

## Оценка эквивалентного коэффициента теплопроводности при переносе излучения в шаровой полости

© В.С. Зарубин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*При наличии пор в твердых телах возникает необходимость учитывать перенос тепловой энергии в порах излучением при определении эффективного коэффициента теплопроводности таких тел. В работе построена математическая модель, описывающая теплообмен излучением в шаровой полости, форму которой можно рассматривать как среднюю статистическую по отношению к формам замкнутых пор в твердых телах. Построенная модель позволяет определить эквивалентный коэффициент теплопроводности условной сплошной среды, заполняющей пору, что дает возможность рассматривать материал с пористой структурой как сплошное неоднородное твердое тело. Выполнен анализ адекватности этой модели и получены оценки возможной погрешности при вычислении эквивалентного коэффициента теплопроводности. Проведено сравнение расчетной зависимости для этого коэффициента с аналогичными по структуре формулами, полученными на основе различных подходов к учету переноса тепловой энергии в порах путем излучения.*

**Ключевые слова:** шаровая полость, математическая модель переноса излучения, эквивалентный коэффициент теплопроводности.

**Введение.** При определении эффективного коэффициента теплопроводности твердых тел с пористой структурой возникает необходимость учитывать перенос в порах тепловой энергии излучением. Пористая структура в конструкционных поликристаллических материалах может возникнуть на стадии их затвердевания из расплава (в частности при разливке металла на машинах непрерывного литья заготовок), при термомеханической обработке или в процессе деформирования. Технологические процессы получения композиционного материала и режимы его деформирования также допускают возможность образования пор. Пористую структуру имеют многие строительные и теплоизоляционные материалы.

Существуют различные подходы к построению математических моделей процесса переноса тепловой энергии излучением через замкнутые поры в твердых телах. При этом пору обычно условно заменяют включением, материал которого имеет некоторый эквивалентный коэффициент теплопроводности  $\lambda_R$ , определяемый с использованием той или иной математической модели. В известных работах [1–4], посвященных определению величины  $\lambda_R$ , рассмотрены замкнутые поры

различных форм, среди которых в качестве средней статистической можно принять форму шаровой полости. Среду в шаровой полости будем считать диатермичной, т.е. не поглощающей и не рассеивающей излучение. Свойства сферической поверхности этой полости примем соответствующими свойствам диффузно-серой поверхности [5, 6] с коэффициентом излучения  $\varepsilon$ .

**Перенос теплоты теплопроводностью.** Пусть шаровая полость радиусом  $r_0$  находится в неограниченной области, заполненной однородным материалом с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_m$ . В центре полости поместим начало сферической системы координат  $r, \theta, \chi$ , а на большом расстоянии  $r$  от центра полости зададим вектор градиента температурного поля в этом материале, имеющий модуль  $G$ , направленный вдоль оси, от которой отсчитывается угловая координата  $\theta$ . Тогда при  $r \rightarrow \infty$  установившееся осесимметричное (не зависящее от угловой координаты  $\chi$ ) распределение температуры  $T$  в этом материале описывает функция  $T_\infty(r, \theta) = T_0 + Gr \cos \theta$ , где  $T_0$  — температура в плоскости при  $\theta = \pi/2$ . Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в сферических координатах с учетом осевой симметрии имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (1)$$

По мере приближения к шаровой полости температурное поле в однородном материале претерпевает возмущение, описываемое удовлетворяющим уравнению (1) дополнительным слагаемым [7]  $\Delta T(r, \theta) = (B/r^2) \cos \theta$ , где  $B$  — постоянный коэффициент. Таким образом, температурное поле в этом материале, удовлетворяющее заданному условию при  $r \rightarrow \infty$  и уравнению (1), описывает функция

$$T_m(r, \theta) = T_\infty(r, \theta) + \Delta T(r, \theta) = T_0 + \left( Gr + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (2)$$

