

**Математическое моделирование температурного состояния
пространственных стержневых конструкций.
Стационарные задачи**

© И.В. Станкевич

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены особенности построения основных матричных соотношений в рамках конечно-элементной технологии решения стационарных температурных задач применительно к стержневым конструкциям, имеющим сложное пространственное оформление. На основе этой технологии разработан комплекс программ, который позволяет решать широкий класс задач научного и прикладного характера, исследовать особенности влияния различных конструктивных, технологических и эксплуатационных факторов на температурное состояние стержневых конструкций. В качестве примеров применения конечно-элементной технологии и возможностей созданного комплекса прикладных программ представлено решение ряда температурных задач.

Ключевые слова: *стержневая конструкция, стационарная температурная задача, конечно-элементная технология, комплекс прикладных программ.*

Введение. В энергомашиностроении, технологическом и электронном машиностроении, транспортной, авиационной и аэрокосмической технике достаточно широко распространены стержневые конструкции, имеющие сложное пространственное оформление и работающие в условиях теплового нагружения различной интенсивности [1–4]. Первый и весьма ответственный этап общей оценки работоспособности таких конструкций — определение их температурного состояния. В настоящее время перспективным является применение современных методов численного анализа для определения температурного состояния стержневых конструкций. В рамках настоящей работы рассмотрены особенности построения конечно-элементной технологии для определения температурного состояния стержневых конструкций со сложным пространственным оформлением.

Постановка стационарной задачи теплопроводности. Рассмотрим простейшую стержневую систему, представляющую собой однородный изотропный криволинейный стержень (рис. 1). Введем одномерную пространственную (относительно глобальной системы координат $Ox_1x_2x_3$) криволинейную систему координат $O'\eta$, у которой координата η отсчитывается вдоль оси стержня (см. рис. 1). Запишем в терминах криволинейной системы координат $O'\eta$ вариант краевой

стационарной задачи теплопроводности, но с учетом предположения о том, что в поперечных сечениях стержня отсутствуют градиенты температуры. Имеем

$$\lambda(T(\eta),_{\eta})_{,\eta} + q_V(\eta) = 0, \eta \in (\eta_1, \eta_2); \quad (1)$$

$$\lambda T(\eta),_{\eta}|_{\eta=\eta_1} = q_W; \quad (2)$$

$$\lambda T(\eta),_{\eta}|_{\eta=\eta_2} = \alpha_W(T_f - T(\eta))|_{\eta=\eta_2}, \quad (3)$$

где λ — коэффициент теплопроводности материала стержня; $T(\eta)$ — температура стержня; $q_V(\eta)$ — мощность внутренних источников (стоков) теплоты; η_1, η_2 — координаты торцевых поверхностей S_2 и S_3 стержня соответственно ($\eta_1 < \eta_2$); q_W — численное значение плотности теплового потока на поверхности S_2 , в данном случае принято, что $q_W > 0$, если теплота отводится от поверхности S_2 стержня ($T(\eta),_{\eta}|_{\eta=\eta_1} > 0$); α_W и T_f — коэффициент теплоотдачи и температура внешней среды вблизи поверхности S_3 соответственно. Здесь и далее запятой с индексом обозначена операция дифференцирования по соответствующим координатам.

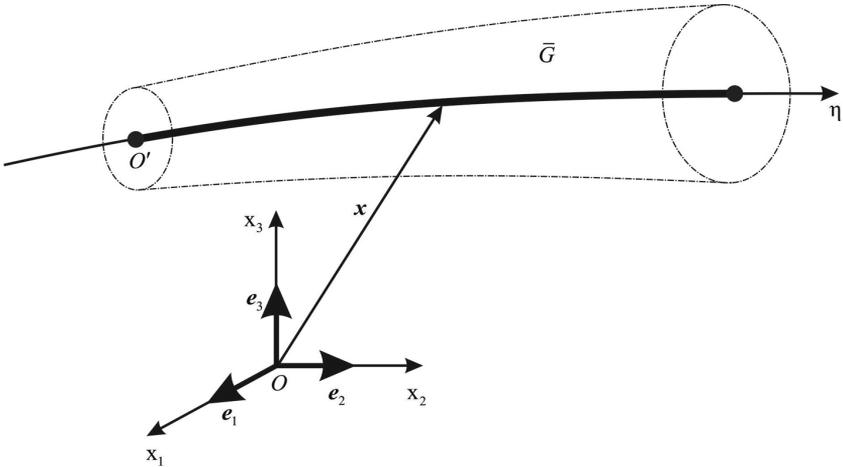


Рис. 1. Построение пространственной криволинейной системы координат $O'\eta$

Численное решение задачи (1)–(3) предполагает использование соответствующего дискретного аналога. Построим дискретный аналог с помощью процедур МКЭ, основанных на вариационной формулировке [5, 6]. Для этого рассмотрим функционал, имеющий следующую структуру:

$$\Phi [T] = \frac{1}{2} \int_G [\lambda (T,_{\eta})^2 - 2q_V T] dv + \int_{S_2} q_W T ds + \int_{S_3} \alpha_W \left(\frac{1}{2} T - T_f \right) T ds. \quad (4)$$

В дальнейшем выражение (4) примем за основное и, по мере построения рабочих соотношений, будем делать необходимые обобщения.

Матричные соотношения МКЭ. Аппроксимируем ограниченную замкнутую область $\bar{G} \subset \mathbb{R}^3$, в которой решается задача (1)–(3), ограниченной замкнутой областью $\bar{G}_h \subset \mathbb{R}^3$, состоящей из объединения k_V конечных элементов $\bar{V}^{(e)}$, т. е. $\bar{G}_h = \bigcup_{e=1}^{k_V} \bar{V}^{(e)}$, где (e) – идентификационная метка конечного элемента. Другими словами, аппроксимируем рассматриваемую стержневую систему совокупностью конечных элементов. Для этого необходимо выбрать тип конечного элемента. Чтобы аппроксимировать форму стержневой системы, воспользуемся одномерными конечными элементами (рис. 2).

