

Цилиндрические оболочки конечной длины под внешним давлением

© В.И. Ванько

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На основе простой кинематической модели поставлена и методом коллокации по срединному поперечному сечению решена задача о больших (сравнимых с радиусом поперечного сечения) перемещениях точек срединной поверхности цилиндрической оболочки конечной длины, подверженной действию внешнего бокового гидростатического давления. Получено выражение критического давления для упругой оболочки при условии, что устойчивое развитие квазистатического процесса заканчивается при малых (относительно среднего значения радиуса недеформированного поперечного сечения) прогибах.

Ключевые слова: оболочка конечной длины, внешнее давление, большие перемещения, критическое давление.

Введение. В работах [1–3], посвященных исследованию поведения оболочек при перемещениях точек срединной поверхности, сравнимых с толщиной оболочки, теория основана на нелинейных кинематических соотношениях перемещения — деформации. Это приводит к весьма сложным уравнениям равновесия, вследствие чего невозможно делать какие-либо предварительные качественные заключения.

В работе [4] при изучении процесса развития больших перемещений точек нейтрального слоя (почти) кругового кольца, первоначально имевшего слабую овальность формы, была использована следующая кинематическая схема: форма кольца (поперечного сечения бесконечно длинной оболочки) аппроксимировалась сопряжением двух окружностей радиусами R_b и R_a , $R_b > R_a$ (рис. 1). Ввиду центральной симметрии формы кольца рассмотрена только его первая четверть в координатах Oxy . В процессе деформирования радиус R_b увеличивается, а радиус R_a уменьшается, вследствие этого изгибающие моменты в поперечных сечениях дуг BC и CA имеют разные знаки. Считаем, что в точке сопряжения дуг изгибающий момент равен нулю.

При малой начальной овальности оболочки точка C соответствует полярному углу $\psi = \pi/4$. Деформирование поперечного сечения по окончании этапа I (R_b стремится к бесконечности) приводит к тому, что $b(t) \rightarrow 0$. Решение задачи доводится до состояния полного сплющивания оболочки: $b = 0$. При учете ползучести материала кольца (внешнее гидростатическое давление, достигнув некоторого значения,

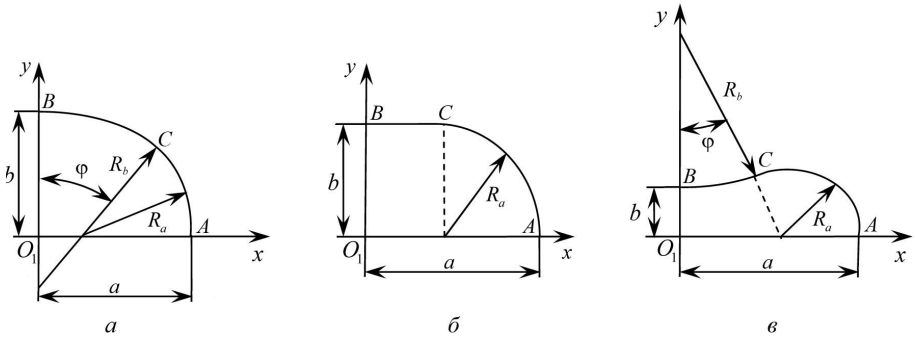


Рис. 1. Схемы деформирования поперечного сечения цилиндрической оболочки на этапе I (а), по окончании этапа I (б), на этапе II (в)

остается постоянным) можно определить время сплющивания [4], для упругопластической оболочки — соответствующее значение параметра нагружения [5].

Кинематическая модель. Развивая описанную выше кинематическую схему, рассмотрим круглоцилиндрическую оболочку длиной $2l$. Исследуем два вида закрепления концевых сечений: шарнирное и жесткую заделку контуров. Как и ранее, оболочка находится под действием внешнего гидростатического давления. Процесс сплющивания происходит так, что существуют три плоскости симметрии: Oxy , Oxz и Oyz [6]. На рис. 2 и 3 показаны сечения оболочек в плоскостях симметрии. При этом полагаем, что в случае шарнирного опирания образующие $B''BB'$ и $A''AA'$ в плоскостях симметрии в процессе деформирования представляют собой полуволны синусоиды; в случае жесткой заделки аналогичные образующие — полуволны косинусоиды с амплитудами $\beta(t)$ и $\alpha(t)$ соответственно.