При условной замене шаровой полости шаровым включением с искомым коэффициентом теплопроводности  $\lambda_R$  осесимметричное установившееся температурное поле в таком включении в силу ограниченности значения температуры в его центре будет иметь вектор градиента с постоянным модулем  $G_R$ , также направленный вдоль оси при  $\theta = 0$ . При этом распределение температуры во включении, удовлетворяющее уравнению (1), описывается функцией

$$T_R(r, \theta) = T_0 + G_R r \cos \theta. \quad (3)$$

В соотношения (2) и (3) входят два неизвестных коэффициента  $B$  и  $G_R$ , которые следует найти из условий непрерывности при  $r = r_0$  распределения температуры и плотности теплового потока

$$T_m(r_0, \theta) = T_R(R_1, \theta) \quad \text{и} \quad \lambda_m \left. \frac{\partial T_m}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \lambda_R \left. \frac{\partial T_R}{\partial r} \right|_{r=r_0}.$$

Отсюда с использованием равенств (2) и (3) находим

$$G + \frac{B}{r_0^3} = G_R \quad \text{и} \quad G - \frac{2B}{r_0^3} = \frac{\lambda_R}{\lambda_m} G_R,$$

или  $G_R = 3G/(2 + \bar{\lambda}_R)$  и  $B/r_0^3 = G(1 - \bar{\lambda}_R)/(2 + \bar{\lambda}_R)$ , где  $\bar{\lambda}_R = \lambda_R/\lambda_m$ . Таким образом, с учетом равенства (3) получаем распределение температуры на сферической поверхности радиусом  $r_0$  в виде

$$T_R(r_0, \theta) = T_0 + G_R r_0 \cos \theta = T_0 + \frac{3Gr_0 \cos \theta}{2 + \bar{\lambda}_R}. \quad (4)$$

При этом через включение проходит тепловой поток

$$Q = 2\pi r_0^2 \lambda_R \int_0^{\pi/2} \left. \frac{\partial T_R}{\partial r} \right|_{r=r_0} \sin \theta d\theta = \pi r_0^2 \lambda_R G_R = \pi r_0^2 \frac{3\lambda_R G}{2 + \bar{\lambda}_R}. \quad (5)$$

**Перенос теплоты излучением.** Теперь вернемся к шаровой полости с диатермической средой и найдем тепловой поток, который за счет теплообмена излучением проходит через эту полость при распределении температуры на ее сферической поверхности, определяемой соотношением (4). Для этого используем понятия плотности потоков падающего  $q$  и собственного  $\varepsilon q^\circ$  излучений, где в соответствии с законом Стефана — Больцмана [5, 8, 9]

$$q^\circ = \sigma_0 T_R^4, \quad (6)$$

$\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ . Падающее на непрозрачную поверхность излучение частично поглощается ( $Aq_n$ ) и частично отражается ( $Rq_n$ ), где для поверхности со свойствами серого тела  $A = \varepsilon$  — коэффициент поглощения и  $R = 1 - A = 1 - \varepsilon$  — коэффициент отражения.

Собственное излучение в сумме с отраженным излучением составляет эффективное излучение с плотностью потока

$$q^* = \varepsilon q^\circ + Rq_n. \quad (7)$$

Количество энергии, теряемое вследствие излучения единицей площади поверхности твердого тела в единицу времени, называют плотностью потока результирующего излучения:  $\bar{q} = q^* - q_n$ , или  $\bar{q} = \varepsilon q^\circ - Aq_n$ . Исключая из этих двух равенств  $q_n$ , получаем

$$\bar{q} = \frac{\varepsilon q^\circ - Aq^*}{R},$$

где для непрозрачной поверхности со свойствами серого тела коэффициент отражения излучения  $R = 1 - A = 1 - \varepsilon$ .