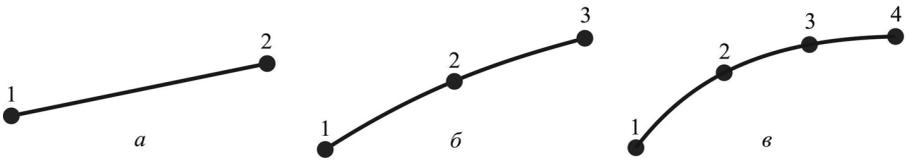


Рис. 2. Типы одномерных конечных элементов (1–4 – локальная нумерация узлов)

Достаточно часто распределение температуры вдоль осевых линий стержней аппроксимируют с помощью тех же конечных элементов, как и при аппроксимации их геометрической формы. Совокупность конечных элементов образует конечно-элементную модель стержневой системы. На рис. 3 представлен пример конечно-элементной модели стержневой системы. При описании топологии (геометрических связей) конечно-элементной модели применяют локальную и глобальную нумерацию узлов. При локальной нумерации узлы нумеруют только в пределах множества узлов, принадлежащих данному рассматриваемому элементу (e) , в отличие от глобальной нумерации узлов, при которой нумеруются все узлы конечно-элементной модели, причем совместные узлы элементов – только один раз. На рис. 2 показана локальная нумерация узлов различных типов конечных элементов. На рис. 3 приведен пример глобальной нумерации узлов конечно-элементной модели и локальной нумерации для элемента с номером 7 (номера элементов указаны в круглых скобках). Таким образом, чтобы задать конечно-элементную модель, необходимо построить две таблицы: в одной таблице привести описание геометрических связей между конечными элементами, т. е. связь глобальных и локальных номеров узлов для каждого элемента, а в другой – глобальные координаты узлов в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$.

В выражение функционала (4) входят два интеграла, предполагающие интегрирование по торцевым поверхностям S_2, S_3 стержня, на которых заданы условия теплообмена. Формально эти интегралы можно

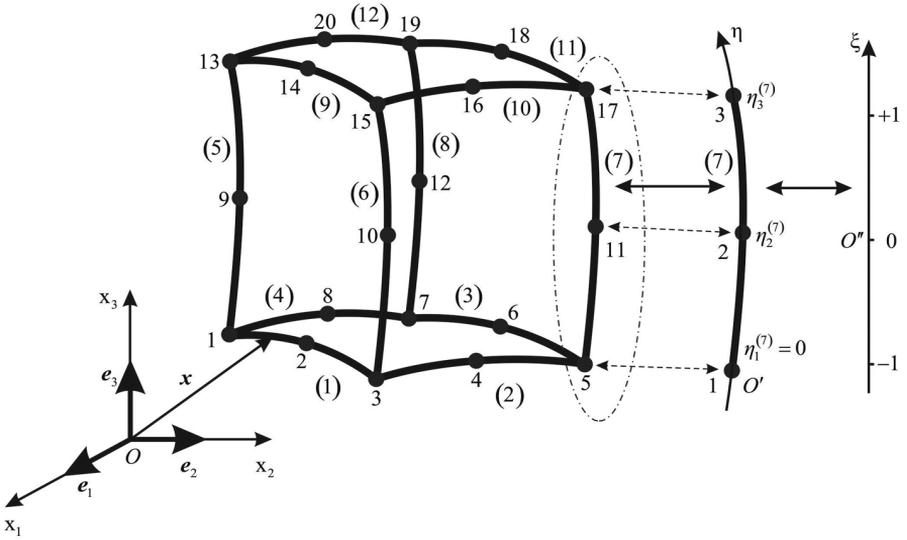


Рис. 3. Глобальная нумерация узлов конечно-элементной модели

использовать и в том случае, когда граничные условия заданы на выделенных участках боковой поверхности рассматриваемого стержня. Для эффективной реализации процедур численного интегрирования удобно в рассмотрение ввести так называемые поверхностные конечные элементы, которые будут аппроксимировать торцевые и боковые поверхности стержневой системы. В дальнейшем поверхностные конечные элементы обозначены $\bar{S}^{(e)}$. Объединение всех поверхностных конечных элементов образует границу ∂G_h области: $\partial G_h = \bigcup_{e=1}^{k_S} \bar{S}^{(e)}$, где k_S — число поверхностных элементов в сетке конечно-элементной модели. В то же время

$$\partial G_h = S_{h1} \cup S_{h2} \cup S_{h3},$$

где S_{h1}, S_{h2}, S_{h3} — поверхности, аппроксимирующие поверхности S_1, S_2, S_3 , на которых заданы граничные условия 1–3-го рода соответственно. Предположим, что любой поверхностный конечный элемент $\bar{S}^{(e)}$ целиком лежит на какой-либо одной поверхности. Описание этих элементов приведено ниже.

После построения сетки конечно-элементной модели и учитывая выражение (4), имеем функционал

$$\Phi_h = \frac{1}{2} \int_{G_h} [\lambda (T, \eta)^2 - 2q_V T] dv + \int_{S_{h2}} q_W T ds + \int_{S_{h3}} \alpha_W \left(\frac{1}{2} T - T_f \right) T ds. \quad (5)$$

Здесь все данные, входящие в формулировку задачи (1)–(3), отнесены к области G_h и ее границе ∂G_h .

Функционал Φ_h в силу свойства аддитивности можно представить в виде

$$\Phi_h = \sum_{e=1}^{k_V} \Phi_{hV}^{(e)} + \sum_{e=1}^{k_S} \Phi_{hS}^{(e)},$$

где

$$\Phi_{hV}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \left[\lambda^{(e)} (T^{(e)}, \eta) - 2q_V^{(e)} T^{(e)} \right] dv, V^{(e)} \subset G_h; \quad (6)$$

$$\Phi_{hS}^{(e)} = \begin{cases} \int_{S^{(e)}} q_W^{(e)} T^{(e)} ds, & S^{(e)} \subset S_{h2}; \\ \int_{S^{(e)}} \alpha_W^{(e)} \left(\frac{1}{2} T^{(e)} - T_f^{(e)} \right) T^{(e)} ds, & S^{(e)} \subset S_{h3}. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь k_V, k_S — число объемных и поверхностных элементов в конечно-элементной модели соответственно.

