УДК 519.6

Использование дизъюнктивных множеств при моделировании многоступенчатых процессов

© В.И. Сердюков, С.И. Шишкина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Изложен подход к моделированию многоступенчатых процессов, в основе которого лежит последовательное выполнение операций по схеме марковского или полумарковского процессов. Марковские и полумарковские процессы широко используются в теории массового обслуживания и теории надежности. Применение марковских и полумарковских процессов позволяет описывать поведение ряда реальных физических устройств и систем. В статье рассмотрены процессы с конечным множеством состояний. Для построения модели использована процедура, минимизирующая число состояний, которые необходимо учитывать при изучении многоступенчатых процессов.

Ключевые слова: *дизъюнктивное множество, марковский процесс, многоступенчатый процесс, множество состояний.*

Введение. Согласно сообщениям ИТАР-ТАСС от 30 мая 2013 г. Минобороны РФ в летнем периоде обучения намерено заметно увеличить интенсивность боевой подготовки. Первый заместитель министра обороны генерал армии Аркадий Бахин сообщил журналистам: «В летнем периоде обучения мы проведем свыше 500 различных учений разной емкости». По словам военачальника, «другая особенность летнего периода обучения — мы меняем некоторые подходы к системе обучения... Она будет строиться по принципу состязательности. Так, в первой декаде августа впервые в Вооруженных силах России будет проведен танковый биатлон, в котором примут участие лучшие экипажи, отобранные в военных округах... В них уже изъявили желание принять участие Казахстан и Белоруссия... Все это позволит повысить боеготовность Вооруженных сил России» [1].

Математическая модель. Для анализа эффективности проводимых учений рассмотрим математическую модель танкового боя как многоступенчатого процесса. Введем обозначения [2, 3]: пусть в сражении задействованы стороны A и B с числом участников n_A и n_B соответственно. Предположим, что в ходе проведения танкового биатлона ставится задача, при выполнении которой каждый участник должен последовательно пройти определенное число ступеней для достижения намеченных целей. Присвоим боевым экипажам противоборствующих сторон порядковые номера $i = \overline{1,\, n_A}$, $j = \overline{1,\, n_B}$. Каждому экипажу в ходе учения необходимо совершить определенную последовательность действий: обнаружить противника и вывести его из строя, т. е. выполнить две последовательные операции. Предположим, что сторона A имеет более современное оборудование, позволяющее и командиру танка, и наводчику наравных участвовать в сражении (однако при этом необходимо учитывать, что один из членов экипажа должен будет ожидать выполнения операции другим членом, обнаружившим цель), а у стороны B только один член экипажа может выполнять предписанные правилами действия. Тогда текущее состояние системы можно охарактеризовать упорядоченным кортежем матриц:

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n_B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_A1} & \dots & a_{n_An_B} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n_B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_A1} & \dots & b_{n_An_B} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n_B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n_A1} & \dots & c_{n_An_B} \end{pmatrix}\right),$$

где a_{ij}, b_{ij}, $i = \overline{1,\, n_A}$, $j = \overline{1,\, n_B}$ — количество операций, которые осталось выполнить i-м членам экипажа стороны A при взаимодействии с j-м участником стороны B; c_{ij}, $i = \overline{1,\, n_A}$, $j = \overline{1,\, n_B}$ — количество операций, которые осталось выполнить j-му участнику стороны B при взаимодействии с i-м членом экипажа стороны A.

Множество состояний системы, на котором развивается рассматриваемый процесс, имеет вид

