

**Теплопроводность однонаправленного волокнистого композита**

© Г.Н. Кувыркин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Построена математическая модель переноса тепловой энергии в волокнистом композите, учитывающая наличие в матрице пор в виде удлиненных полостей между волокнами. Получены расчетные зависимости для эффективных коэффициентов теплопроводности матрицы после отверждения связующего и волокнистого композита с такой матрицей. Представлены формулы для двусторонних оценок и предельных значений возможной погрешности вычислений. Проведен параметрический анализ этих зависимостей и формул. Сравнение расчетных результатов с известными экспериментальными данными выявило необходимость уточнения математической модели в случае большого различия коэффициентов теплопроводности матрицы и волокон.*

**Ключевые слова:** *однонаправленный волокнистый композит, анизотропное волокно, тензор эффективной теплопроводности.*

**Введение.** Волокнистые композиты являются достаточно широко применяемым современным конструкционным материалом [1, 2]. В большинстве случаев технологический процесс получения волокнистого композита как конструкционного материала совмещен по времени с изготовлением конструкции из этого материала [3, 4]. Среди волокнистых композитов большую группу составляют однонаправленные композиты. По структуре однонаправленный волокнистый композит представляет собой совокупность одинаково ориентированных в пространстве волокон, расположенных в отвержденном связующем, которое образует матрицу композита. При пропитке связующим волокон и его последующем отверждении возможно возникновение пор [1] (в частности в виде тонких удлиненных щелей, расположенных вдоль волокон [5]).

Для теплонапряженных конструкций, подверженных интенсивным механическим и тепловым воздействиям, наряду с механическими характеристиками важную роль играют и теплофизические свойства конструкционного материала (в том числе его теплопроводность). Однонаправленный волокнистый композит по отношению к свойству теплопроводности является анизотропным материалом, характеризуемым тензором второго ранга эффективной теплопроводности. Компоненты этого тензора зависят от ряда параметров, которые входят в математическую модель процесса переноса тепловой энергии в рассматриваемом композите.

**Расчетные зависимости.** Однонаправленный волокнистый композит примем состоящим из совокупности параллельно расположенных волокон, достаточно длинных по сравнению с их радиусом, и матрицы, содержащей параллельные волокнам поры в виде длинных тонких щелей. Размеры пор в поперечном направлении будем считать настолько малыми (порядка долей миллиметра), что допустимо пренебречь переносом тепловой энергии в их полости [6], т. е. коэффициент теплопроводности пор можно положить равным нулю.

Обозначим через  $C_V$  объемную концентрацию волокон в композите. Волокна будем считать трансверсально изотропными [7] относительно их продольной оси. Коэффициент теплопроводности волокон поперек этой оси обозначим через  $\lambda_1$ , а вдоль ее — через  $\lambda_3$ . Примем, что связующее после отверждения станет изотропным и будет иметь коэффициент теплопроводности  $\lambda_m$ , но матрица композита вследствие наличия щелевых пор будет анизотропной. Поэтому на первом этапе построения математической модели переноса тепловой энергии в рассматриваемом композите необходимо найти главные значения тензора эффективной теплопроводности матрицы.

Щелевую пору можно рассматривать как сильно удлинённый эллипсоид с нулевым коэффициентом теплопроводности. Для композита с одинаково ориентированными нетеплопроводными включениями такой формы получено соотношение для главных значений  $\lambda_\alpha^\circ$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) тензора эффективной теплопроводности в виде [8]

$$\lambda_\alpha^\circ = \lambda_m \frac{(1 - C_0)(1 - D_\alpha^\circ)}{1 - (1 - C_0)D_\alpha^\circ}. \quad (1)$$

Здесь  $C_0$  — объемная концентрация включений, в данном случае равная объемной концентрации щелевых пор в матрице композита;

$$D_\alpha^\circ = \frac{b_1 b_2 b_3}{2} \int_0^\infty \frac{du}{(b_\alpha^2 + u)f(u)} \quad (2)$$

( $b_\alpha$  — полуоси эллипсоида;  $f(u) = \sqrt{(b_1^2 + u)(b_2^2 + u)(b_3^2 + u)}$ , причем  $D_1^\circ + D_2^\circ + D_3^\circ = 1$ ).