Таким образом, заданная пространственная стержневая конструкция аппроксимируется конечно-элементной моделью, состоящей из конечных элементов двух видов — объемных и поверхностных. Поверхностные конечные элементы позволяют учесть граничные условия 2-го и 3-го рода. Особенности учета граничных условий 1-го рода рассмотрены ниже.

Функции $T^{(e)}$ и их производные $T^{(e)}, \eta$, в формулах (6) и (7), можно выразить через глобальный вектор узловых температур $\{T\}$, компонентами которого являются температуры всех k_U узлов сетки конечно-элементной модели. Для этого используем основное интерполяционное соотношение МКЭ [6].

Таким образом, при интегрировании объемных элементов получаем

$$T^{(e)}(\eta) = [N_V^{(e)}] \{T^{(e)}\} = [N_V^{(e)}] [a_V^{(e)}] \{T\}; \quad (8)$$

$$T^{(e)}(\eta), \eta \stackrel{def}{=} \frac{dT^{(e)}(\eta)}{d\eta} = [B^{(e)}] \{T^{(e)}\} = [B^{(e)}] [a_V^{(e)}] \{T\}, \quad (9)$$

где $[N_V^{(e)}] = [N_1^{(e)} \quad N_2^{(e)} \quad \dots \quad N_{p^{(e)}}^{(e)}]$ — матрица-строка функций формы конечного элемента (e) ; $[a_V^{(e)}]$ — матрица геометрических связей объемного конечного элемента (e) ; $\{T^{(e)}\} = [T_1^{(e)} \quad T_2^{(e)} \quad \dots \quad T_{p^{(e)}}^{(e)}]^T$ — матрица-столбец (локальная) значений температуры в узлах конечного элемента (e) ; $\{T\} = [T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_{k_U}]^T$ — матрица-столбец (глобальная) значений температуры в узлах конечно-элементной модели; $[B^{(e)}] = [N_{1, \eta}^{(e)} \quad N_{2, \eta}^{(e)} \quad \dots \quad N_{p^{(e)}, \eta}^{(e)}]$ — матрица градиентов объемного конечного элемента (e) , компонентами которой являются производные функций формы $N_k^{(e)}, \eta$, $k = \overline{1, p^{(e)}}$ ($p^{(e)}$ — число узлов

объемного конечного элемента (e) , зависящее от типа элемента (см. рис. 2)).

Аналогично при интегрировании поверхностных элементов имеем

$$T^{(e)} = \left[N_S^{(e)} \right] \left[a_S^{(e)} \right] \{T\}, \quad (10)$$

где $\left[N_S^{(e)} \right] = \left[N_1^{(e)} \quad N_2^{(e)} \quad \dots \quad N_{p^{(e)}}^{(e)} \right]$ — матрица-строка функций формы конечного элемента (e) , $p^{(e)}$ — число узлов поверхностного конечного элемента (e) ; $\left[a_S^{(e)} \right]$ — матрица геометрических связей поверхностного конечного элемента (e) .

Как показывает практика численных исследований, число k_S поверхностных конечных элементов существенно меньше числа k_V объемных элементов. Если интегрирование ведется по боковой поверхности, то $\left[N_S^{(e)} \right] = \left[N_V^{(e)} \right]$. Различие возникает при интегрировании по торцевым поверхностям стержневой системы, при этом каждая торцевая поверхность рассматривается как самостоятельный поверхностный конечный элемент. В этом случае $\left[N_S^{(e)} \right] = [1]_{1 \times 1} = 1$ и $p^{(e)} = 1$.

Теперь, если в выражение (6) для $\Phi_{hV}^{(e)}$ подставить соотношения (8) и (9), получим

$$\Phi_{hV}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \left(\{T\}^T \left[a_V^{(e)} \right]^T \left[B^{(e)} \right]^T \left[D^{(e)} \right] \left[B^{(e)} \right] - 2q_V^{(e)} \left[N_V^{(e)} \right] \right) \left[a_V^{(e)} \right] \{T\} dv, \quad (11)$$

где $\left[D^{(e)} \right]$ — матрица размерности 1×1 имеет вид $\left[D^{(e)} \right] = [\lambda^{(e)}]$ ($\lambda^{(e)}$ — коэффициент теплопроводности материала конечного элемента (e)).

Аналогично при подстановке в выражение (7) соотношения (10) находим

$$\Phi_{hS}^{(e)} = \begin{cases} \int_{S_2^{(e)}} q_W^{(e)} \left[N_S^{(e)} \right] \left[a_S^{(e)} \right] \{T\} ds, & S_2^{(e)} \subset S_{h2}; \\ \int_{S_3^{(e)}} \alpha_W^{(e)} \left(\frac{1}{2} \left[N_S^{(e)} \right] \left[a_S^{(e)} \right] \{T\} - T_f^{(e)} \right) \left(\left[N_S^{(e)} \right] \left[a_S^{(e)} \right] \{T\} \right) ds, & S_3^{(e)} \subset S_{h3}. \end{cases} \quad (12)$$

Минимизируя функционал (5), получаем уравнение

$$\delta \Phi_h = \delta \{T\}^T \frac{\partial}{\partial \{T\}} \left(\sum_{e=1}^{k_V} \Phi_{hV}^{(e)} + \sum_{e=1}^{k_S} \Phi_{hS}^{(e)} \right) = 0,$$

из которого в силу произвольности вариации $\delta \{T\}$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \left(\sum_{e=1}^{k_V} \Phi_{hV}^{(e)} + \sum_{e=1}^{k_S} \Phi_{hS}^{(e)} \right) = \{0\}. \quad (13)$$