$$\begin{gathered}
\mathbf{X} = \Big\{(a_{ij}), (b_{ij}), (c_{ij}) \mid a_{ij} = \overline{-1,\, 2},\ b_{ij} = \overline{-1,\, 2},\ c_{ij} = \overline{-1,\, 2}, \\
i = \overline{1,\, n_A}, \quad j = \overline{1,\, n_B}; \\
\big((a_{lk} = 1) \Rightarrow (b_{lk} \neq 1)\big) \wedge \big((b_{lk} = 1) \Rightarrow (a_{lk} \neq -1)\big) \wedge \\
\wedge \big((a_{lk} \neq 1) \Rightarrow (b_{lk} \neq -1)\big) \wedge \big((b_{lk} \neq 1) \Rightarrow (a_{lk} \neq -1)\big) \wedge \\
\wedge \big((a_{lk} = \pm 1) \vee (a_{lg} = \pm 1) \Rightarrow (a_{sk} = 0 \vee b_{sk} = 0) \vee (a_{sg} = 0 \vee b_{sg} = 0)\big) \wedge \\
\wedge \big((b_{lk} = \pm 1) \vee (b_{lg} = \pm 1) \Rightarrow (a_{sk} = 0 \vee b_{sk} = 0) \vee (a_{sg} = 0 \vee b_{sg} = 0)\big) \wedge \\
\wedge \Big((a_{lk} = 0) \Rightarrow \big((a_{sk} \neq 0) \wedge (b_{qk} \neq 0)\big)\Big) \wedge \\
\wedge \Big((b_{lk} = 0) \Rightarrow \big((a_{qk} \neq 0) \wedge (b_{sk} \neq 0)\big)\Big) \wedge \\
\wedge \Big((c_{kl} = 0) \Rightarrow \big((a_{lk} \neq 0) \wedge (b_{lk} \neq 0)\big)\Big) \wedge \\
\wedge \left(\left(\sum_{k=1}^{n_B} f\left(\prod_{l=1}^{n_A} \min(|a_{lk}|, |b_{lk}|)\right) + \sum_{l=1}^{n_A} f\left(\prod_{k=1}^{n_B} \min(c_{kl})\right)\right) < n\right), \\
f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0; \end{cases} \\
l = \overline{1,\, n_A},\ \ k = \overline{1,\, n_A},\ \ s = \overline{1,\, n_A}, s \neq l,\ \ q = \overline{1,\, n_A}, \\
g = \overline{1,\, n_B},\ \ g \neq k,\ \ r = \overline{1,\, n_B},\ \ n = n_A + n_B\Big\}.
\end{gathered}$$

Множество состояний системы $\mathbf{X}$ является дизъюнктивным объединением двух подмножеств: подмножества невозвратных состояний системы $\mathbf{X_N}$ и подмножества поглощающих состояний системы $\mathbf{X_P}$, т. е.:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X_P} \cup \mathbf{X_N},$$

где $\mathbf{X_N} = \mathbf{X} \setminus \mathbf{X_P}$,

$$\mathbf{X_P} = \left\{ \begin{array}{c} ((a_{ij}), (b_{ij}), (c_{ji})) | \Big(((a_{ij}), (b_{ij}), (c_{ji})) \in \mathbf{X} \Big) \wedge \\ \wedge \left(\begin{array}{c} \left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n_B} f \left(\prod\limits_{l=1}^{n_A} \min(|a_{lk}|, |b_{lk}|) \right) \right) = n_B \right) \vee \\ \vee \left(\left(\sum\limits_{l=1}^{n_A} f \left(\prod\limits_{k=1}^{n_B} \min(|c_{kl}|) \right) \right) = n_A \right) \end{array} \right) \end{array} \right\}.$$

Кроме того, множество $\mathbf{X}$ можно также разбить на дизъюнктивные подмножества $\mathbf{X}_\gamma$, $\gamma = \overline{\alpha, \beta}$, включив в подмножество $\mathbf{X}_\gamma$ все элементы из множества $\mathbf{X}$, для которых выполняется следующее равенство:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{j=1}^{n_B} (|a_{ij}| + |b_{ij}| + |c_{ji}|).$$

На множестве $\mathbf{X}$ можно задать отношение порядка $\mathbf{R}$, если поставить во взаимно однозначное соответствие каждому элементу из $\mathbf{X}$ порядковый номер из множества натуральных чисел $\mathbf{N}$, используя следующую систему иерархических правил.

Правило 1. Порядковые номера элементов подмножества $\mathbf{X_N}$ меньше порядковых номеров элементов подмножества $\mathbf{X_P}$.