Пусть  $b_3$  — наибольшая полуось эллипсоида в направлении расположения волокон. Если в первом приближении принять поперечное сечение щелевой поры круглым, т. е.  $b_1 = b_2 < b_3$ , то интегралы в формуле (2) можно выразить через элементарные функции [9]

$$D_1^\circ = D_2^\circ = \frac{1}{2(1 - \bar{b}^2)} - \frac{\bar{b}^2}{2\sqrt{(1 - \bar{b}^2)^3}} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \bar{b}^2}}{\bar{b}} \right), \quad D_3^\circ = 1 - 2D_1^\circ, \quad (3)$$

где  $\bar{b} = b_1/b_3 < 1$ . Для достаточно длинных и узких щелевых пор  $\bar{b} \ll 1$ . Поэтому, пренебрегая величиной  $\bar{b}^2$  по сравнению с единицей, вместо формул (3) можно записать [10, 11]

$$\bar{D}_1^\circ = \bar{D}_2^\circ = \frac{1 - \bar{b}^2 \ln(2/\bar{b})}{2}, \quad \bar{D}_3^\circ = 1 - 2D_1^\circ. \quad (4)$$

Согласно равенствам (1), при  $D_1^\circ = D_2^\circ$  матрица будет обладать свойством трансверсальной изотропии относительно оси, параллельной волокнам, а главными значениями тензора эффективной теплопроводности матрицы будут  $\lambda_1^\circ = \lambda_2^\circ$  и  $\lambda_3^\circ$ . В пределе при  $\bar{b} \rightarrow 0$  из соотношений (4) получим  $\bar{D}_1^\circ = \bar{D}_2^\circ = 1/2$  и  $\bar{D}_3^\circ = 0$ . В этом случае равенства (1) примут вид

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1^\circ}{\lambda_m} = \frac{\lambda_2^\circ}{\lambda_m} = \frac{1 - C_0}{1 + C_0}, \quad \hat{\lambda}_3 = \frac{\lambda_3^\circ}{\lambda_m} = 1 - C_0, \quad (5)$$

Теперь можно перейти к нахождению главных значений  $\lambda_1^* = \lambda_2^*$  и  $\lambda_3^*$  тензора эффективной теплопроводности однонаправленного волокнистого композита в целом, также обладающего свойством трансверсальной изотропии относительно оси, параллельной волокнам, поскольку и матрица, и волокна обладают этим свойством. В случае волокон, достаточно длинных по сравнению с их радиусом  $r_0$ , достоверной оценкой коэффициента теплопроводности композита в направлении расположения волокон будет определяемое по правилу смеси [12] значение

$$\lambda_3^* = \lambda_3^\circ(1 - C_V) + \lambda_3 C_V. \quad (6)$$

Для оценки значения  $\lambda_1^*$  построим математическую модель процесса переноса тепловой энергии в композите применительно к представительному элементу его структуры в виде достаточно протяженной в направлении расположения волокон цилиндрической составной частицы. Поперечное сечение этой частицы включает соответствующий волокну круг радиусом  $r_0$ , окруженный кольцевым слоем матрицы с внешним радиусом  $r_m$ , причем  $(r_m/r_0)^2 = 1/C_V$ . Составная частица в тепловом отношении взаимодействует с неограниченным массивом однородного материала. Таким образом, модель структуры композита содержит три фазы: волокно, слой матрицы и неограниченный массив однородного материала. Перенос тепловой энергии будем рассматривать лишь в плоскости поперечного сечения составной частицы. Поэтому примем для волокна коэффициент теплопроводности  $\lambda_1$ , для слоя матрицы —  $\lambda_1^\circ$ , а для однородного материала — искомую величину  $\lambda_1^*$ .