Подставляя выражения (11) и (12) в соотношение (13) и группируя слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{k_V} [a_V^{(e)}]^T \left(\int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dv \right) [a_V^{(e)}] \{T\} + \\ & + \sum_{e=1}^{k_S} [a_S^{(e)}]^T \left(\int_{S_3^{(e)}} \alpha_W^{(e)} [N_S^{(e)}]^T [N_S^{(e)}] ds \right) [a_S^{(e)}] \{T\} = \\ & = \sum_{e=1}^{k_V} [a_V^{(e)}]^T \int_{V^{(e)}} q_V^{(e)} [N_V^{(e)}]^T dv - \\ & - \sum_{e=1}^{k_S} [a_S^{(e)}]^T \left(\int_{S_2^{(e)}} q_W^{(e)} [N_S^{(e)}]^T ds - \int_{S_3^{(e)}} \alpha_W^{(e)} T_f^{(e)} [N_S^{(e)}]^T ds \right). \quad (14) \end{aligned}$$

Запишем глобальную матрицу теплопроводности $[K]$ и глобальный вектор узловых тепловых сил $\{R\}$:

$$\begin{aligned} [K] &= \sum_{e=1}^{k_V} [a_V^{(e)}]^T \left(\int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dv \right) [a_V^{(e)}] + \\ & + \sum_{e=1}^{k_S} [a_S^{(e)}]^T \left(\int_{S_3^{(e)}} \alpha_W^{(e)} [N_S^{(e)}]^T [N_S^{(e)}] ds \right) [a_S^{(e)}]; \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{R\} &= \sum_{e=1}^{k_V} [a_V^{(e)}]^T \int_{V^{(e)}} q_V^{(e)} [N_V^{(e)}]^T dv - \\ & - \sum_{e=1}^{k_S} [a_S^{(e)}]^T \left(\int_{S_2^{(e)}} q_W^{(e)} [N_S^{(e)}]^T ds - \int_{S_3^{(e)}} \alpha_W^{(e)} T_f^{(e)} [N_S^{(e)}]^T ds \right). \quad (16) \end{aligned}$$

Тогда уравнение (14), характеризующее тепловое равновесие в узлах сетки конечно-элементной модели, принимает вид матричного уравнения

$$[K] \{T\} = \{R\}. \quad (17)$$

Методы численного решения уравнения (17) рассмотрены в работах [6, 7]. Отметим, что учет граничных условий 1-го рода осуществляется на этапе численного решения уравнения (17). Например, при решении данного уравнения каким-либо итерационным методом необходимо в векторе $\{T\}$ зафиксировать и поддерживать постоянными при выполнении итераций те компоненты, которые соответствуют глобальным номерам узлов конечно-элементной модели с заданными значениями температуры.

Особенности численного интегрирования матричных соотношений МКЭ. При построении соотношений (15) и (16) предполагалось, что функции формы $N_k^{(e)}(\eta)$ ($k = \overline{1, p^{(e)}}$, $p^{(e)}$ — число узлов конечного элемента (см. рис. 2)) зависят от криволинейной координаты η . Однако при вычислении интегралов применять криволинейную систему координат $O'\eta$ крайне неудобно. Как правило, интегралы, входящие в выражения (15) и (16), вычисляются с помощью квадратурных формул Гаусса [7]. При этом для каждого рассматриваемого конечного элемента (e) используют нормированную локальную систему координат с осью $O''\xi$, $-1 \leq \xi \leq +1$ (см. рис. 3 и 4). В этой нормированной локальной системе координат записывают функции формы конечных элементов $N_k^{(e)}(\xi)$ и их производные

$$\left(N_k^{(e)}(\xi)\right)_{,\xi} \stackrel{def}{=} \frac{dN_k^{(e)}(\xi)}{d\xi},$$

которые затем используют при построении матриц градиентов $[B^{(e)}]$, в этой системе координат также фиксируют координаты гауссовых точек ξ_i [6, 7]. В пространственной криволинейной системе координат $O'\eta$ вычисляют координаты узлов конечных элементов, представленных на рис. 2 и 4, например, для четырехузлового кубического конечного элемента (см. рис. 2, в и 4, в) координаты узлов имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \eta_1^{(e)} &= 0; \quad \eta_2^{(e)} = \int_{-1}^{-\frac{1}{3}} \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_{i,\xi})^2} d\xi, \\ \eta_3^{(e)} &= \int_{-1}^{+\frac{1}{3}} \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_{i,\xi})^2} d\xi; \quad \eta_4^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_{i,\xi})^2} d\xi, \end{aligned}$$