Рассмотрим на поверхности  $S$  полости две произвольные точки  $M$  и  $N$ . С элементарной площадки  $dS(N)$  в окрестности точки  $N \in S$

на единичную площадку в окрестности точки  $M \in S$  попадает поток излучения

$$dq_n(M) = q^*(N) d\varphi_{NM}. \quad (8)$$

Здесь  $d\varphi_{NM}$  — элементарный угловой коэффициент [10], равный в соответствии с законом Ламберта [5, 9] для распределения диффузного излучения по направлениям, определяемым углом  $\varphi_N$  между конкретным направлением и нормалью к площадке  $dS(N)$ ,

$$d\varphi_{NM} = \frac{\cos \varphi_N \cdot \cos \varphi_M}{\pi l_{MN}^2} dS(N), \quad (9)$$

где  $\varphi_M$  — угол между нормалью в точке  $M$  и отрезком  $MN$  длиной  $l_{MN}$ .

Равенство (7) справедливо для единичных площадок как в окрестности точки  $N \in S$ , так и в окрестности точки  $M \in S$ . Тогда в соответствии с формулами (7), (8) и (9) получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода в виде [11]

$$q^*(M) - R(M) \int_S q^*(N) \frac{\cos \varphi_N \cdot \cos \varphi_M}{\pi l_{MN}^2} dS(N) = \varepsilon(M) q^\circ(M). \quad (10)$$

Для сферической поверхности  $S_0$  радиусом  $r_0$  получаем

$$\cos \varphi_N = \cos \varphi_M = \frac{l_{MN}}{2r_0}.$$

Поэтому вместо уравнения (10) запишем

$$q^*(M) - \frac{R(M)}{4\pi r_0^2} \int_{S_0} q^*(N) dS(N) = \varepsilon(M) q^\circ(M). \quad (11)$$

Отсюда с учетом равенств (7) и (8) следует

$$q_n(M) = \frac{1}{4\pi r_0^2} \int_{S_0} q^*(N) dS(N) = q_{\text{ср}}^* = \text{const}, \quad (12)$$

т. е. плотность потока падающего излучения в шаровой полости одинакова для всех точек ее поверхности и равна средней плотности  $q_{\text{ср}}^*$  потока эффективного излучения.

Умножая уравнение (11) на  $dS(M)/(4\pi r_0^2)$  и затем интегрируя по сферической поверхности  $S_0$ , при условии  $R = 1 - \varepsilon = \text{const}$  с учетом соотношения (12) получаем

$$q_{\text{ср}}^* = \frac{1}{4\pi r_0^2} \int_{S_0} q^\circ(M) dS(M) = \frac{1}{2} \int_0^\pi q^\circ(\theta) \sin \theta d\theta,$$

или, используя формулы (4) и (6), находим

$$q_{\text{ср}}^* = \sigma_0 \left( T_0^4 + 2T_0^2 G_R^2 r_0^2 + \frac{G_R^4 r_0^4}{5} \right). \quad (13)$$

Поскольку  $\bar{q} = \varepsilon q^\circ - A q_{\text{п}}$ , при условиях  $A = \varepsilon$  и  $q_{\text{п}}^* = q_{\text{ср}}^*$  с учетом формул (4) и (13) запишем

$$\zeta(\theta) = \frac{\bar{q}(\theta)}{\varepsilon \sigma_0 T_0^4} = (1 + g_R \cos \theta)^4 - \left( 1 + 2g_R^2 + \frac{g_R^4}{5} \right), \quad (14)$$

где  $g_R = G_R r_0 / T_0 \leq 1$ . Из этого равенства следует, что при

$$\cos \theta_* = \frac{(1 + 2g_R^2 + g_R^4/5)^{1/4} - 1}{g_R} > 0,$$

т. е. при  $\theta_* < \pi/2$  величина  $\zeta(\theta)$  изменяет знак. На рис. 1 в полулогарифмических координатах представлена зависимость угла  $\theta_*$  от параметра  $g_R$ . При физически допустимом шкалой абсолютных температур значении  $g_R = 1$  имеем  $\cos \theta_* \approx 0,33748$  и  $\theta_* \approx 1,22656$ . Отметим, что при  $g_R = 0,001$  угол  $\theta_* \approx 1,5703$ , т. е. отличается от значения  $\pi/2 \approx 1,5708$  всего на 0,0005 (около 0,03 %).