Центр поперечного сечения составной частицы поместим в начале полярной системы координат, обозначив через  $r$  и  $\varphi$  радиальную и угловую координаты соответственно. Примем, что на большом расстоянии  $r \gg r_m$  от начала координат задан вектор градиента температурного поля в однородном материале, направленный по оси, от которой

происходит отсчет угловой координаты, т. е. при  $r \rightarrow \infty$  установившееся распределение температуры в этом материале описывает функция  $T_\infty(r, \varphi) = Gr \cos \varphi$ , где  $G$  — модуль вектора градиента. Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в полярных координатах имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (7)$$

По мере приближения к составной частице температурное поле в однородном материале претерпевает возмущение, описываемое также удовлетворяющим уравнению (7) слагаемым  $\Delta T(r, \varphi) = (B^*/r) \cos \varphi$ , где  $B^*$  — подлежащий определению постоянный коэффициент. Таким образом, температурное поле в однородном материале, удовлетворяющее заданному условию при  $r \rightarrow \infty$  и уравнению (7), определяет функция

$$T^*(r, \varphi) = T_\infty(r, \varphi) + \Delta T(r, \varphi) = \left( Gr + \frac{B^*}{r} \right) \cos \varphi. \quad (8)$$

Аналогичные зависимости описывают распределения температуры в волокне

$$T(r, \varphi) = \left( Ar + \frac{B}{r} \right) \cos \varphi, \quad (9)$$

и в слое матрицы

$$T_m(r, \varphi) = \left( A_m r + \frac{B_m}{r} \right) \cos \varphi. \quad (10)$$

В соотношении (9) коэффициент  $B \equiv 0$  в силу ограниченности температуры в центре волокна. Таким образом, в равенства (8)–(10) входят четыре неизвестных коэффициента  $B^*$ ,  $A$ ,  $A_m$  и  $B_m$ , которые следует найти из граничных условий на цилиндрических поверхностях радиусами  $r_0$  и  $r_m$ , предполагая тепловой контакт на этих поверхностях идеальным.

При  $r = r_0$  из условий непрерывности распределения температуры и радиальной составляющей вектора плотности теплового потока получим

$$T(r_0, \varphi) = T_m(r_0, \varphi) \quad \text{и} \quad \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \lambda_1^o \frac{\partial T_m}{\partial r} \Big|_{r=r_0}.$$

Отсюда с использованием равенств (9) и (10) при  $B = 0$  находим

$$A = A_m + \frac{B_m}{r_0^2} \quad \text{и} \quad A = \frac{\lambda_1^o}{\lambda_1} \left( A_m - \frac{B_m}{r_0^2} \right). \quad (11)$$

Из аналогичных условий при  $r = r_m$  с учетом формул (8) и (10) следует

$$A_m + \frac{B_m}{r_m^2} = G + \frac{B^*}{r_m^2} \quad \text{и} \quad A_m - \frac{B_m}{r_m^2} = \frac{\lambda_1^*}{\lambda_1^o} \left( G - \frac{B^*}{r_m^2} \right). \quad (12)$$

Последовательным исключением неизвестных из равенств (11) и (12) находим

$$\frac{B^*}{Gr_m^2} = \frac{(\lambda_1^*/\lambda_1^\circ - 1)(\lambda_1^\circ/\lambda_1 + 1) - (1 + \lambda_1^*/\lambda_1^\circ)(1 - \lambda_1^\circ/\lambda_1)C_V}{(\lambda_1^*/\lambda_1^\circ + 1)(\lambda_1^\circ/\lambda_1 + 1) + (1 - \lambda_1^*/\lambda_1^\circ)(1 - \lambda_1^\circ/\lambda_1)C_V}. \quad (13)$$

Замена составной частицы равновеликим цилиндром с внешним радиусом  $r_m$  и искомым коэффициентом теплопроводности  $\lambda_1^*$  приведет к исчезновению возмущения температурного поля в окружающем ее однородном материале с тем же значением  $\lambda_1^*$ . Тогда в равенстве (8) следует положить  $\Delta T(r, \varphi) = 0$ , что равносильно условию  $B^* = 0$ , которое с учетом формулы (13) приводит к соотношению

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1^*}{\lambda_1} = \bar{\lambda}_1 \frac{2 - (1 - \bar{\lambda}_1)(1 - C_V)}{2 - (1 - \bar{\lambda}_1)(1 + C_V)}, \quad (14)$$

где  $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1^\circ/\lambda_1$ .