где производные глобальных координат

$$x_{i,\xi} \stackrel{def}{=} \frac{dx_i}{d\xi}, \quad i = \overline{1, 3}$$

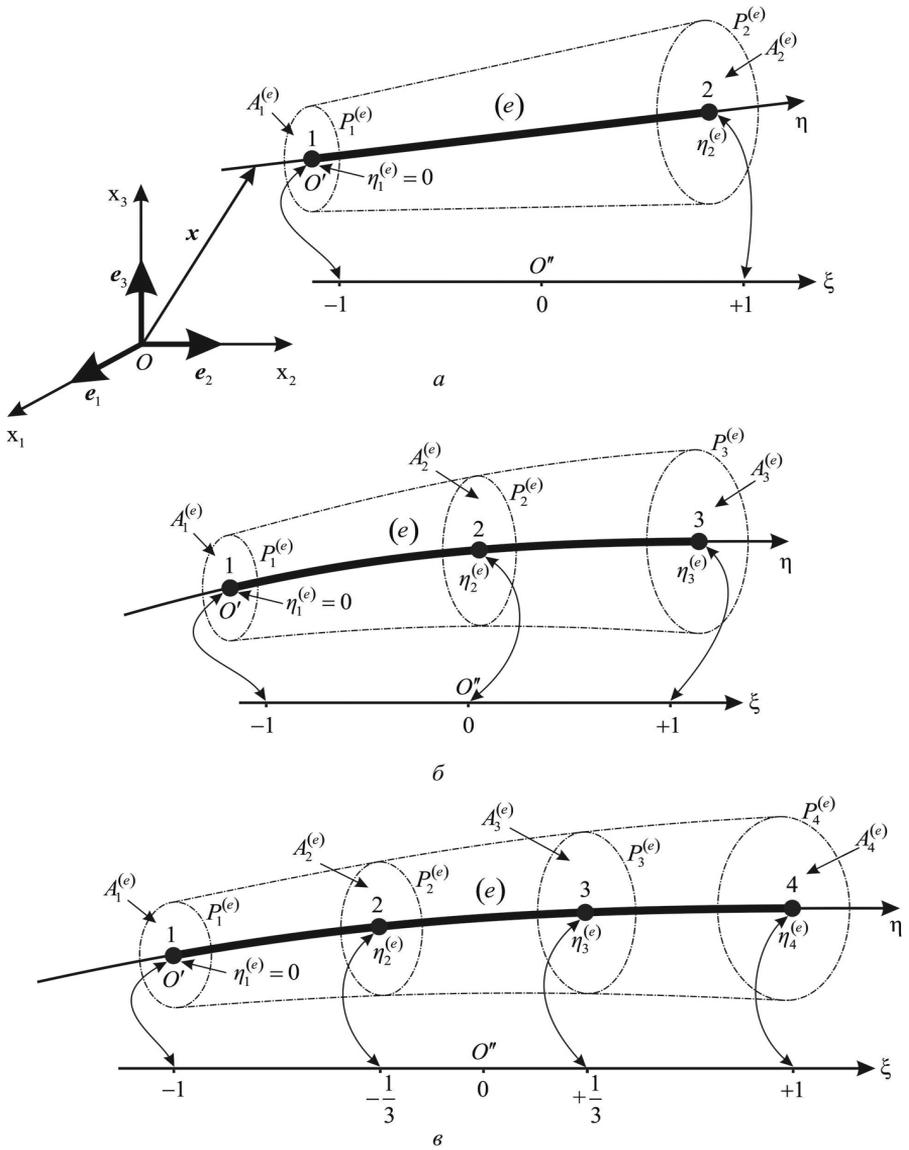


Рис. 4. Геометрические характеристики и системы координат конечных элементов

по локальной координате ξ (см. рис. 2 и 3) определяются формулой

$$x_{i,\xi} = \frac{dx_i}{d\xi} = \frac{dN_1^{(e)}(\xi)}{d\xi} X_{i1}^{(e)} + \dots + \frac{dN_{p^{(e)}}^{(e)}(\xi)}{d\xi} X_{ip^{(e)}}^{(e)} = [G^{(e)}] \{X_i^{(e)}\}. \quad (18)$$

Здесь $X_{ik}^{(e)}$, $i = \overline{1, 3}$, $k = \overline{1, p^{(e)}}$, $p^{(e)} = \overline{2, 4}$ — координаты узлов конечного элемента (e) в глобальной системе координат $Ox_1x_2x_3$; i — номер оси глобальной системы координат; k — локальный номер узла конечного элемента; $p^{(e)}$ — число узлов конечного элемента (см. рис. 2). Матрица-строка $[G^{(e)}]$ составлена из производных функций формы

$N_k^{(e)}(\xi)$ по локальной координате ξ , а компонентами вектор-столбца $\{X_i^{(e)}\}$ являются глобальные координаты узлов $X_{ik}^{(e)}$ элемента (e) .

Таким образом, координаты $\eta_k^{(e)}$ узлов конечного элемента (e) в криволинейной локальной системе координат $O'\eta$, связанной с осью конечного элемента (e) , представляют собой длины дуг от начального узла $k = 1$ данного элемента до рассматриваемого узла k этого же элемента, при этом координата начального узла $k = 1$ для любого конечного элемента всегда равна нулю: $\eta_1^{(e)} = 0$ (см. рис. 4).

Интегрирование по объему. Обозначим интегралы, входящие в выражения (15) и (16), следующим образом:

$$\left[I_B^{(e)} \right] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dv; \quad (19)$$

$$\{ I_{qV}^{(e)} \} = \int_{V^{(e)}} q_V^{(e)} \left[N_V^{(e)} \right]^T dv. \quad (20)$$

Элемент объема dv запишем в виде

$$dv = A^{(e)}(\xi) d\eta = A^{(e)}(\xi) \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_{i,\xi})^2} d\xi, \quad (21)$$

где $A^{(e)}(\xi)$ — площадь поперечного сечения конечного элемента (e) (см. рис. 4), а производные $x_{i,\xi}$, $i = \overline{1,3}$ определяются формулой (18).

Площадь поперечного сечения $A^{(e)}(\xi)$ можно аппроксимировать с помощью функций формы

$$A^{(e)}(\xi) = \left[N_V^{(e)} \right] \{ A^{(e)} \}. \quad (22)$$

Здесь $\{ A^{(e)} \}$ — вектор, составленный из площадей поперечных сечений $A_k^{(e)}$, $k = \overline{1, p^{(e)}}$, отнесенных к узлам элемента (e) (см. рис. 4).

Матрица градиентов имеет вид

$$[B^{(e)}] = \left[N_{1,\eta}^{(e)} \quad \dots \quad N_{p^{(e)},\eta}^{(e)} \right]. \quad (23)$$

Для вычисления производных

$$N_{k,\eta}^{(e)} \stackrel{def}{=} \frac{dN_k^{(e)}}{d\eta}$$

необходимо использовать соотношение

$$\frac{dN_k^{(e)}}{d\xi} = \frac{dN_k^{(e)}}{d\eta} \frac{d\eta}{d\xi}, \quad (24)$$

отсюда

$$N_{k,\eta}^{(e)} \stackrel{def}{=} \frac{dN_k^{(e)}}{d\eta} = \frac{1}{\frac{d\eta}{d\xi}} \frac{dN_k^{(e)}}{d\xi} = \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^{-1} \frac{dN_k^{(e)}}{d\xi}. \quad (25)$$

Производная $d\eta/d\xi$ в данном случае является одномерным аналогом матрицы Якоби преобразования координат. Для вычисления $d\eta/d\xi$ используется соотношение, которое по конструкции аналогично выражению (19), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\xi} &= \frac{dN_1^{(e)}(\xi)}{d\xi} \eta_1^{(e)} + \dots + \frac{dN_{p^{(e)}}^{(e)}(\xi)}{d\xi} \eta_{p^{(e)}}^{(e)} = \\ &= \left[N_1^{(e), \xi} \quad \dots \quad N_{p^{(e)}, \xi}^{(e)} \right] \begin{Bmatrix} \eta_1^{(e)} \\ \vdots \\ \eta_{p^{(e)}}^{(e)} \end{Bmatrix} = [G^{(e)}] \{ \eta^{(e)} \}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $\eta_k^{(e)}$, $k = \overline{1, p^{(e)}}$, $p^{(e)} = \overline{2, 4}$ — координаты узлов конечного элемента (e) в локальной одномерной криволинейной системе координат $O'\eta$; k — локальный номер узла конечного элемента; $p^{(e)}$ — число узлов конечного элемента. Компонентами вектор-столбца $\{ \eta^{(e)} \}$ являются координаты узлов $\eta_k^{(e)}$.

