулу Грина. В результате получены соотношения, полностью совпадающие с формулами (14) и (15), приведенными в работе [1]. Это подтверждает известное утверждение о том, что процедуры метода Рунге и метода Галёркина при решении задач с самосопряженными и положительно определенными операторами приводят к одинаковым по конструкции системам алгебраических уравнений [3].

Таким образом, нестационарная задача (1)–(5) после дискретизации по пространству сводится к решению задачи Коши для линейного матричного дифференциального уравнения первого порядка

$$[C] \{\dot{T}\} + [K] \{T\} = \{R\} \quad (17)$$

с начальным условием

$$\{T\}|_{\tau=0} = \{T_0\}, \quad (18)$$

где $\{T_0\}$ — проекция функции $T_0(\eta)$ на узлы сетки конечно-элементной модели.

Для ее решения существуют различные подходы [2–4], однако наибольшее распространение получили два. Первый состоит в том, что производную по времени в уравнении (17) заменяют каким-либо конечно-разностным аналогом, а второй заключается в использовании конечных элементов во временной области (метод Галёркина).

Разностный аналог задачи Коши. Рассмотрим основные этапы построения разностного аналога задачи Коши (17), (18) в виде семейства двухслойных разностных схем. В пределах временного шага $h_\tau = \tau_n - \tau_{n-1}$ векторы узловых температур $\{T\}$ и правой части $\{R\}$ представим в виде следующих линейных комбинаций:

$$\{T(\tau)\} = (1 - \omega) \{T\}_{n-1} + \omega \{T\}_n; \quad (19)$$

$$\{R(\tau)\} = (1 - \omega) \{R\}_{n-1} + \omega \{R\}_n, \quad (20)$$

где $\tau \in [\tau_{n-1}, \tau_n] \subset [0, t]$; ω — весовой множитель, $\omega \in [0, 1]$. Здесь и далее векторы $\{T\}_{n-1}$, $\{R\}_{n-1}$ и $\{T\}_n$, $\{R\}_n$ отнесены к моментам времени $\tau = \tau_{n-1}$ и $\tau = \tau_n$ соответственно.

Разностную аппроксимацию производной по времени можно представить следующим образом:

$$\{\dot{T}\} = \frac{\partial \{T\}}{\partial \tau} \approx \frac{\{T\}_n - \{T\}_{n-1}}{h_\tau}. \quad (21)$$

Полагая, что коэффициенты в уравнении (17) постоянны на отрезке $[\tau_{n-1}, \tau_n]$, и подставляя выражения (19), (20) и (21) в формулу (17), после очевидных преобразований получаем общее выражение для двухслойной схемы с весами:

$$\begin{aligned} & ([C] + h_\tau \omega [K]) \{T\}_n = \\ & = ([C] + h_\tau (\omega - 1) [K]) \{T\}_{n-1} + h_\tau ((1 - \omega) \{R\}_{n-1} + \omega \{R\}_n). \end{aligned}$$

Как известно, фиксированное численное значение параметра ω определяет тип конкретной разностной схемы [4], например: $\omega = 0$ — схема с разностью вперед; $\omega = 1/2$ — схема Кранка — Николсона; $\omega = 2/3$ — схема Галёркина; $\omega = 1$ — схема с разностью назад. Вообще говоря, параметр ω может принимать любые численные значения из отрезка $[0, 1]$. Схема Кранка — Николсона имеет определенные преимущества перед остальными схемами, поскольку аппроксимирует уравнение (17) по переменной τ с порядком $O(h_\tau^2)$, а остальные указанные схемы имеют более низкий порядок аппроксимации — $O(h_\tau)$. Кроме двухслойных схем существуют и используются трехслойные схемы, построение которых можно найти в работах [2, 4].

Решение нелинейных задач теплопроводности. Нелинейность в задачах теплопроводности возникает, когда коэффициенты в уравнении (1) и граничных условиях (3) и (4) зависят от искомой температуры, например $\lambda(T)$, $c(T)$, $\rho(T)$, $q_V(\eta, T)$, $q_W(T)$ и $\alpha_W(T)$. Предположим, что все эти функции являются измеримыми и ограниченными и, кроме того, имеют ограниченные производные по температуре T . Тогда, если не применяются линеаризующие процедуры, на каждом шаге по времени необходимо решать систему нелинейных алгебраических уравнений с помощью итерационных методов [4, 5]. Во избежание этого применяют схемы типа предиктор — корректор [6], для которых на каждом временном шаге требуется решать две системы линейных алгебраических уравнений. Существенными недостатками использования схем предиктор — корректор являются: общее усложнение алгоритма решения и дополнительные затраты оперативной памяти. Эти трудности можно исключить, если начально-краевую задачу в каждый момент времени решать методом простых итераций с явным заданием скорректированных значений коэффициентов уравнения теплопроводности и граничных условий, применяя метод Галёркина для построения матричных соотношений МКЭ. Таким образом, в каждой точке временного отрезка решение нелинейной начально-краевой задачи