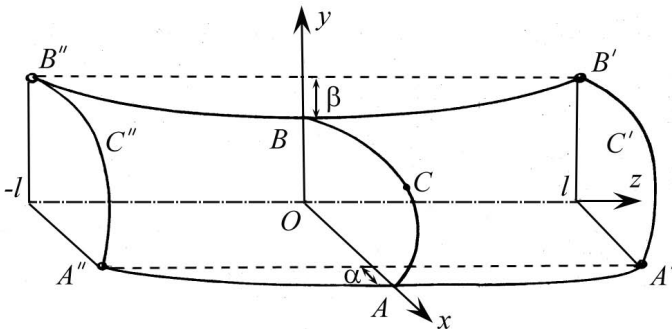


Рис. 2. Процесс деформирования шарнирно закрепленной оболочки в плоскости Oyz

Точка C является точкой срединного сечения, в которой изгибающий момент M_θ (в плоскости поперечного сечения) обращается в нуль. Считаем, что в области $BB'C'C$ оболочка продавливается (вминается внутрь), в области $CC'A'A$ — выпучивается.

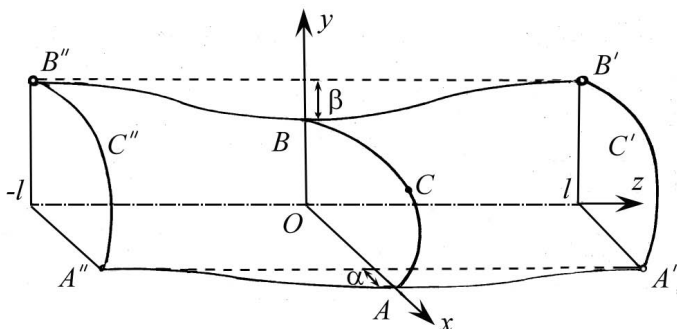


Рис. 3. Процесс деформирования оболочки с жестко заделанными концевыми сечениями в плоскости Oyz

При учете влияния конечности длины оболочки вследствие растяжения образующих цилиндра прежде всего возникнут дополнительные распределенные силы, приложенные к дугам BC и CA срединного сечения оболочки. Равнодействующая осевых сил, возникающих от растяжения образующей BB' , направлена по оси Oy и приложена в точке B . Аналогично вследствие растяжения образующей AA' равнодействующая сил приложена в точке A вдоль оси Ox . Эти дополнительные силы $t_2(s)$ и $t_1(s)$ распределены по дугам BC и CA соответственно. Предположим, что силы $t_2(s)$ имеют максимальные значения в точке B , а $t_1(s)$ — в точке A .

В работе [4] показано, что бóльшая часть этапа I протекает при (почти) неподвижной точке C ($\psi = \pi/4$). Поэтому считаем, что в точке C $t_1(s) = t_2(s) = 0$, а силы $t_1(s)$ и $t_2(s)$ распределены по соответствующим дугам линейно (рис. 4).

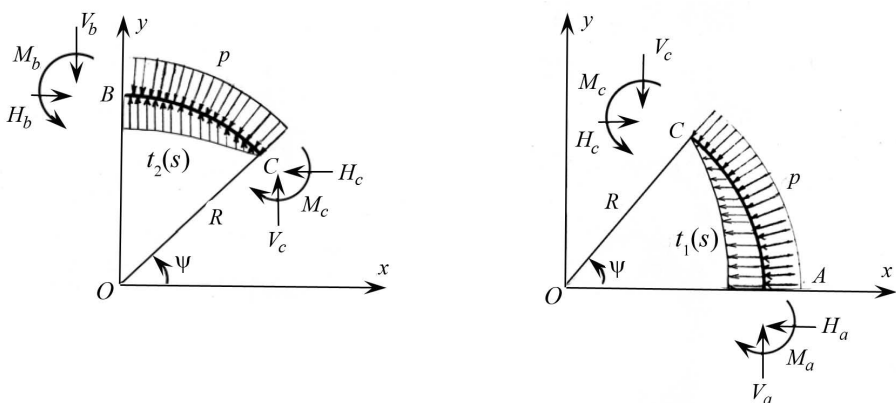


Рис. 4. Распределение сил по дугам BC и CA срединного сечения оболочки

При составлении уравнений равновесия используем введенные в [4] ограничения: вследствие симметрии формы $V_b = H_a = 0$. В рассмотренную на рис. 4 систему сил и моментов вводим равнодействующую

ющие T_1 и T_2 параллельных сил $t_1(s)$ и $t_2(s)$ соответственно и их моменты $M_c(t_1)$, $M_c(t_2)$ относительно точки C .