**Двусторонние оценки.** Двойственная вариационная формулировка задачи стационарной теплопроводности в неоднородном теле [13, 14], содержащая два альтернативных функционала, достигающих на истинном решении задачи совпадающих значений минимума и максимума, позволяет построить двусторонние оценки значений  $\lambda_1^*$  и  $\lambda_3^*$ . Методика построения таких оценок подробно изложена в монографии [15]. Если для минимизируемого и максимизируемого функционалов принять в качестве допустимых однородные распределения соответственно температуры и плотности теплового потока, то для эффективного коэффициента теплопроводности композита в направлении, перпендикулярном расположению волокон, следуют оценки

$$\lambda^+_{1} = \lambda_1 C_V + \lambda_1^\circ(1 - C_V) \geq \lambda_1^* \geq \frac{1}{C_V/\lambda_1 + (1 - C_V)/\lambda_1^\circ} = \lambda^-_{1}, \quad (15)$$

а для эффективного коэффициента теплопроводности композита в направлении расположения волокон — оценки

$$\lambda^+_{3} = \lambda_3 C_V + \lambda_3^\circ(1 - C_V) \geq \lambda_3^* \geq \frac{1}{C_V/\lambda_3 + (1 - C_V)/\lambda_3^\circ} = \lambda^-_{3}. \quad (16)$$

Отметим, что верхняя оценка  $\lambda^+_{3}$  совпадает со значением  $\lambda_3^*$ , определяемым формулой (6). Цепочки неравенств (15) и (16) переходят в равенства при  $C_V = 0$  и  $C_V = 1$ , а также при  $\lambda_1^\circ = \lambda_1$  и  $\lambda_3^\circ = \lambda_3$ .

Убедимся, что значение  $\lambda_1^*$ , определяемое формулой (14), удовлетворяет соотношению (15). Для этого приведем это соотношение к безразмерному виду и подставим в него формулу (14). В результате получим

$$C_V + \bar{\lambda}_1(1 - C_V) \geq \bar{\lambda}_1 \frac{1 + C_V + \bar{\lambda}_1(1 - C_V)}{1 - C_V + \bar{\lambda}_1(1 + C_V)} \geq \frac{\bar{\lambda}_1}{1 - C_V + \bar{\lambda}_1 C_V}. \quad (17)$$

Знаменатель дроби в средней части цепочки неравенств (17) положителен. Поэтому после умножения левой части цепочки на этот знаменатель найдем

$$C_V(1 - C_V) + \bar{\lambda}_1(1 - C_V)^2 + \bar{\lambda}_1 C_V(1 + C_V) + \bar{\lambda}_1^2(1 - C_V^2) \geq \\ \geq \bar{\lambda}_1(1 + C_V) + \bar{\lambda}_1^2(1 - C_V),$$

или эквивалентное неравенство  $(1 - \bar{\lambda}_1)^2 C_V(1 - C_V) \geq 0$ . Знаменатель правой части цепочки неравенств (17) также положителен, что после умножения средней части цепочки на этот знаменатель и умножения правой части на положительный знаменатель дроби в соотношении (17) позволяет записать

$$\bar{\lambda}_1(1 - C_V + \bar{\lambda}_1 C_V)(1 + C_V + \bar{\lambda}_1(1 - C_V)) \geq \bar{\lambda}_1(1 - C_V + \bar{\lambda}_1(1 + C_V)).$$

Это неравенство эквивалентно неравенству  $\bar{\lambda}_1(1 - \bar{\lambda}_1)^2 C_V(1 - C_V) \geq 0$ .

**Параметрический анализ.** Прежде всего проведем сравнение значений параметров  $D_\alpha^\circ$ , определяемых при ожидаемых значениях  $\bar{b}$  соотношениями (3) и (4). На рис. 1 в полулогарифмических координатах представлены зависимости параметров  $D_1^\circ$  и  $\bar{D}_1^\circ$  от значения  $\bar{b}$ , определяемые первыми формулами (3) и (4) соответственно.