заменяют последовательностью решений подобных линейных краевых задач, различающихся численными значениями коэффициентов уравнения теплопроводности и граничных условий. При этом перед проведением очередной итерации численные значения коэффициентов определяют в явном виде по полученному на предыдущей итерации решению.

Применение итераций при решении нелинейных уравнений эллиптического и параболического типов является известным и достаточно широко используемым методом [6–12]. Наиболее полные результаты получены для эллиптических уравнений. Особую проблему при использовании итерационного решения составляет сходимость. При анализе сходимости, как правило, рассматривают обобщенное решение в подходящем функциональном классе, а в отдельных случаях анализ проводят на конечномерных подпространствах. Для параболических уравнений характерно рассмотрение сходимости итераций на конечномерных подпространствах, построенных либо с помощью метода Галёркина, либо некоторым разностным методом. Одним из подходов к анализу сходимости последовательных приближений (итераций) является следующий: пусть исходный нелинейный дифференциальный оператор удовлетворяет двум неравенствам, одно из которых является некоторым вариантом условия монотонности, а второе — ограниченной нелинейности в некоторой области; тогда дискретный аналог с помощью процедур какого-либо разностного метода строят так, чтобы сохранились эти два свойства. После этого теоретические исследования сходимости итераций в рамках дискретного аналога проводят в соответствии с некоторыми основными положениями теории монотонных операторов [11–14]. Кроме того, при анализе сходимости итераций как на дифференциальном уровне, так и на конечномерных подпространствах, если это возможно, используют дифференциальные свойства нелинейных операторов — дифференцируемость по Фреше или, в крайнем случае, по Гато.

Итерационное решение нелинейных задач теплопроводности можно применять в том случае, когда коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (3) и (4) имеют более сложный функциональный вид, например зависят от криволинейной координаты η и времени τ : $\lambda(\eta, T)$, $c(\eta, T)$, $\rho(\eta, T)$, $q_V(\eta, \tau, T)$, $q_W(\eta, \tau, T)$ и $\alpha_W(\eta, \tau, T)$.

Температурное состояние многокомпонентных стержневых конструкций. Конечно-элементная технология решения температурных задач позволяет рассматривать сложные многокомпонентные стержневые конструкции, у которых стержни конструктивно представляют собой многослойные криволинейные брусья (рис. 1). Предполагается, что в поперечных сечениях стержней отсутствуют градиенты температуры.