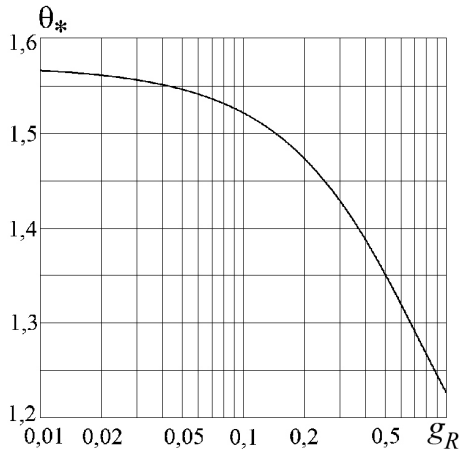


Рис. 1. Зависимость угла  $\theta_*$  от параметра  $g_R$

Таким образом, в общем случае в полуинтервале  $(\theta_*; \pi/2]$  изменения угла  $\theta$  на сферической поверхности рассматриваемой шаровой полости возникает несоответствие между подводимым к этой поверхности за счет теплопроводности и отводимым излучением тепловыми потоками, т. е. происходит локальное нарушение закона сохранения энергии. На рис. 2 для различных значений параметра  $g_R$  приведена зависимость отношения  $\bar{\zeta} = \zeta(\theta)/\zeta(0)$  от угла  $\theta$  (в градусах). Там же тонкой сплошной кривой для сравнения представлен график полуволны косинусоиды, определяющей в безразмерном виде распределение плотности подводимого к полости при  $\theta^\circ \in [0; 90^\circ)$  и отводимого от

нее при  $\theta^\circ \in (90^\circ; 180^\circ]$  за счет теплопроводности теплового потока. Ясно, что при  $g_R \leq 0,02$  зависимости практически совпадают с косинусоидой, а при  $g_R = 0,05$  некоторое отличие этой зависимости от косинусоиды заметно лишь при  $\theta^\circ \in [120^\circ; 180^\circ]$ .

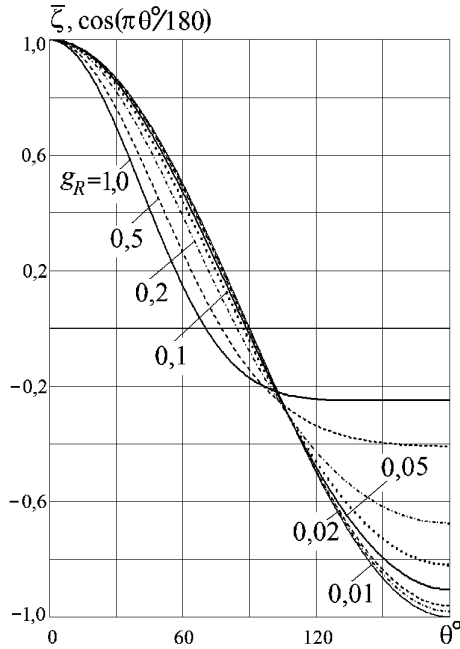


Рис. 2. Зависимость отношения  $\bar{\zeta} = \zeta(\theta)/\zeta(0)$  от угла  $\theta$

С учетом формулы (5) доля тепловой энергии, подводимая путем теплопроводности через участок сферической поверхности при  $\theta \in (\theta_*; \pi/2)$ , от всей подводимой к полости энергии составит величину

$$\eta = \frac{2\pi r_0^2 \lambda_R}{Q} \int_{\theta_*}^{\pi/2} \left. \frac{\partial T_R}{\partial r} \right|_{r=r_0} \sin \theta d\theta = \cos^2 \theta_*.$$

Зависимость величины  $\eta$  от параметра  $g_R$  представлена на рис. 3 в логарифмических координатах, причем значению  $g_R = 1$  соответствует значение  $\eta \approx 0,1139$ , по которому можно определить предельно возможную интегральную погрешность оценки значения  $\lambda_R$  при используемой математической модели.