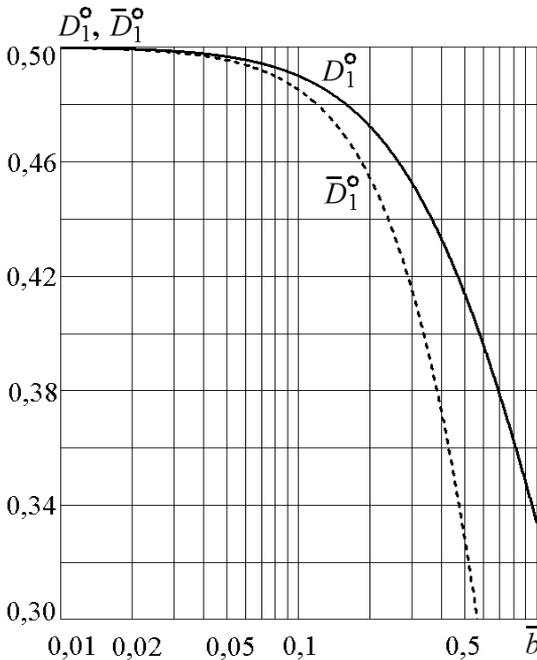


Рис. 1. Зависимости параметров  $D_1^\circ$  и  $\bar{D}_1^\circ$  от значения  $\bar{b}$

Ясно, что уже при  $\bar{b} < 0,1$  различие пренебрежимо мало. При  $\bar{b} < 0,01$  с точностью 0,0003 из обеих формул следует  $D_1^\circ = \bar{D}_1^\circ = 1/2$ . Таким образом, использование предельных значений  $\bar{D}_\alpha^\circ$  обеспечивает достаточную точность для практических приложений.

При пропитке волокон связующим и его последующем отверждении концентрация пор в матрице композита может достигать значений  $C_0 \approx 0,2 \dots 0,25$  [1]. На рис. 2 представлены зависимости параметров  $\hat{\lambda}_1$  и  $\hat{\lambda}_3$  от объемной концентрации  $C_0$ , рассчитанные по формулам (5). Из рисунка следует, что влияние пористости матрицы на ее теплопроводность более существенно в направлении, перпендикулярном волокнам.

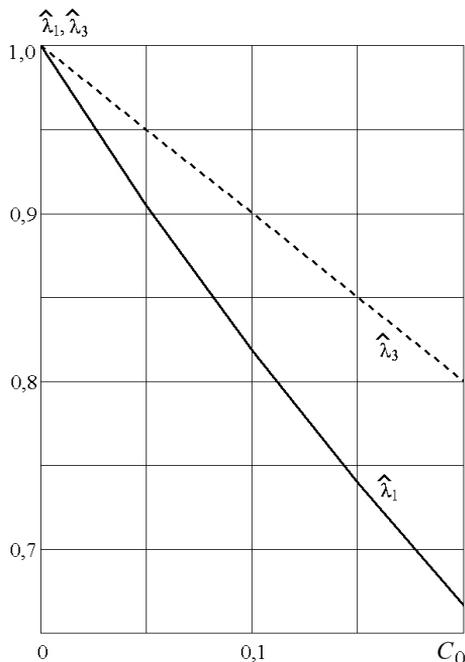


Рис. 2. Зависимости параметров  $\hat{\lambda}_1$  и  $\hat{\lambda}_3$  от объемной концентрации включений  $C_0$

Согласно (6), величина  $\lambda_3^*$  линейно зависит от объемной концентрации  $C_V$  волокон в композите, изменяясь между значениями  $\lambda_3^o$  и  $\lambda_3$ . Найдем наибольшую возможную погрешность этой формулы по отношению к среднему значению  $\bar{\lambda}_3^* = (\lambda_3^+ + \lambda_3^-)/2$  верхней и нижней оценок, определяемых соотношением (16). Для предельной относительной погрешности получим

$$\eta_3 = \frac{\lambda_3^*}{\bar{\lambda}_3^*} - 1 = 1 - \frac{2}{C_V^2 + (1 - C_V)^2 + C_V(1 - C_V)(\bar{\lambda}_3 + 1/\bar{\lambda}_3) + 1}, \quad (18)$$

где  $\bar{\lambda}_3 = \lambda_3^o/\lambda_3$ . Отметим, что  $\eta_3 = 0$  при  $C_V = 0$  и  $C_V = 1$ , а также при  $\lambda_3^o = \lambda_3$ . Приравняв нулю производную  $\partial\eta_3/\partial C_V$ , найдем значение  $C_V^* = 1/2$ , при котором предельная относительная погрешность достигает максимума:

$$\eta_3^* = 1 - \frac{8}{6 + \bar{\lambda}_3 + 1/\bar{\lambda}_3}. \quad (19)$$

По формуле (19) на рис. 3 в полулогарифмических координатах построена зависимость величины  $\eta_3^*$  от параметра  $\bar{\lambda}_3$ . Ясно, что  $\eta_3^* > 0,5$  уже при  $\bar{\lambda}_3 > 10$  и  $\bar{\lambda}_3 < 0,1$ .

