УДК 517.95

# Теорема типа Фрагмена — Линделефа для нелинейных эллиптических уравнений высокого порядка

© Г.В. Гришина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*В полуцилиндре $H = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_n < \infty, x' \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}\}$, где $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x', x_n)$, $\Omega$ — ограниченная область с липшицевой границей, рассмотрено равномерно-эллиптическое уравнение с измеримыми ограниченными коэффициентами*

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x)|D^m u|^{p-2} D^\beta u) = 0, \qquad p > 1.$$

*Получены интегральные оценки решения на бесконечности при условии выполнения однородных условий Неймана на боковой части границы цилиндра.*

***Ключевые слова:*** *нелинейное эллиптическое уравнение, однородные условия Неймана, интегральные оценки решений.*

Впервые вопрос о поведении решения $u(x)$ линейного эллиптического уравнения высокого порядка

$$\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = 0$$

в цилиндре при заданных нулевых условиях Дирихле на боковой границе цилиндра был исследован П.Д. Лаксом [1]. Изучению поведения решений в неограниченных областях и их гладкости как для линейных, так и для нелинейных эллиптических уравнений посвящены многие работы, например [2–7].

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x)|D^m u|^{p-2} D^\beta u) = 0, \qquad p > 1, \tag{1}$$

где

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1, \ldots, \partial^{\alpha_n} x_n}; \qquad D^m = \{D^\alpha : |\alpha| = m\};$$

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in H \subset \mathbb{R}^n$; $\alpha, \beta$ — мультииндексы:

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \beta_i \geqslant 0,$$

$i = 1, \ldots, n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$.

Предположим, что коэффициенты $a_{\alpha\beta}(x)$ — действительные ограниченные измеримые функции такие, что $\forall x \in H$ и $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, где $N$ —

число мультииндексов порядка $m$ длины $n$, выполнены неравенства

$$\nu|\xi|^p \leqslant \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)|\xi|^{p-2}\xi_\alpha\xi_\beta \leqslant \mu|\xi|^p, \qquad \nu > 0, \ \ \mu > 0.$$

Введем некоторые обозначения и дадим определение обобщенного решения уравнения (1).

Через $W^{m,p}_{loc}(H)$ обозначим пространство функций, принадлежащих классу $W^{m,p}(H \cap \{|x| > R\})$ $\forall R > 0$. Символ $W^{m,p}_0(H, \Gamma_1)$ — пополнение по норме $\|\cdot, W^{m,p}(H)\|$ пространства функций из $C^\infty(H)$, обращающихся в нуль в окрестности части границы $\Gamma_1 \subseteq \partial H$ и имеющих компактный носитель в области $H$.

**Определение.** Функция $u(x) \in W^{m,p}_{loc}(H)$ называется обобщенным решением уравнения (1), удовлетворяющим на части $\Gamma$ границы $\partial H$ области $H$ однородному условию Неймана, если $\forall\psi \in W^{m,p}_0(H, \partial H \setminus \Gamma)$ справедливо интегральное тождество

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int\limits_H a_{\alpha\beta}(x)|D^m u|^{p-2} D^\beta u D^\alpha \psi \, dx = 0.$$

Исследуем поведение обобщенного решения уравнения (1) в бесконечном полуцилиндре

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \ 0 < x_n < \infty, \ x' \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}\},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $\Omega$ — ограниченная область с липшицевой границей.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

**Теорема 1.** Пусть $u(x) \in W^{m,p}_{loc}(H)$ — обобщенное решение уравнения (1) в области $H$, удовлетворяющее на боковой границе цилиндра $\Gamma = \partial H \cap \{0 < x_n < \infty\}$ однородному условию Неймана. Предположим, что существуют локально суммируемые обобщенные производные $D^\gamma u$ ($|\gamma| = 2m - 1, \gamma_1 + \ldots + \gamma_{n-1} \leqslant m$) и $\dfrac{\partial^l a_{\alpha\beta}(x)}{\partial {x_n}^l}$ для $l \leqslant m - 1$. Тогда, если

$$\int\limits_{H\cap\{x_n<\rho\}} |D^m u|^p \, dx = o(\rho), \qquad \rho \to \infty, \tag{2}$$

то найдутся $\rho_0 > 0$ и положительные постоянные $C$ и $\eta$ такие, что $\forall\rho > \rho_0$ выполняется условие

$$\int\limits_{H\cap\{x_n>\rho\}} |D^m u|^p \, dx \leqslant C e^{-\eta\rho}.$$

Теорема 1 является новой и для случая $m = 1$.

Приведем теорему, вытекающую из результатов работы [6].