Матрица $[D^{(e)}]$, состоящая в общем случае из компонент тензора теплопроводности, в данном случае является скаляром:

$$[D^{(e)}] = [\lambda^{(e)}]_{1 \times 1} = \lambda^{(e)}. \quad (27)$$

Используя аппарат функций формы, коэффициент теплопроводности $\lambda^{(e)}$ и мощность внутренних источников q_V , входящих в выражения (19) и (20), можно представить в нормированной локальной системе координат $O''\xi$, связанной с рассматриваемым конечным элементом (см. рис. 3 и 4), следующим образом:

$$\lambda^{(e)}(\xi) = [N_V^{(e)}] \{ \lambda^{(e)} \}; \quad (28)$$

$$q_V^{(e)}(\xi) = [N_V^{(e)}] \{ q_V^{(e)} \}, \quad (29)$$

где $\{ \lambda^{(e)} \}$ — вектор, составленный из значений коэффициента теплопроводности $\lambda_k^{(e)}$, $k = \overline{1, p^{(e)}}$, отнесенных к узлам конечного элемента (e); $\{ q_V^{(e)} \}$ — вектор, составленный из значений мощности внутренних источников $q_{V_k}^{(e)}$, $k = \overline{1, p^{(e)}}$, взятых в узлах конечного элемента (e). Здесь координата ξ определяет точку, принадлежащую образу конечного элемента в нормированной локальной системе координат $O''\xi$ (см. рис. 4).

Таким образом, с учетом выражений (21) – (29), имеем

$$[I_B^{(e)}] = \sum_{l=1}^n \left[\lambda^{(e)}(\xi) A^{(e)}(\xi) [B^{(e)}]^T [B^{(e)}] \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_{i, \xi})^2} \right]_{\xi=\xi_l} H_l,$$

$$\{I_{q_V}^{(e)}\} = \sum_{l=1}^n \left[q_V^{(e)}(\xi) A^{(e)}(\xi) [N_V^{(e)}]^T \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_{i,\xi})^2} \right] \Big|_{\xi=\xi_l} H_l,$$

где n — число гауссовых точек; l — номер гауссовой точки; ξ_l — координата гауссовой точки в нормированной локальной системе координат $O''\xi$; H_l — весовой коэффициент квадратурной формулы.

Интегрирование по поверхности. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} [I_{\alpha_w}^{(e)}] &= \int_{S_3^{(e)}} \alpha_w^{(e)} [N_S^{(e)}]^T [N_S^{(e)}] ds; \\ \{I_{\alpha_w T_f}^{(e)}\} &= \int_{S_3^{(e)}} \alpha_w^{(e)} T_f [N_S^{(e)}]^T ds; \\ \{I_{q_w}^{(e)}\} &= \int_{S_2^{(e)}} q_w^{(e)} [N_S^{(e)}]^T ds. \end{aligned} \quad (30)$$

При интегрировании по боковой поверхности элемент площади

$$ds = P^{(e)}(\xi) \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_{i,\xi})^2} d\xi, \quad (31)$$

где $P^{(e)}(\xi)$ — периметр боковой поверхности поверхностного конечного элемента (e) .

Используя функции формы, периметр $P^{(e)}(\xi)$ можно интерполировать на поверхностном конечном элементе следующим образом:

$$P^{(e)}(\xi) = [N_S^{(e)}] \{P^{(e)}\}. \quad (32)$$

Здесь $\{P^{(e)}\}$ — вектор, составленный из значений периметра боковой поверхности $P_k^{(e)}$, $k = \overline{1, p^{(e)}}$, взятых в узлах поверхностного конечного элемента (e) (см. рис. 4 и 5).

Для интерполяции в нормированных локальных координатах $O''\xi$ на рассматриваемом поверхностном элементе (e) коэффициента теплоотдачи $\alpha_w^{(e)}(\xi)$, температуры окружающей среды $T_f^{(e)}(\xi)$ или плотности теплового потока $q_w^{(e)}(\xi)$ также используют функции формы

$$\alpha_w^{(e)}(\xi) = [N_S^{(e)}] \{\alpha_w^{(e)}\}; \quad (33)$$

$$T_f^{(e)}(\xi) = [N_S^{(e)}] \{T_f^{(e)}\}; \quad (34)$$

$$q_w^{(e)}(\xi) = [N_S^{(e)}] \{q_w^{(e)}\}, \quad (35)$$

где $\{\alpha_w^{(e)}\}$ — вектор, составленный из значений коэффициента тепло-

отдачи $\alpha_{Wk}^{(e)}$, $k = \overline{1, p^{(e)}}$, отнесенных к узлам поверхностного конечного элемента (e) ; $\left\{ T_f^{(e)} \right\}$ — вектор, составленный из значений температуры окружающей среды $T_{fk}^{(e)}$, $k = \overline{1, p^{(e)}}$, отнесенных к узлам поверхностного конечного элемента (e) ; $\left\{ q_W^{(e)} \right\}$ — вектор, составленный из значений плотности теплового потока $q_{Wk}^{(e)}$, $k = \overline{1, p^{(e)}}$, взятых в узлах поверхностного конечного элемента (e) (рис. 5, а, б).