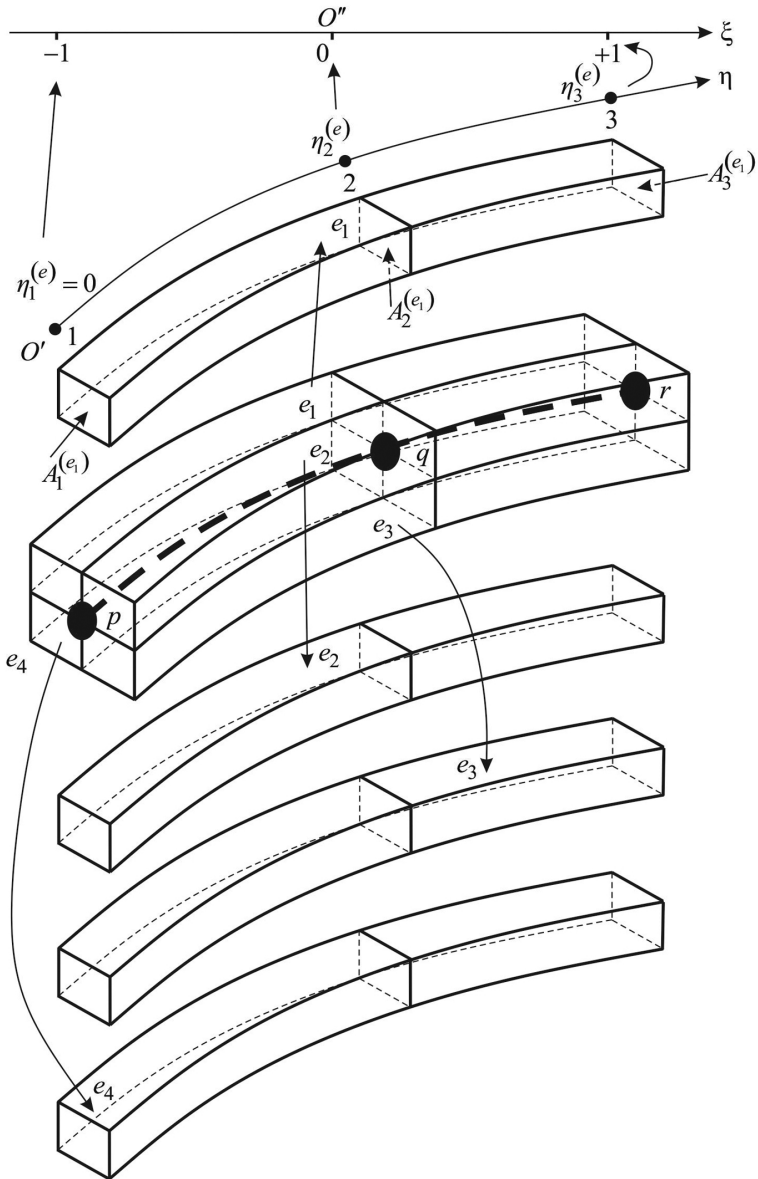


Рис. 1. К расчету температурного состояния многослойных стержневых конструкций

В этом случае каждый слой стержня описывается своей совокупностью конечных элементов, имеющих общую глобальную нумерацию. На рис. 1 в качестве примера показана часть стержня, состоящего из четырех слоев. Каждый слой аппроксимируем квадратичным конечным элементом с глобальными номерами узлов p , q и r , которые имеют свои индивидуальные значения площадей поперечных сечений и теплофизических характеристик, присущих рассматриваемому слою. Такой подход позволяет учесть теплофизические и геометрические особенности каждого слоя стержня.

Примеры расчета температурного состояния стержневых конструкций. Изложенная выше методика математического моделирования нестационарного температурного состояния стержневых конструкций реализована в виде комплекса прикладных программ, который применялся для исследования ряда конструкций. При этом была учтена возможность зависимости теплофизических свойств и параметров, характеризующих граничные условия второго и третьего рода, от температуры.

На рис. 2 показана исследуемая стержневая конструкция. В качестве конечных элементов выбраны квадратичные трехузловые элементы. Кроме того, на рис. 2 приведена глобальная нумерация узлов соответствующей конечно-элементной модели. Конвективный теплообмен осуществлялся на боковых поверхностях двух конечных элементов e_1 и e_2 : e_1 — узлы 24, 25, 26; e_2 — узлы 11, 12, 13. В зоне e_1 $T_f = 900$ К и $\alpha_W = 135$ Вт/(м² · К), а в зоне e_2 $T_f = 500$ К и $\alpha_W = 60$ Вт/(м² · К). Начальная температура принята равной 300 К. Результаты расчетов представлены на рис. 3–5. Как следует из рисунков, стержневая конструкция имеет неравномерное распределение температуры. Заметно интенсивнее нагрев осуществляется в зоне узла 25, менее нагретыми являются удаленные участки (зоны узлов 3, 9). Кроме того, усиливается влияние зоны наиболее интенсивного нагрева на зону менее интенсивного нагрева. На рис. 5 представлены температурные поля в фиксированные моменты времени, показывающие кинетику роста общего температурного состояния стержневой системы.

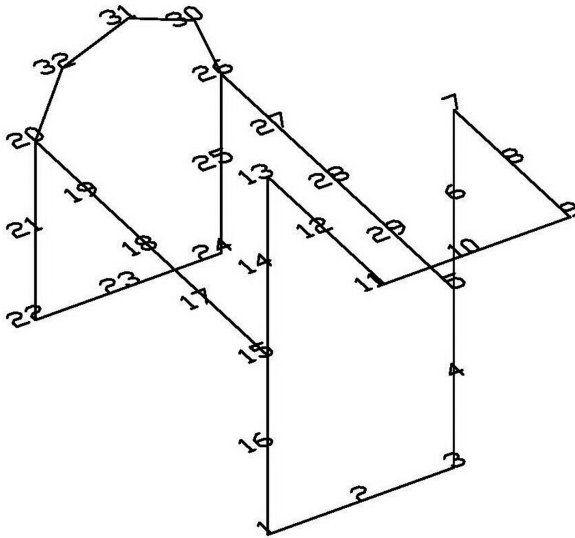


Рис. 2. Глобальная нумерация узлов конечно-элементной модели стержневой конструкции