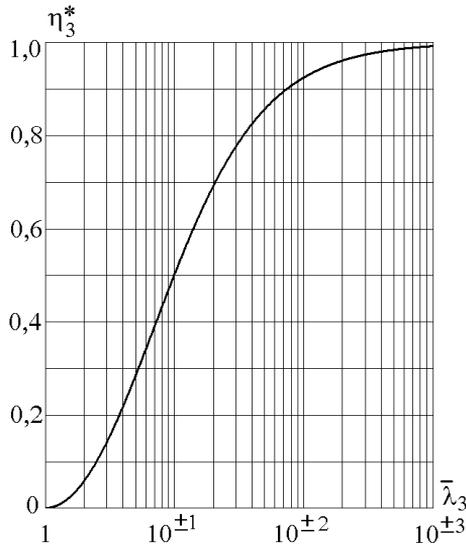
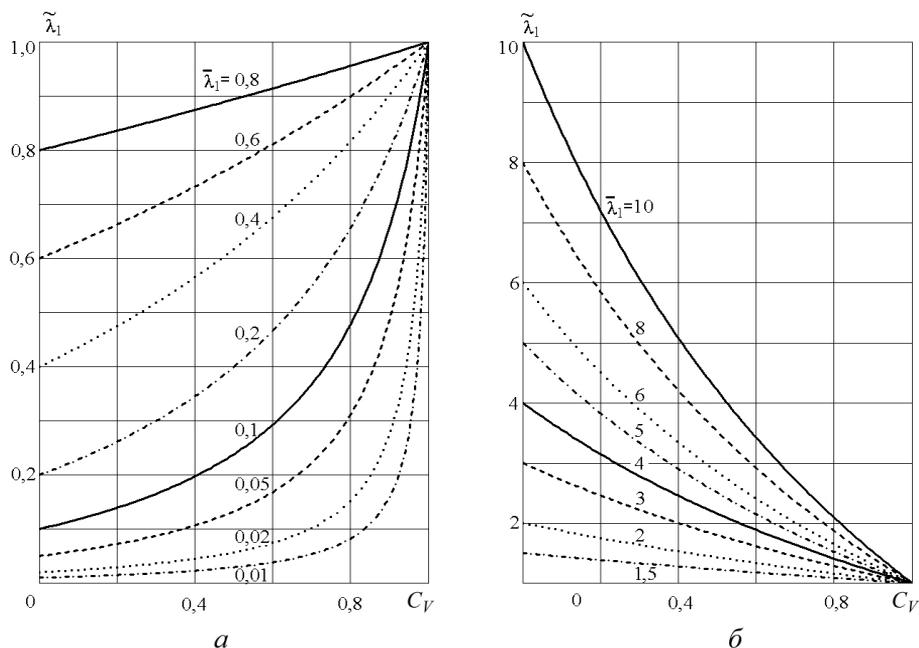


Рис. 3. Зависимость максимального значения  $\eta_3^*$  от параметра  $\bar{\lambda}_3$

Структура соотношений (15) и (16) идентична. Поэтому формула для относительной погрешности  $\eta_1 = \lambda_1^*/\bar{\lambda}_1^* - 1$ , где  $\bar{\lambda}_1^* = (\lambda_1^+ + \lambda_1^-)/2$ , также идентична формуле для  $\eta_3$ , а зависимость максимального значения  $\eta_1^*$  этой погрешности от параметра  $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1^o/\lambda_1$  совпадает с зависимостью величины  $\eta_3^*$  от параметра  $\bar{\lambda}_3$ , представленной на рис. 3.