Квадратурные формулы для вычисления интегралов (30) по боковой поверхности с учетом соотношений (31) – (35) имеют вид

$$[I_{\alpha_W}^{(e)}] = \sum_{l=1}^n \alpha_W^{(e)}(\xi) P^{(e)}(\xi) [N_S^{(e)}]^T [N_S^{(e)}] \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_{i,\xi})^2} \Big|_{\xi=\xi_l} H_l,$$

$$[I_{\alpha_W T_f}^{(e)}] = \sum_{l=1}^n \alpha_W^{(e)}(\xi) T_f^{(e)}(\xi) P^{(e)}(\xi) [N_S^{(e)}]^T [N_S^{(e)}] \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_{i,\xi})^2} \Big|_{\xi=\xi_l} H_l,$$

$$[I_{q_W}^{(e)}] = \sum_{l=1}^n q_W^{(e)}(\xi) P^{(e)}(\xi) [N_S^{(e)}]^T [N_S^{(e)}] \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_{i,\xi})^2} \Big|_{\xi=\xi_l} H_l,$$

где n — число гауссовых точек; l — номер гауссовой точки; ξ_l — локальная координата гауссовой точки; H_l — весовой коэффициент квадратурной формулы.

При исследовании температурных полей стержневых элементов конструкций граничные условия по теплообмену могут быть заданы не только на боковых, но и на торцевых поверхностях (рис. 5, в). При задании граничных условий на торцевых поверхностях интегралы (30) вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} I_{\alpha_W}^{(e)} &= \alpha_W^{(e)} S_3^{(e)}, \\ I_{\alpha_W T_f}^{(e)} &= \alpha_W^{(e)} T_f^{(e)} S_3^{(e)}, \\ I_{q_W}^{(e)} &= q_W^{(e)} S_2^{(e)}, \end{aligned}$$

где $S_2^{(e)}$ и $S_3^{(e)}$ — площади торцевых поверхностей (см. рис. 5, в); $\alpha_W^{(e)}$, $T_f^{(e)}$ и $q_W^{(e)}$ — параметры граничных условий на соответствующих торцевых поверхностях.

Значение $I_{\alpha_W}^{(e)}$ суммируют со значением элемента главной диагонали матрицы $[K]$, номер которого равен глобальному номеру узла, размещенного непосредственно на рассматриваемой торцевой поверхности стержневой конструкции. Аналогичным образом значения $I_{\alpha_W T_f}^{(e)}$ и $I_{q_W}^{(e)}$ заносят в вектор $\{R\}$.

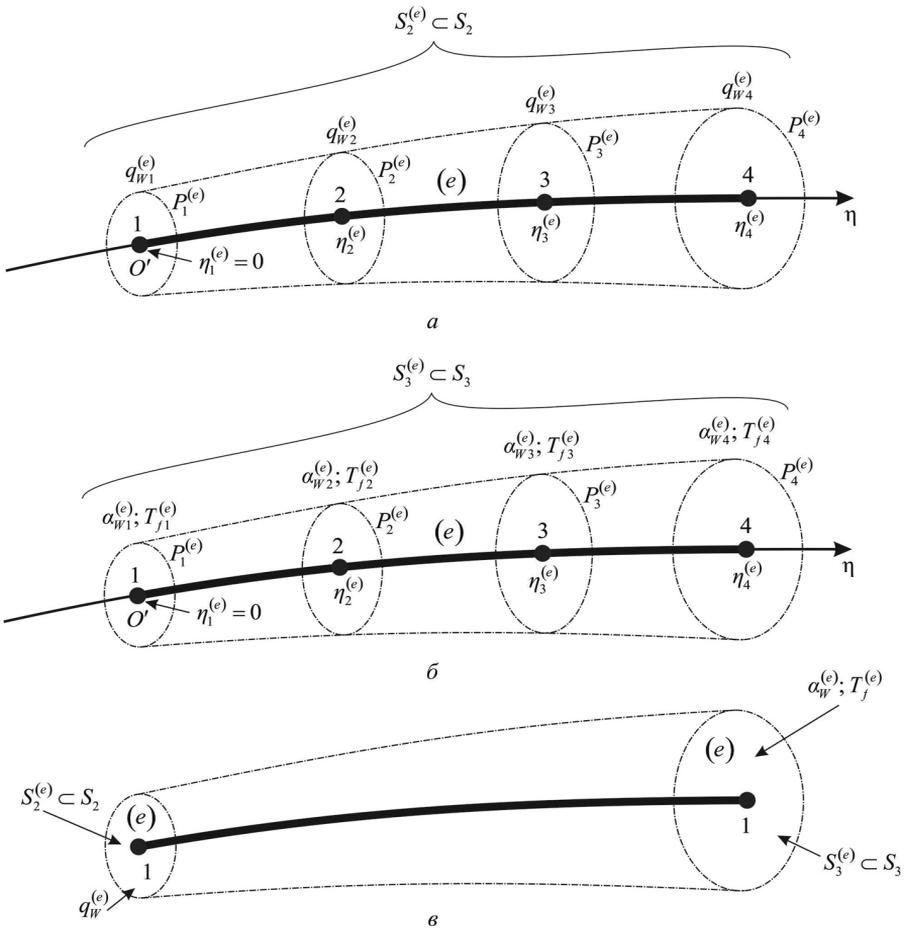


Рис. 5. Способы задания граничных условий теплообмена

Примеры расчета температурного состояния стержневых конструкций. Изложенная выше методика математического моделирования температурного состояния стержневых конструкций была реализована в виде комплекса прикладных программ, который применялся для исследования ряда конструкций. Ниже представлены некоторые результаты. На рис. 6–8 показаны стационарные температурные поля трех вариантов пространственных стержневых конструкций, подверженных симметричному (рис. 6, а; 7, а; 8, а) и несимметричному тепловому нагружению (рис. 6, б; 7, б; 8, б). В качестве конечных элементов были выбраны квадратичные элементы (рис. 2, б). В зонах А и Б на боковых поверхностях стержней были заданы граничные условия 3-го рода: $\alpha_W^{(A)} = 100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, $T_f^{(A)} = 800 \text{ К}$ и $\alpha_W^{(B)} = 50 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, $T_f^{(B)} = 500 \text{ К}$. Значение коэффициента теплопроводности λ и площади поперечных сечений A всех стержней для всех конструкций были приняты одинаковыми и равными $30 \text{ Вт}/(\text{К} \cdot \text{м})$ и $0,0001 \text{ м}^2$ соответственно.