Равновесие дуги BC описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} H_b - H_c - p(b - R_c \sin \psi) &= 0, \\ T_2 + V_c - p(R_c \cos \psi) &= 0, \\ M_b + \left(\frac{p}{2}\right) (R_c \cos \psi)^2 + \\ + \left(\frac{p}{2}\right) (b - R_c \sin \psi)^2 - H_b(b - R_c \sin \psi) - M_c(t_2) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Равновесие дуги CA описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} H_c - p(R_c \sin \psi) - T_1 &= 0, \\ V_a - V_c - p(a - R_c \cos \psi) &= 0, \\ M_a + \left(\frac{p}{2}\right) (a - R_c \cos \psi)^2 + \left(\frac{p}{2}\right) (R_c \sin \psi)^2 - \\ - V_a(a - R_c \cos \psi) + M_c(t_1) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) выполняются в течение всего процесса сплющивания оболочки. Исключая из третьих уравнений систем (1) и (2) величины H_b , V_c , H_c и V_a , получаем систему уравнений равновесия в моментах:

$$\begin{aligned} M_b + \left(\frac{p}{2}\right) (R_c \cos \psi)^2 + \left(\frac{p}{2}\right) (b - R_c \sin \psi)^2 - M_c(t_2) - \\ - (T_1 + pb)(b - R_c \sin \psi) &= 0, \\ M_a + \left(\frac{p}{2}\right) (a - R_c \cos \psi)^2 + \left(\frac{p}{2}\right) (R_c \sin \psi)^2 + M_c(t_1) + \\ + (T_2 - pa)(a - R_c \cos \psi) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) введены следующие обозначения: p — равномерно распределенное по поверхности внешнее гидростатическое давление на оболочку; $M_{a,b,c}$ и $T_{1,2}$ — моменты и силы, отнесенные к единице длины:

$$M_{a,b,c} = \int_{-h}^h \sigma z dz, \quad T = \int_{-h}^h \sigma dz.$$

Расчет распределенных сил $t_1(s)$ и $t_2(s)$ и их моментов относительно точки C продемонстрируем на примере шарнирно закрепленной оболочки. Пусть a_0 и b_0 — начальные (до нагружения) значения наибольшего и наименьшего полу диаметров срединного поперечного сечения ($z = 0$). При шарнирном закреплении уравнения образующих BB' и AA' имеют вид

$$y(z) = b_0 - \beta(t) \cos \frac{\pi z}{2l}, \quad x(z) = a_0 + \alpha(t) \cos \frac{\pi z}{2l}.$$

Текущие длины этих образующих (см. рис. 2)

$$\begin{aligned}
 l_2(t) &= \int_0^l \sqrt{1 + \beta^2 \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi z}{2l}} dz, \\
 l_1(t) &= \int_0^l \sqrt{1 + \alpha^2 \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi z}{2l}} dz.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Если принять, что рассматриваются такие перемещения и параметры оболочки, для которых выполняются неравенства $u/2l < 1/5$, $R_0/2l < 1/5$, можно воспользоваться формулой бинома с точностью примерно 5%, и выражения (4) существенно упрощаются:

$$\begin{aligned}
 l_2(t) &= \int_0^l \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta\pi}{2l}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi z}{2l} \right) dz, \\
 l_1(t) &= \int_0^l \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha\pi}{2l}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi z}{2l} \right) dz.
 \end{aligned}$$

После вычисления интегралов имеем

$$l_2(t) = l \left(1 + \frac{w_1^2}{4} \right), \quad l_1(t) = l \left(1 + \frac{w_2^2}{4} \right).$$

Здесь $w_1 = \frac{\pi}{2l}\beta(t)$, $w_2 = \frac{\pi}{2l}\alpha(t)$.

Соответствующие деформации в точках срединной поверхности на образующих BB' и AA' при шарнирном закреплении

$$\epsilon_z^0 = \frac{w_1^2}{4}, \quad \epsilon_z^0 = \frac{w_2^2}{4}.$$

Так как в плоскости Oxy сечение оболочки может изгибаться, деформациями растяжения-сжатия срединной поверхности пренебрегаем: $\epsilon_\psi^0 = 0$.