Правило 2. Пусть $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — два элемента множества $\mathbf{X_N}$, первый из которых принадлежит также дизъюнктивному подмножеству $\mathbf{X}_\vartheta \in \{\mathbf{X}_\gamma\}$, а второй — дизъюнктивному подмножеству $\mathbf{X}_\theta \in \{\mathbf{X}_\gamma\}$, $\alpha \leqslant \theta < \vartheta \leqslant \beta$, тогда порядковый номер элемента $\mathbf{x}_1$ будет меньше порядкового номера элемента $\mathbf{x}_2$.

Правило 3. Пусть $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — два элемента множества $\mathbf{X_N}$, принадлежащих также одному из дизъюнктивных подмножеств $\mathbf{X}_\gamma$:

$$\mathbf{x}_1 = \left(\left(a_{ij}^{(1)} \right), \left(b_{ij}^{(1)} \right), \left(c_{ji}^{(1)} \right) \right); \quad \mathbf{x}_2 = \left(\left(a_{ij}^{(2)} \right), \left(b_{ij}^{(2)} \right), \left(c_{ji}^{(2)} \right) \right).$$

Тогда порядковый номер элемента $\mathbf{x}_1$ будет меньше порядкового номера элемента $\mathbf{x}_2$, если первая ненулевая координата вектора

$$\left(\left(a_{11}^{(1)} - a_{11}^{(2)} \right), \left(a_{12}^{(1)} - a_{12}^{(2)} \right), \ldots, \left(c_{n_B n_A}^{(1)} - c_{n_B n_A}^{(2)} \right) \right)$$

положительна, и наоборот, если она отрицательна.

Правило 4. Пусть $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — два элемента множества $\mathbf{X_P}$, первый из которых принадлежит также дизъюнктивному подмножеству

$\mathbf{X}_\vartheta \in \{\mathbf{X}_\gamma\}$, а второй — дизъюнктивному подмножеству $\mathbf{X}_\theta \in \{\mathbf{X}_\gamma\}$, $\alpha \leqslant \theta < \vartheta \leqslant \beta$, тогда порядковый номер элемента $\mathbf{x}_1$ будет меньше порядкового номера элемента $\mathbf{x}_2$.

Правило 5. Пусть $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — два элемента множества $\mathbf{X}_\mathbf{P}$, принадлежащих также одному из дизъюнктивных подмножеств $\mathbf{X}_\gamma$:

$$\mathbf{x}_1 = \left(\left(a_{ij}^{(1)}\right), \left(b_{ij}^{(1)}\right), \left(c_{ji}^{(1)}\right)\right); \quad \mathbf{x}_2 = \left(\left(a_{ij}^{(2)}\right), \left(b_{ij}^{(2)}\right), \left(c_{ji}^{(2)}\right)\right).$$

Тогда порядковый номер элемента $\mathbf{x}_1$ будет меньше порядкового номера элемента $\mathbf{x}_2$, если первая ненулевая координата вектора

$$\left(\left(a_{11}^{(1)} - a_{11}^{(2)}\right), \left(a_{12}^{(1)} - a_{12}^{(2)}\right), \ldots, \left(c_{n_B n_A}^{(1)} - c_{n_B n_A}^{(2)}\right)\right)$$

положительна, и наоборот, если она отрицательна.

Правило 1 имеет приоритет перед правилами 2 и 4, правило 2 — перед правилом 3, правило 4 — перед правилом 5. В результате их применения множество $\mathbf{X}$ может рассматриваться как вполне упорядоченное множество $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_n \mid n = \overline{1, n_{max}}\}$.