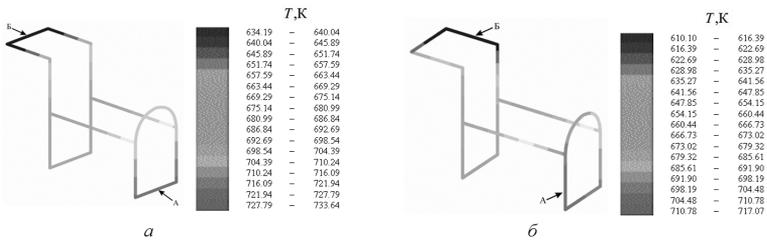


Рис. 6. Температурное поле стержневой конструкции (вариант 1)

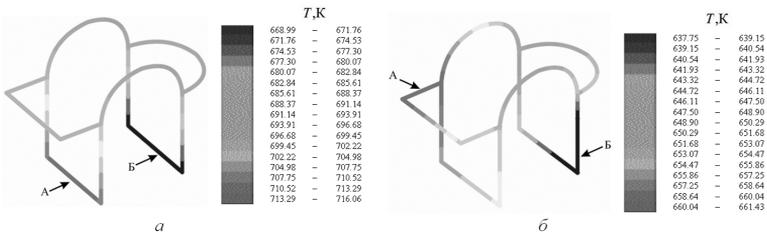


Рис. 7. Температурное поле стержневой конструкции (вариант 2)

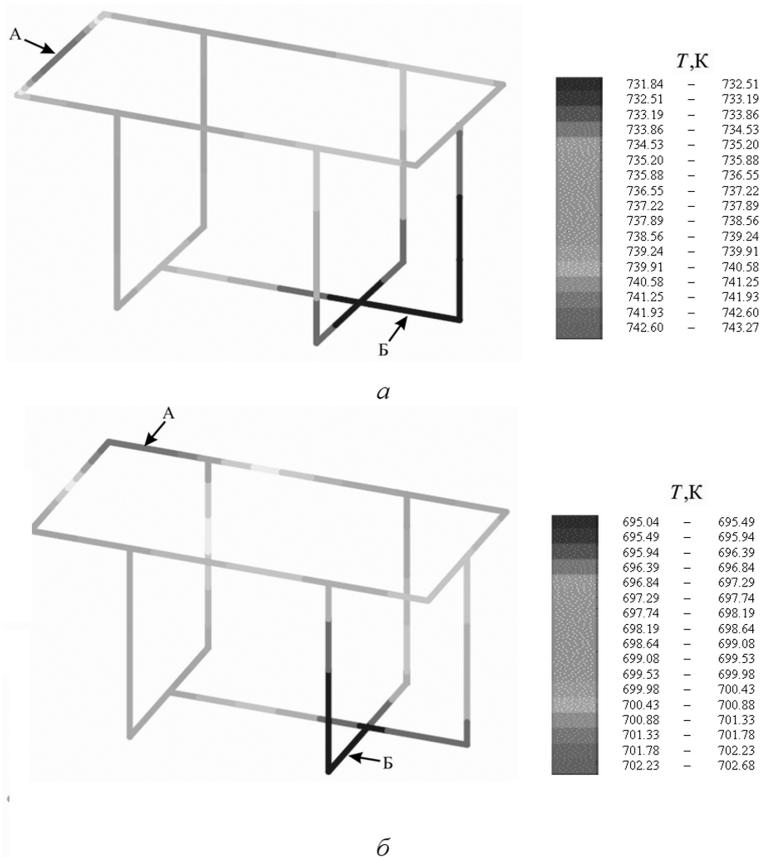


Рис. 8. Температурное поле стержневой конструкции (вариант 3)

Выводы. Рассмотрены особенности построения конечно-элементной технологии решения стационарных температурных задач применительно к пространственным стержневым конструкциям, имеющим сложное геометрическое оформление. На основе данной технологии разработан комплекс прикладных программ, который позволяет решать широкий класс задач научного и прикладного характера; исследовать особенности влияния различных конструктивных, технологических и эксплуатационных факторов на температурное состояние стержневых конструкций. В качестве примеров применения конечно-элементной технологии и возможностей созданного комплекса прикладных программ представлено решение ряда температурных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ–255.2012.8).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гинзгеймер С.А., Гладышев Ю.А., Дворянчикова Ю.В., Сначев А.В., Хомутский В.А. О расчете характеристик процесса выравнивания температуры в простейших пространственных стержневых системах. *Научные труды КГПУ им. К.Э. Циолковского. Сер. Естественные науки*, 2006, с. 43–47.
- [2] Денисов О.В., Калинин Д.Ю., Резник С.В. Моделирование температурного состояния элементов композитных стержневых космических конструкций. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2008, спец. выпуск, с. 183–192.
- [3] Веселовский В.Б., Колесник И.А. Тепловыделение в стержневых элементах конструкций при циклическом нагружении. *Металлургическая теплотехника*, 2010, № 2, с. 23–31.
- [4] Пахомов Б.М., Садовсков К.В. Учет взаимной затененности стержней при расчете температурного состояния крупногабаритного трансформируемого рефлектора. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2012, спец. выпуск, с. 15–21.
- [5] Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Приближенные методы математической физики*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001, 700 с.
- [6] Котович А.В., Станкевич И.В. *Решение задач теплопроводности методом конечных элементов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, 84 с.
- [7] Галанин М.П., Савенков Е.Б. *Методы численного анализа математических моделей*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, 591 с.

Статья поступила в редакцию 20.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Станкевич И.В. Математическое моделирование температурного состояния пространственных стержневых конструкций. Стационарные задачи. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 8. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/893.html>

Станкевич Игорь Васильевич — д-р техн. наук, проф. кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: apl mex@yandex.ru