Скорости деформации в точках сечений плоскостями Oxy , Oyz и Oxz имеют значения (производные вычисляются по времени либо по параметру нагружения)

$$\dot{\epsilon}_z^0 = \frac{1}{2} w_1 \dot{w}_1, \quad \dot{\epsilon}_z^0 = \frac{1}{2} w_2 \dot{w}_2.$$

Деформации и их скорости обусловят возникновение растягивающих напряжений σ_z^0 в точках образующих BB' и AA' срединной поверхности. Считаем, что напряжения σ_z^0 равномерно распределены по длине образующих оболочки, причем вектор σ_z^0 в любой точке направлен

по касательной к соответствующим образующим BB' и AA' (BB'' и AA'') при любом закреплении концов оболочки (рис. 5).

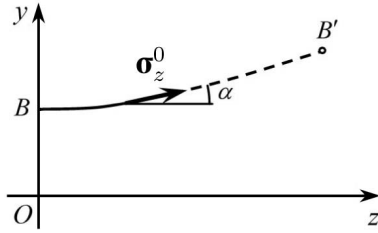


Рис. 5. Образующая оболочки и вектор внутреннего напряжения

Спроецируем вектор σ_z^0 на ось OY (OX):

$$\sigma_{zy}^0 = |\sigma_z^0| \sin \alpha \approx |\sigma_z^0| \operatorname{tg} \alpha = \sigma_z^0 y'(z),$$

$$\sigma_{zx}^0 \approx \sigma_z^0 x'(z).$$

Найдем средние по длине оболочки значения производных $y'(z)$, $x'(z)$. При шарнирном закреплении и жесткой заделке получаем для BB'

$$\frac{1}{l} \int_0^l \beta(t) \frac{\pi}{2l} \sin \frac{\pi z}{2l} dz = \frac{1}{l} \int_0^l \beta(t) \frac{\pi}{2l} \sin \frac{\pi z}{l} dz = \frac{\beta(t)}{l},$$

для AA'

$$\frac{1}{l} \int_0^l \alpha(t) \frac{\pi}{2l} \sin \frac{\pi z}{2l} dz = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha(t) \frac{\pi}{2l} \sin \frac{\pi z}{l} dz = \frac{\alpha(t)}{l}.$$

Итак, силы в точке B (рассматриваем всю образующую $B''BB'$)

$$t_2(B) = \int_{-h}^h 2\sigma_z^0 \frac{\beta(t)}{l} d\eta = 4h \frac{\beta(t)}{l} \sigma_z^0.$$

Аналогично в точке A

$$t_1(A) = \int_{-h}^h 2\sigma_z^0 \frac{\alpha(t)}{l} d\eta = 4h \frac{\alpha(t)}{l} \sigma_z^0.$$

В точках A и B модули сил, возникающих от растяжения образующих, максимальны.

Примем, что силы $t_2(\psi)$ и $t_1(\psi)$, распределенные по дугам BC и CA соответственно, линейны по углу ψ (рис. 4):

$$t_2(\psi) = k_2(\varphi - \psi), \quad 0 \leq \psi \leq \varphi,$$

$$t_1(\psi) = k_1\psi, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} - \varphi. \quad (5)$$

Множители пропорциональности k_1 и k_2 в выражениях (5) легко определяются, так как значения $t_2(B)$ и $t_1(A)$ известны:

$$k_2 = \frac{t_2(B)}{\varphi} = 4h \frac{\beta(t)}{l} \sigma_z^0 \frac{1}{\varphi},$$

$$k_1 = \frac{t_1(A)}{\frac{\pi}{2} - \varphi} = 4h \frac{\alpha(t)}{l} \sigma_z^0 \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \varphi}.$$

Интегрируя распределения сил $t_2(\psi)$ и $t_1(\psi)$ по дугам BC и CA (по переменному углу ψ), получаем равнодействующие T_2 и T_1 , а также моменты $M_c(t_2)$ и $M_c(t_1)$ (силы и моменты отнесены к единице длины):

$$T_2 = \int_0^{\varphi} k_2(\varphi - \psi) d\psi = k_2 \frac{\varphi^2}{2} = 2h \frac{\beta(t)}{l} \sigma_z^0 \varphi, \quad (6)$$

$$T_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varphi} k_1 \psi d\psi = 2h \frac{\alpha(t)}{l} \sigma_z^0 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right),$$

$$M_c(t_2) = \int_0^{\varphi} k_2(\varphi - \psi) R_b (\sin \varphi - \sin \psi) d\psi =$$