На рис. 4, а, б по формуле (14) построены зависимости отношения  $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1^*/\lambda_1$  от объемной концентрации волокон  $C_V$  при различных значениях  $\bar{\lambda}_1$ . Ясно, что при наличии в композите связующего значение  $C_V < 1$ . Предельно плотная укладка цилиндрических волокон с круговым поперечным сечением одинакового радиуса соответствует значению  $C_V^* = \pi/(2\sqrt{3}) \approx 0,907$ . Однако оптимальное из условия прочности при растяжении композита в направлении волокон значение  $C_V < C_V^*$  [3].

**Сравнение с экспериментальными данными.** В первом томе справочника [1] приведены характеристики однонаправленного волокнистого композита с эпоксидным связующим и арамидным волокном кевлар-49, в том числе указаны значения 0,35 Вт/(м·К) и 3,22 Вт/(м·К) эффективных коэффициентов теплопроводности в перпендикулярном и параллельном волокнам направлениях соответственно при их объемной концентрации  $C_V = 0,6$ . Там же представлены значения  $\lambda_m = 0,133$  Вт/(м·К) коэффициента теплопроводности связующего после отверждения и значения  $\lambda_1 = 4,110$  Вт/(м·К) и



**Рис. 4.** Зависимость параметра  $\tilde{\lambda}_1$  от объемной концентрации волокон  $C_V$  при значениях  $\bar{\lambda}_1 = 0,01 \dots 0,8$  (а) и  $\bar{\lambda}_1 = 1,5 \dots 10$  (б)

$\lambda_3 = 4,816$  Вт/(м · К) коэффициентов теплопроводности волокна соответственно в поперечном и продольном направлениях. Сведения о возможной пористости отсутствуют, указано лишь, что при отверждении связующего его объемная усадка составляет 4,4 %.

Если принять, что в матрице данного композита поры отсутствуют, т.е. в формуле (5)  $C_0 = 0$  и  $\lambda_1^\circ = \lambda_3^\circ = \lambda_m = 0,133$  Вт/(м · К), то из формулы (6) получим  $\lambda_3^* = 2,943$  Вт/(м · К), а из формулы (14) —  $\lambda_1^* = 0,475$  Вт/(м · К). В работе [16] при использовании указанных выше исходных данных получено такое же значение  $\lambda_3^*$ , а эффективный коэффициент теплопроводности  $\lambda_1^*$  композита в направлении, перпендикулярном расположению волокон, вычислен по формуле, совпадающей с нижней оценкой  $\lambda_1^-$  в соотношении (15), что дало значение 0,317 Вт/(м · К), более близкое к экспериментальному результату по сравнению с вычисленным по формуле (14). Отметим, что при  $\bar{\lambda}_1 = 0,133/4,11 = 0,03236$  и  $C_V = 0,6$  расчет по формуле, идентичной формуле (18), приводит к предельному значению  $\eta_1 = 0,7764$  относительной погрешности. В данном случае погрешность расчета по формуле (14) по отношению к экспериментальному значению 0,35 Вт/(м · К) составила 0,375, а по формуле для нижней оценки  $\lambda_1^- = 0,094$ .

В работе [5] приведены результаты измерения эффективных коэффициентов теплопроводности  $\lambda_1^*$  и  $\lambda_3^*$  однонаправленного волокнистого композита с полимерным связующим, имеющим коэффициент

теплопроводности  $\lambda_m = 0,1$  Вт/(м · К). Композит армирован изотропными углеродными волокнами с коэффициентом теплопроводности  $\lambda = 1260$  Вт/(м · К). Определена объемная пористость  $C_0$  матрицы после отверждения связующего. Полученные результаты представлены ниже:

$C_V$ .....	0,14	0,21	0,28	0,35	0,38	0,46	0,53	0,56
$C_0$ .....	0,041	0,052	0,108	0,103	0,129	0,191	0,236	0,248
$\lambda_1^*$ , Вт/(м · К)...	3,9	5,0	8,3	14,3	21,5	25,0	33,0	36,0
$\lambda_3^*$ , Вт/(м · К)...	198	291	396	490	531	633	663	695