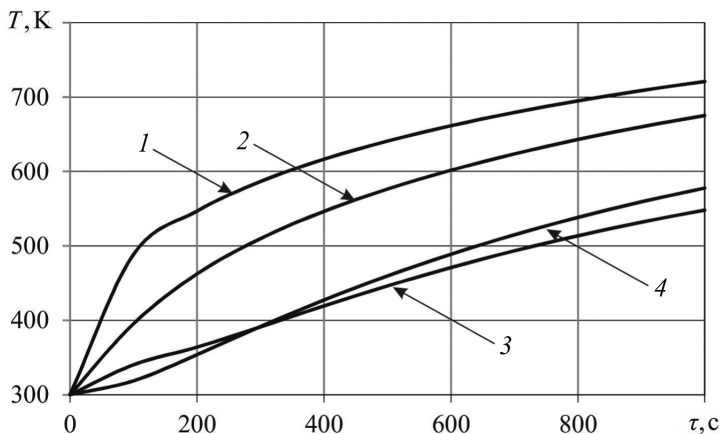


Рис. 3. Изменение температуры узлов конечно-элементной модели: 25 (1), 31 (2), 12 (3), 15 (4)

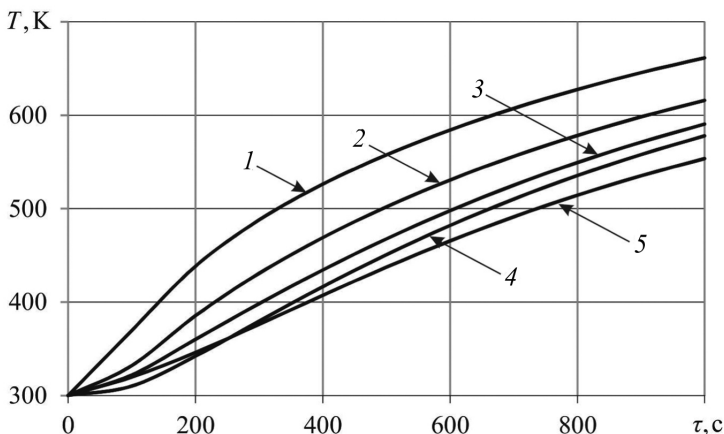
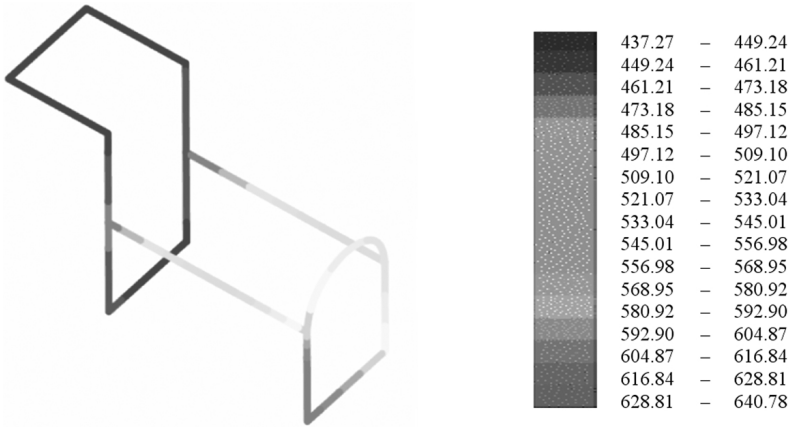


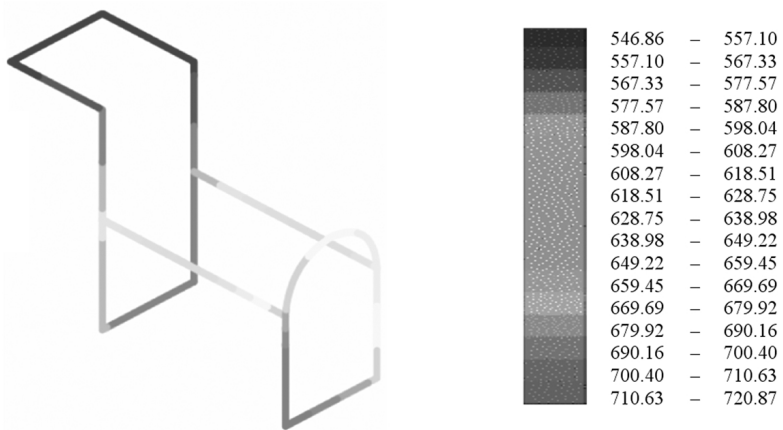
Рис. 4. Изменение температуры узлов конечно-элементной модели: 20 (1), 18 (2), 5 (3), 3 (4), 9 (5)