$$= k_2 R_b \left(\frac{1}{2} \varphi^2 \sin \varphi - \varphi + \sin \varphi \right) =$$

$$= 4h R_b \frac{\beta(t)}{l} \sigma_z^0 \left(\frac{1}{2} \varphi \sin \varphi - 1 + \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right), \quad (7)$$

$$M_c(t_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varphi} k_1 \psi R_a (\cos \varphi - \cos(\varphi + \psi)) d\psi =$$

$$= k_1 R_a \left(\cos \varphi \frac{(\pi/2 - \varphi)^2}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \cos \varphi \right) =$$

$$= 4h R_a \sigma_z^0 \left(\cos \varphi \left(\frac{\pi/2 - \varphi}{2} + \frac{1}{\pi/2 - \varphi} \right) - 1 \right) \frac{\alpha(t)}{l}.$$

$$(8)$$

Как было показано в работе [4], этап I для бесконечно длинной оболочки в основном протекает при (почти) постоянном значении угла $\varphi \approx \psi \approx \pi/4$. Примем во внимание данное замечание и при исследовании процесса сплющивания оболочек конечной длины будем считать скорость изменения угла $\dot{\varphi} = 0$. При этом угол φ определим из

соотношения постоянства длины срединного сечения $z = 0$:

$$R_b\varphi + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) R_a = \frac{\pi}{2} R_0 \equiv L. \quad (9)$$

В выражениях (7), (8) для моментов $M_c(t_2)$ и $M_c(t_1)$ введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \cos \varphi \left(\frac{\pi/2 - \varphi}{2} + \frac{1}{\pi/2 - \varphi} \right) - 1 &= \gamma_1, \\ \sin \varphi \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\varphi} \right) - 1 &= \gamma_2. \end{aligned}$$

Тогда моменты сил $t_1(s)$, $t_2(s)$ относительно точки C запишем как

$$\begin{aligned} M_c(t_1) &= 4hR_a\gamma_1 \frac{\alpha(t)}{l} \sigma_z^0(A), \\ M_c(t_2) &= 4hR_b\gamma_2 \frac{\beta(t)}{l} \sigma_z^0(B). \end{aligned}$$

Уравнения равновесия (3) с учетом связей между величинами R_c , ψ и R_a , R_b , φ запишем в виде [4]:

$$\begin{aligned} M_b &= \frac{p}{2}(b^2 - x_0^2 - y_0^2) + M_c(t_2) + T_1(b - y_0), \\ M_a &= \frac{p}{2}(a^2 - x_0^2 - y_0^2) - M_c(t_1) - T_2(a - x_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Система (10) замыкается условием (9). Характер решения системы (9), (10) зависит от вида определяющих соотношений для материала оболочки.

Линейно вязкий материал оболочки. В этом случае определяющие соотношения имеют вид [7]

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_\theta &= \Lambda \sigma'_\theta, \quad \dot{\epsilon}_z = \Lambda \sigma'_z, \\ \sigma'_\theta &= \frac{2}{3} \sigma_\theta - \frac{1}{3} \sigma_z, \quad \sigma'_z = \frac{2}{3} \sigma_z - \frac{1}{3} \sigma_\theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\dot{\epsilon}_\theta$ и $\dot{\epsilon}_z$, σ_θ и σ_z — главные скорости деформаций и главные напряжения в окружном θ и продольном z направлениях; Λ — постоянная материала оболочки, $\text{м}^2/(\text{Н} \cdot \text{с})$.

Из уравнений (11) следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \Lambda^{-1}(2\dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_z), \\ \sigma_z &= \Lambda^{-1}(2\dot{\epsilon}_z + \dot{\epsilon}_\theta). \end{aligned} \quad (12)$$

Уже было оговорено, что вследствие свободы изгибания оболочки в окружном направлении (сечение $z = 0$) пренебрегаем изменением длины срединной поверхности этого сечения. Пусть ξ — координата по толщине оболочки, тогда выражения для скоростей деформаций

принимают вид

$$\dot{\epsilon}_\theta = \dot{\kappa}_\theta \xi \quad (\dot{\epsilon}_\theta^0 = 0), \quad \dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_z^0 + \dot{\kappa}_z \xi,$$

где $\dot{\epsilon}_z^0$ — скорость деформации срединной поверхности в направлении оси OZ ; $\dot{\kappa}_\theta$ и $\dot{\kappa}_z$ — скорости изменения главных кривизн.