Определение. Пусть процесс находится в одном из состояний системы

$$\mathbf{x}_n = \left(\left(a_{ij}^{(x_n)}\right), \left(b_{ij}^{(x_n)}\right), \left(c_{ji}^{(x_n)}\right)\right).$$

Первым флагом состояния системы $\mathbf{x}_n$ будем называть упорядоченную последовательность матриц

$$\mathbf{F} = \left(\left(f_{ij}^{(1)}\right), \left(f_{ij}^{(2)}\right), \left(f_{ji}^{(3)}\right)\right),$$

где при $\mathbf{x}_n \in \mathbf{X}_\mathbf{N}$

$$f_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \left(\left(a_{ij}^{(x_n)}\right) - e_{ij}, \left(b_{ij}^{(x_n)}\right), \left(c_{ji}^{(x_n)}\right)\right) \in X_{\gamma-1}; \\ 0, & \text{если } \left(\left(a_{ij}^{(x_n)}\right) - e_{ij}, \left(b_{ij}^{(x_n)}\right), \left(c_{ji}^{(x_n)}\right)\right) \notin X_{\gamma-1}, \end{cases}$$

$$f_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \left(\left(a_{ij}^{(x_n)}\right), \left(b_{ij}^{(x_n)}\right) - e_{ij}, \left(c_{ji}^{(x_n)}\right)\right) \in X_{\gamma-1}; \\ 0, & \text{если } \left(\left(a_{ij}^{(x_n)}\right), \left(b_{ij}^{(x_n)}\right) - e_{ij}, \left(c_{ji}^{(x_n)}\right)\right) \notin X_{\gamma-1}, \end{cases}$$

$$f_{ji}^{(3)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \left(\left(a_{ij}^{(x_n)}\right), \left(b_{ij}^{(x_n)}\right), \left(c_{ji}^{(x_n)}\right) - e_{ij}\right) \in X_{\gamma-1}; \\ 0, & \text{если } \left(\left(a_{ij}^{(x_n)}\right), \left(b_{ij}^{(x_n)}\right), \left(c_{ji}^{(x_n)}\right) - e_{ij}\right) \notin X_{\gamma-1}. \end{cases}$$

Здесь e_{ij} — матрица размерности $n_A \times n_C$, у которой элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен 1, а остальные элементы равны 0; e_{ij} — матрица размерности $n_C \times n_A$, у которой элемент, стоящий на пересечении j-й строки и i-го столбца, равен 1, а остальные элементы равны 0.

При $\mathbf{x}_n \in \mathbf{X_P}$

$$f_{ij}^{(1)} = f_{ij}^{(2)} = 0, f_{ji}^{(3)} = 0.$$

Используя первый флаг произвольного состояния $\mathbf{x}_n$, можно из множества состояний системы $\mathbf{X}$ выделить те состояния, в которых возможен непосредственный переход процесса из текущего состояния $\mathbf{x}_n$. Обозначим это множество состояний символом $\mathbf{X_F}_n$. Основываясь на правилах, каждому из состояний этого множества присвоим порядковый номер. Учитывая, что общее число таких состояний

$$\mu_{Fn} = \sum_{i=1}^{n_A} \left(\sum_{j=1}^{n_B} \left(f_{ij}^{(1)} + f_{ij}^{(2)} \right) \right) + \sum_{j=1}^{n_B} \left(\sum_{i=1}^{n_A} \left(f_{ji}^{(3)} \right) \right),$$

присвоим состояниям множества $\mathbf{X_F}_n$ следующие порядковые номера: $1, 2, \ldots, \mu_{Fn}$.

Определение. Пусть процесс находится в одном из состояний системы

$$\mathbf{x}_n = \left(\left(a_{ij}^{(x_n)} \right), \left(b_{ij}^{(x_n)} \right), \left(c_{ji}^{(x_n)} \right) \right).$$

Вторым флагом состояния системы $\mathbf{x}_n$ будем называть упорядоченную последовательность матриц

$$\Delta = \left(\left(\delta_{ij}^{(1)} \right), \left(\delta_{ij}^{(2)} \right), \left(\delta_{ji}^{(3)} \right) \right),$$