**Теорема 2.** Пусть $u(x) \in W^{m,p}_{loc}(H)$ — обобщенное решение уравнения (1) в области $H$, удовлетворяющее на боковой границе цилиндра $\Gamma = \partial H \cap \{0 < x_n < \infty\}$ однородному условию Неймана, и пусть

$$\int\limits_H |D^m u|^p \, dx < \infty. \tag{3}$$

Тогда существуют $\rho_0 > 0$ и положительные постоянные $C$ и $\eta$ такие, что $\forall \rho > \rho_0$ выполняется условие

$$\int\limits_{H\cap\{x_n>\rho\}} |D^m u|^p \, dx \leqslant Ce^{-\eta\rho}.$$

Доказательство теоремы 1 проводится в несколько этапов. Приведем лемму, играющую важную роль в дальнейшем, доказательство которой почти очевидно.

**Лемма 1.** Пусть $u(x) \in W^{m,p}_{loc}(H)$ — обобщенное решение уравнения (1) в области $H$, удовлетворяющее на боковой границе цилиндра $\Gamma = \partial H \cap \{0 < x_n < \infty\}$ однородному условию Неймана, и при $\rho \to \infty$ выполнено условие (2) теоремы 1. Тогда существует последовательность $\rho_k \to \infty$ такая, что

$$\int\limits_{H\cap\{x_n=\rho_k\}} |D^m u|^p \, dx' = o(1).$$

Доказательство леммы сводится к рассмотрению интеграла от функции одной переменной

$$f(t) = \int\limits_{H\cap\{x_n=t\}} |D^m u|^p \, dx'$$

и проводится методом от противного.

Из теоремы 2 следует, что для решения $u(x)$ достаточно установить справедливость оценки (3). Ключевую роль при этом будет играть аналог формулы Грина, вытекающий из определения обобщенного решения.

**Лемма 2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме условия (2). Тогда для любой функции $v(x) \in W^{m,p}_{loc}(H)$ и равной нулю при $x_n = 0$ для почти всех $\rho > 0$ верна формула

$$\begin{gathered}\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int\limits_{H\cap\{0<x_n<\rho\}} a_{\alpha\beta} |D^m u|^{p-2} D^\beta u D^\alpha v \, dx = \\ = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^{l-1}}{\partial x_n^{l-1}} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int\limits_{H\cap\{x_n=\rho\}} a_{\alpha\beta} |D^m u|^{p-2} D^\beta u D^{\gamma_l} v \, dx',\end{gathered} \tag{4}$$

где $\gamma_l = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n - l)$.

**Лемма 3.** Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда

$$\int_H |D^m u|^p \, dx < \infty. \tag{5}$$

Доказательство леммы 3 основано на тщательном выборе пробных функций в формуле Грина (4) и на использовании сформулированных выше утверждений.

Таким образом, для получения утверждения теоремы 1 достаточным является справедливость условия (5). Действительно, удается показать, что для любого целого $k > 0$ выполнено неравенство

$$\int_{H \cap \{x_n > \rho + ka\}} |D^m u|^p \, dx < C_1^k \int_{H \cap \{x_n > \rho\}} |D^m u|^p \, dx$$

с постоянной $0 < C_1 < 1$, не зависящей от $k$.

**Замечание 1.** Отметим, что в условии (2) теоремы 1 нельзя заменить $o(\rho)$ на $O(\rho)$.

**Замечание 2.** Теорема 1 остается в силе, если задать на границе однородные условия Дирихле.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00989-а).*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лакс П.Д. Теорема Фрагмена — Линделефа в гармоническом анализе и ее приложения к некоторым вопросам теории эллиптических уравнений. *Математика*, 1959, т. 4, с. 107–132.

[2] Ландис Е.М. О поведении решений эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях. *Труды Московского математического общества*, 1974, т. 31, с. 35–58.

[3] Олейник О.А., Радкевич Е.В. Аналитичность и теоремы типа Лиувилля для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений. *Математический сборник*, 1974, т. 95, № 1, с. 130–145.

[4] Антонцев С.Н. О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений. *ДАН СССР*, 1981, т. 260, № 6, с. 1289–1293.

[5] Bernis F. Extinction of the solutions of some quasilinear elliptic problems of arbitrary order. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 1986, vol. 45, part 1, pp. 125–132.

[6] Гришина Г.В. Поведение решений нелинейной вариационной задачи в окрестности особых точек границы и на бесконечности. *Математический сборник*, 1993, т. 184, № 3, с. 81–110.

[7] Тарба Л.А. О свойствах решений эллиптического уравнения высокого порядка в областях с некомпактной границей. *Вестник Моск. ун-та. Сер. Матем. и мех.*, 1981, № 6, с. 10–14.

Статья поступила в редакцию 20.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Гришина Г.В. Теорема типа Фрагмена — Линделефа для нелинейных эллиптических уравнений высокого порядка. *Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 8*.
URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/885.html

**Гришина Галина Владимировна** — канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: galinavg@yandex.ru