**Эквивалентный коэффициент теплопроводности.** В реальных ситуациях при сравнительно малых размерах пор в применяемых на практике материалах  $g_R < 0,1$  и поэтому интегральная погрешность, оцениваемая значением  $\eta$ , будет достаточно малой. Приравнивая тепловой поток  $Q$ , подводимый к полости путем теплопроводности и определяемый формулой (5), потоку излучения, теряемому с полусфере-

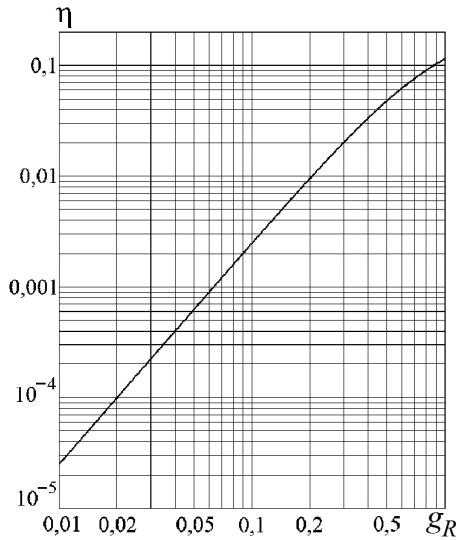


Рис. 3. Зависимость величины  $\eta$  от параметра  $g_R$

рической поверхности при  $\theta \in [0; \pi/2]$ , с учетом соотношения (14) получаем

$$\pi r_0^2 \bar{\lambda}_R G_R = 2\pi r_0^2 \int_0^{\pi/2} \bar{q}(\theta) \sin \theta d\theta = 2\pi r_0^2 \varepsilon \sigma_0 T_0^3 G_R r_0 (2 + g_R^2),$$

или, учитывая равенство  $G_R = 3G/(2 + \bar{\lambda}_R)$ ,

$$(2 + \bar{\lambda}_R)^2 (\bar{\lambda}_R - \beta) = \frac{9}{4} \beta g_R^2, \quad (15)$$

где  $\beta = 4\varepsilon \sigma_0 T_0^3 r_0 / \lambda_m$ .

Из равенства (15) следует, что  $\bar{\lambda}_R > \beta$  при  $\beta > 0$  и  $g_R > 0$ . Равенство (15) является полным кубическим уравнением относительно искомого значения  $\bar{\lambda}_R$ . Однако при  $g_R < 1$  единственный действительный положительный корень этого уравнения лишь незначительно превышает значение  $\beta$ . На рис. 4 в логарифмических координатах представлены зависимости  $\Delta \bar{\lambda}_R = \bar{\lambda}_R - \beta$  от  $\beta$  при различных значениях параметра  $g_R$ . Наибольшим значениям  $\Delta \bar{\lambda}_R$  соответствуют значения  $\beta_* \approx 2$ , а именно:  $\beta_* \approx 2,06800$  при  $g_R = 0,5$ ,  $\beta_* \approx 2,01119$  при  $g_R = 0,2$ ,  $\beta_* \approx 2,00281$  при  $g_R = 0,1$ ,  $\beta_* \approx 2,000703$  при  $g_R = 0,05$ ,  $\beta_* \approx 2,0001125$  при  $g_R = 0,02$  и  $\beta_* \approx 2,00002812$  при  $g_R = 0,01$ . Характерно, что при этом для наибольших значений справедливо равенство  $\Delta \bar{\lambda}_R = \beta_* - 2$ . Следовательно, даже наибольшие отклонения значения  $\bar{\lambda}_R$  от значения  $\beta$  быстро уменьшаются с уменьшением параметра  $g_R$ . Для гипотетического значения  $g_R = 1$  имеем  $\beta_* = 2,25$  и соответственно  $\Delta \bar{\lambda}_R = 0,25$ .