где при $n > 1$

$$\delta_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \left(\left(a_{ij}^{(x_n)} \right) + e_{ij}, \left(b_{ij}^{(x_n)} \right), \left(c_{ji}^{(x_n)} \right) \right) \in X_{\gamma+1}; \\ 0, & \text{если } \left(\left(a_{ij}^{(x_n)} \right) + e_{ij}, \left(b_{ij}^{(x_n)} \right), \left(c_{ji}^{(x_n)} \right) \right) \notin X_{\gamma+1}, \end{cases}$$

$$\delta_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \left(\left(a_{ij}^{(x_n)} \right), \left(b_{ij}^{(x_n)} \right) + e_{ij}, \left(c_{ji}^{(x_n)} \right) \right) \in X_{\gamma+1}; \\ 0, & \text{если } \left(\left(a_{ij}^{(x_n)} \right), \left(b_{ij}^{(x_n)} \right) + e_{ij}, \left(c_{ji}^{(x_n)} \right) \right) \notin X_{\gamma+1}, \end{cases}$$

$$\delta_{ji}^{(3)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \left(\left(a_{ij}^{(x_n)} \right), \left(b_{ij}^{(x_n)} \right), \left(c_{ji}^{(x_n)} \right) + e_{ij} \right) \in X_{\gamma+1}; \\ 0, & \text{если } \left(\left(a_{ij}^{(x_n)} \right), \left(b_{ij}^{(x_n)} \right), \left(c_{ji}^{(x_n)} \right) + e_{ij} \right) \notin X_{\gamma+1}, \end{cases}$$

при $n = 1$

$$\delta_{ij}^{(1)} = \delta_{ij}^{(2)} = 0; \quad \delta_{ji}^{(3)} = 0.$$

Используя второй флаг произвольного состояния $\mathbf{x}_n$, из множества состояний системы $\mathbf{X}$ выделим те состояния, из которых возможен непосредственный переход процесса в текущее состояние $\mathbf{x}_n$. Обозначим это множество состояний символом $\mathbf{X}_{\Delta n}$. Основываясь на правилах 1 – 5, каждому из состояний этого множества присвоим порядковый номер. Учитывая, что общее число таких состояний

$$\mu_{\Delta n} = \sum_{i=1}^{n_A} \left(\sum_{j=1}^{n_B} \left(\delta_{ij}^{(1)} + \delta_{ij}^{(2)} \right) \right) + \sum_{j=1}^{n_B} \left(\sum_{i=1}^{n_A} \left(\delta_{ji}^{(3)} \right) \right),$$

присвоим состояниям множества $\mathbf{X}_{\Delta n}$ следующие порядковые номера: $1, 2, \ldots, \mu_{\Delta n}$.

Рассмотренные алгоритмы применимы к любому текущему состоянию процесса $\mathbf{x}_n$ из множества $\mathbf{X}$ вне зависимости от его порядкового номера. Следовательно, они применимы и к состояниям из подмножеств $\mathbf{X}_\gamma$. Одна из особенностей модели состоит в том, что общее количество состояний $\mathbf{x}_{n_{max}}$ весьма велико. Например, в простейшем случае, когда $n_A = 1$ и $n_B = 1$, общее количество состояний системы равно 65. Однако при использовании упорядоченности множеств и флагов состояний значительно уменьшается число перебираемых состояний, что позволяет рассматривать процесс на выделенных траекториях и проводить численные эксперименты.

Заключение. Таким образом, изложенный подход к моделированию многоступенчатых процессов, в основе которого лежит последовательное выполнение операций по схеме марковского или полумарковского процессов, дает возможность минимизировать число рассматриваемых состояний процесса, что приводит к уменьшению просчитываемых вариантов и возможности проведения расчетов на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] ИТАР-ТАСС: ПОЛИТИКА. *Минобороны РФ с 1 июня увеличит интенсивность боевой подготовки*. http://www.itar-tass.com (дата обращения 30 мая 2013).

[2] Вентцель Е.С. *Исследование операций: задачи, принципы, методология*. Москва, 1988, 208 с.

[3] Вентцель Е.С. *Введение в исследование операций*. Москва, Советское радио, 1964, 390 с.

Статья поступила в редакцию 20.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сердюков В.И., Шишкина С.И. Использование дизъюнктивных множеств при моделировании многоступенчатых процессов. *Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 8*.
URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/892.html

Сердюков Владимир Иванович — д-р техн. наук, проф. кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: wis24@yandex.ru

Шишкина Светлана Ивановна — канд. техн. наук, ст. преп. кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: shish-bmstu@mail.ru