Выводы. Рассмотрены особенности построения конечно-элементной технологии решения нестационарных и нелинейных температурных задач применительно к пространственным стержневым конструкциям, имеющим сложное геометрическое оформление. На основе данной технологии разработан комплекс прикладных программ, который позволяет решать широкий класс задач научного и прикладного характера, исследовать особенности влияния различных конструктивных, технологических и эксплуатационных факторов на температурное состояние стержневых конструкций.

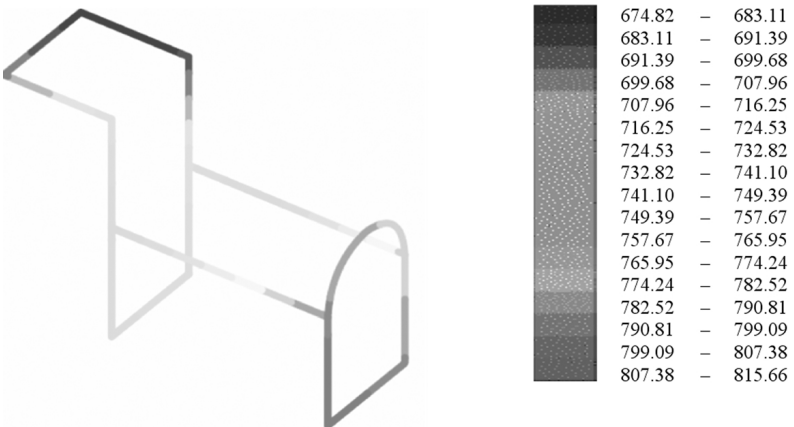
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-255.2012.8).



а



б



в

Рис. 5. Температурные поля стержневой конструкции в фиксированные моменты времени: 500 с (а), 1 000 с (б), 3 600 с (в) (температура стержня — в кельвинах)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Станкевич И.В. Математическое моделирование температурного состояния пространственных стержневых конструкций. Стационарные задачи. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 8.
URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/893.html>
- [2] Котович А.В., Станкевич И.В. *Решение задач теплопроводности методом конечных элементов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, 84 с.
- [3] Марчук Г.И., Агошков В.И. *Введение в проекционно-сеточные методы*. Москва, Наука, 1981, 416 с.
- [4] Галанин А.П., Савенков Е.Б. *Методы численного анализа математических моделей*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, 591 с.
- [5] Ортега Дж., Рейнболдт В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*. Москва, Мир, 1975, 558 с.
- [6] Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. *Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах*. Киев, Наукова думка, 1991, 432 с.
- [7] Кошелев А.И. О сходимости метода последовательных приближений для квазилинейных эллиптических уравнений. *Доклады Академии наук СССР*, 1962, т. 142, № 5, с. 1007–1010.
- [8] Шейбак Т. Построение итерационного процесса для решения квазилинейного эллиптического уравнения с разрывными коэффициентами. *Дифференциальные уравнения и их применение*, 1985, № 38, с. 61–67.
- [9] Арделян Н.В. О сходимости итерационных методов решения нелинейных разностных схем для нелинейного уравнения теплопроводности. *Дифференциальные уравнения*, 1985, т. XXI, № 12, с. 2131–2137.
- [10] Jordan A. Iterative Method of the Analysis of Nonlinear Heat Transfer Problems. *Scientific Journal Bialystok University of Technology. Technical Sciences. Electricity*, 1992, vol. 83, no. 11, pp. 53–60.
- [11] Качуровский Р.И. Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах. *Успехи математических наук*, 1968, т. 23, № 2 (140), с. 121–168.
- [12] Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*. Москва, Мир, 1978, 336 с.
- [13] Станкевич И.В. Сходимость метода простых итераций при решении нелинейных стационарных уравнений теплопроводности. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Машиностроение*, 1995, № 3, с. 97–102.
- [14] Треногин В.А. *Функциональный анализ*. Москва, Наука, 1993, 440 с.

Статья поступила в редакцию 20.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Станкевич И.В. Математическое моделирование температурного состояния пространственных стержневых конструкций. Нестационарные и нелинейные задачи. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 8. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/894.html>

Станкевич Игорь Васильевич — д-р техн. наук, проф. кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: aplmech@yandex.ru