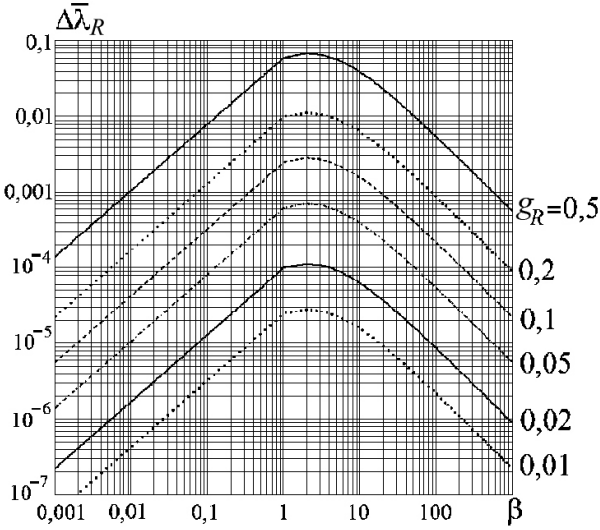


Рис. 4. Зависимости величины  $\Delta\bar{\lambda}_R$  от параметра  $\beta$  при различных значениях  $g_R$

Таким образом, с достаточно высокой точностью применительно к реальным ситуациям ( $g_R < 0,1$ ) можно положить  $\bar{\lambda}_R = \beta$ , или

$$\lambda_R = \varepsilon\sigma_0 T_0^3 r_0. \quad (16)$$

Формула с такой структурой хорошо известна, но ее вывод в большинстве работ опирается на математическую модель теплообмена излучением между двумя параллельными неограниченными пластинами [1–4], зазор между которыми является лишь довольно грубым приближением к форме замкнутых пор в применяемых в технике материалах. При этом в качестве характерного размера поры обычно используют ее размер в направлении наименьшей протяженности. Для шаровой полости таким размером будет ее диаметр, тогда как в формулу (16) входит радиус  $r_0$  полости. Кроме того, на месте коэффициента излучения  $\varepsilon$  в рекомендованных расчетных формулах [1, 4] стоит приведенный (или эффективный) коэффициент излучения  $\varepsilon_{\text{пр}} = 1/(1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1)$ , где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — коэффициенты излучения поверхностей, между которыми происходит теплообмен излучением. В случае  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  место  $\varepsilon$  в расчетной формуле, аналогичной соотношению (16), занимает коэффициент  $\varepsilon_{\text{пр}} = \varepsilon/(2 - \varepsilon)$  [2] или равный ему коэффициент  $\varepsilon_{\text{пр}} = \varepsilon^2/(1 - (1 - \varepsilon)^2)$  [3].

Для полости в виде куба с длиной ребра  $h$  получена формула [1]  $\lambda_R = 2\varepsilon_{1,2}\sigma_0 T^3 h$ , где  $\varepsilon_{1,2}$  — некоторый приведенный коэффициент излучения в кубической полости, причем верхняя и нижняя грани куба имеют температуры  $T_1$  и  $T_2$  соответственно, а средняя температура боковых граней  $T = (T_1 + T_2)/2$  и линейно изменяется по их высоте. При сравнении этой формулы с соотношением (16) следует отметить, что величину  $2h$  можно рассматривать как эквивалент величины  $4r_0$ .



Однако коэффициент  $\varepsilon_{1,2}$  не определен и его значение в случае одинакового для всех граней кубической полости коэффициента излучения  $\varepsilon$  предложено приближенно принять равным  $\varepsilon^2$ .