В данном случае отношение  $\lambda/\lambda_m = 12\,600$ , что, согласно рис. 3, соответствует максимальному значению возможной погрешности расчетов, близкой к единице, т. е. к 100%. Тем не менее целесообразно привести результаты расчетов по формулам (5), (6) и (14) с использованием данных для  $C_V$ ,  $C_0$  и значений  $\lambda_m$  и  $\lambda$ , приведенных выше, приняв  $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda$ :

$C_V$ .....	0,14	0,21	0,28	0,35	0,38	0,46	0,53	0,56
$\lambda_1^0$ , Вт/(м · К)...	0,092	0,090	0,081	0,081	0,077	0,068	0,062	0,060
$\lambda_3^0$ , Вт/(м · К)...	0,096	0,095	0,089	0,090	0,087	0,081	0,076	0,075
$\lambda_1^*$ , Вт/(м · К)...	0,122	0,138	0,143	0,169	0,172	0,184	0,201	0,214
$\lambda_3^*$ , Вт/(м · К)...	176	265	353	441	479	580	668	706

Ясно, что согласование измеренных и вычисленных значений  $\lambda_3^*$  можно считать приемлемым, тогда как вычисленные значения  $\lambda_1^*$  существенно меньше измеренных. Такое рассогласование вызывает необходимость построения более точной математической модели переноса тепловой энергии в волокнистом композите в направлении, перпендикулярном расположению волокон, применительно к ситуации, когда существует большое различие коэффициентов теплопроводности матрицы и волокна.

**Заключение.** Полученные на основе построенной математической модели переноса тепловой энергии в однонаправленном волокнистом композите расчетные зависимости позволяют с приемлемой для практических целей оценивать эффективный коэффициент теплопроводности такого композита в направлении расположения волокон. Однако для оценки этого коэффициента в поперечном направлении (особенно в случае большого различия коэффициентов теплопроводности матрицы и волокна, что характерно, например, для композита с полимерной матрицей, армированной углеродными волокнами) требуется построение уточненной модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ–255.2012.8).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Справочник по композиционным материалам*. Любин Дж., ред. Т. 2. Москва, Машиностроение, 1988, 584 с.
- [2] *Композиционные материалы. Справочник*. Васильев В.В., Тарнопольский Ю.М., ред. Москва, Машиностроение, 1990, 512 с.
- [3] Комков М.А., Тарасов В.А. *Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 432 с.
- [4] Калинин В.А., Ягодников Д.А. *Технология производства ракетных двигателей твердого топлива*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 688 с.
- [5] Chen Y.-M., Ting J.-M. Ultra high thermal conductivity polymer composites. *Carbon*, 2002, vol. 40, pp. 359–362.
- [6] Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. *Теплопроводность смесей и композиционных материалов*. Ленинград, Энергия, 1974, 264 с.
- [7] Шермергор Т.Д. *Теория упругости микронеоднородных сред*. Москва, Наука, 1977, 400 с.
- [8] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с эллипсоидальными включениями. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 76–85.
- [9] Эшелби Дж. *Континуальная теория дислокаций*. Москва, Изд-во иностр. лит., 1963, 248 с.
- [10] Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*. Москва, Наука, 1964, 488 с.
- [11] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Теплопроводность композита, армированного волокнами. *Известия вузов. Машиностроение*, 2013, № 5, с. 75–81.
- [12] Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Смесевые модели механики композитов. Ч. 1: Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2009, № 3, с. 36–49.
- [13] Зарубин В.С. *Инженерные методы решения задач теплопроводности*. Москва, Энергоатомиздат, 1983, 328 с.
- [14] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, 512 с.
- [15] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. *Теплопроводность композитов с шаровыми включениями*. Saarbrücken, Deutschland, LAMBERT Academic Publishing, 2013, 77 с.
- [16] Янковский А.П. Численно-аналитическое моделирование процессов теплопроводности в пространственно армированных композитах при интенсивном тепловом воздействии. *Тепловые процессы в технике*, 2011, т. 3, № 11, с. 500–516.

Статья поступила в редакцию 20.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Кувыркин Г.Н. Теплопроводность однонаправленного волокнистого композита. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 8.  
URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/889.html>

Кувыркин Георгий Николаевич — д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: [gnk1914@mail.ru](mailto:gnk1914@mail.ru)