В работе [1] приведена формула  $\lambda_R = 4\sigma_0 d \varepsilon \Gamma T^3$ , где  $d$  — характерный размер поры, а коэффициент  $\Gamma$  учитывает ее форму. Для шаровой полости  $\Gamma = 2/3$ , что при  $d = 2r_0$  приводит к равенству  $\lambda_R = (16/3)\varepsilon\sigma_0 T^3 r_0$ , т. е. числовой коэффициент в этой формуле на треть больше числового коэффициента в соотношении (16). Там же представлена формула для эффективного коэффициента теплопроводности пористого материала, в которой влияние переноса тепловой энергии в порах излучением учтено эмпирически введенным корректирующим множителем, полностью совпадающим с правой частью равенства (16).

Таким образом, отличие соотношения (16) от аналогичных по структуре формул состоит в том, что она получена путем строгого сопоставления математических моделей, описывающих процессы переноса тепловой энергии в шаровой полости путем излучения и теплопроводности. Это обстоятельство дает возможность достоверной количественной оценки эквивалентного коэффициента  $\lambda_R$  теплопроводности в рамках допущений, использованных при построении и анализе указанных моделей.

**Заключение.** На основе строгого сопоставления математических моделей переноса тепловой энергии в шаровой полости, с одной стороны, излучением через диатермичную среду, а с другой — теплопроводностью через условную сплошную среду с искомым коэффициентом  $\lambda_R$  теплопроводности получена расчетная зависимость для вычисления значения  $\lambda_R$ . Проведен анализ возможной погрешности, возникающей при замене механизма переноса тепловой энергии излучением на механизм теплопроводности. Выявлены отличия этой расчетной зависимости от аналогичных по структуре формул, предложенных на основе различных подходов к учету переноса тепловой энергии в порах путем излучения.

Форму шаровой полости можно рассматривать как среднюю статистическую по отношению к формам замкнутых пор в материале, возникающих при его изготовлении, термообработке или деформировании. Полученная расчетная зависимость для эквивалентного коэффициента  $\lambda_R$  теплопроводности позволяет при оценке эффективного коэффициента теплопроводности материала с пористой структурой использовать известные математические модели, построенные применительно к сплошному (непористому) твердому телу [1–4, 7, 12, 13].

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ–255.2012.8).*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Чудновский А.Ф. *Теплофизические характеристики дисперсных материалов*. Москва, Физматгиз, 1962, 456 с.
- [2] Кингери У.Д. *Введение в керамику*. Москва, Стройиздат, 1967, 500 с.
- [3] Миснар А. *Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их композиций*. Москва, Мир, 1968, 464 с.
- [4] Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. *Теплопроводность смесей и композиционных материалов*. Ленинград, Энергия, 1974, 264 с.
- [5] Зигель Р., Хауэлл Дж. *Теплообмен излучением*. Москва, Мир, 1975, 936 с.
- [6] Крейт Ф., Блэк У. *Основы теплопередачи*. Москва, Мир, 1983, 512 с.
- [7] Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*. Москва, Наука, 1964, 488 с.
- [8] Спэрроу Э.М., Сесс Р.Д. *Теплообмен излучением*. Ленинград, Энергия, 1971, 295 с.
- [9] *Теория теплообмена*. Леонтьев А.И., ред. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997, 684 с.
- [10] Русин С.П., Пелецкий В.Э. *Тепловое излучение полостей*. Москва, Энергоатомиздат, 1987, 153 с.
- [11] Зарубин В.С. *Температурные поля в конструкции летательных аппаратов*. Москва, Машиностроение, 1966, 216 с.
- [12] Оделевский В.И. Расчет обобщенной проводимости гетерогенных систем. *Журнал технической физики*, 1951, Т. 21, вып. 6, с. 667–685.
- [13] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективный коэффициент теплопроводности композита с шаровыми включениями. *Тепловые процессы в технике*, 2012, № 10, с. 470–474.

Статья поступила в редакцию 20.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Зарубин В.С. Оценка эквивалентного коэффициента теплопроводности при переносе излучения в шаровой полости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 8.

URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/887.html>

**Зарубин Владимир Степанович** — д-р техн. наук, проф. кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: [zarubin@bmstu.ru](mailto:zarubin@bmstu.ru)