Вычислим скорости изменения кривизн в продольном направлении в точках B ($z = 0, \theta = \pi/2$), A ($z = 0, \theta = 0$) соответственно:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_z &= \dot{y}''(z) = \frac{1}{4} \dot{\beta}(t) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2, \\ \dot{\kappa}_z &= \dot{x}''(z) = -\frac{1}{4} \dot{\alpha}(t) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2. \end{aligned}$$

Из выражений (12) получим выражения для напряжений:

средние значения напряжений в точках B и A соответственно

$$\dot{\sigma}_z^{01} = 2\Lambda^{-1} \dot{\epsilon}_z^{01}, \quad \dot{\sigma}_z^{02} = 2\Lambda^{-1} \dot{\epsilon}_z^{02},$$

главные напряжения в окружном направлении в точках B и A

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta B} &= \Lambda^{-1} \left[2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{R_b} \right) \xi + \dot{\epsilon}_z^{01} + \frac{1}{4} \dot{\beta} \left(\frac{\pi}{l} \right) \xi \right], \\ \sigma_{\theta A} &= \Lambda^{-1} \left[2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{R_a} \right) \xi + \dot{\epsilon}_z^{02} - \frac{1}{4} \dot{\alpha} \left(\frac{\pi}{l} \right) \xi \right]. \end{aligned}$$

Ограничимся подробным изучением этапа I деформирования срединного сечения.

Вычислим моменты M_θ (в окружном направлении) в точках A и B :

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{2}{3} \frac{h^3}{\Lambda} \left[2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{R_a} \right) - k \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \dot{\alpha}(t) \right], \\ M_b &= \frac{2}{3} \frac{h^3}{\Lambda} \left[2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{R_b} \right) - k \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \dot{\beta}(t) \right]. \end{aligned}$$

Коэффициент k имеет следующие значения: при шарнирном закреплении равен $1/4$, при жесткой заделке — $1/2$.

Из геометрических соотношений (см. рис. 1, *a*) на этапе I имеем зависимости ($\dot{\varphi} \approx 0$):

$$\begin{aligned} b(t) &= R_b - (R_b - R_a) \cos \varphi \Rightarrow \dot{b}(t) = \dot{R}_b(1 - \cos \varphi) + \dot{R}_a \cos \varphi, \\ \beta(t) &= b_0 - b(t) \Rightarrow \dot{\beta} = -\dot{b}(t) = -(\dot{R}_b(1 - \cos \varphi) + \dot{R}_a \cos \varphi), \\ a(t) &= R_a(1 - \sin \varphi) + R_b \sin \varphi \Rightarrow \dot{a}(t) = \dot{R}_a(1 - \sin \varphi) + \dot{R}_b \sin \varphi, \\ \alpha(t) &= a(t) - a_0 \Rightarrow \dot{\alpha}(t) = \dot{R}_a(1 - \sin \varphi) + \dot{R}_b \sin \varphi. \end{aligned}$$

Для деформаций запишем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z^0 &= \varepsilon_z^{02}, \quad \varepsilon_z^0 = \varepsilon_z^{01}, \quad \varepsilon_z^{02} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \beta^2, \quad \varepsilon_z^{01} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \alpha^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{\varepsilon}_z^{02} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \beta \dot{\beta}, \quad \dot{\varepsilon}_z^{01} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \alpha \dot{\alpha}.\end{aligned}$$

Вычислим соответствующие средние напряжения в плоскостях Oyz и Oxz и силы в точках B и A :

$$\begin{aligned}\sigma_z^{02} &= \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \beta \dot{\beta}, \quad \sigma_z^{01} = \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \alpha \dot{\alpha} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_2(B) = 4h \frac{\beta(t)}{l} \sigma_z^{02} = 4 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \beta^2 \dot{\beta}, \\ t_1(A) &= 4h \frac{\alpha(t)}{l} \sigma_z^{01} = 4 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \alpha^2 \dot{\alpha} \Rightarrow \\ &\Rightarrow T_2 = 2h \frac{\beta}{l} \sigma_z^{02} \varphi = 2 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \beta^2 \dot{\beta} \varphi, \\ T_1 &= 2h \frac{\alpha}{l} \sigma_z^{01} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = 2 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \alpha^2 \dot{\alpha} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right), \\ M_c(t_2) &= 4 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \gamma_2 R_b \beta^2 \dot{\beta}, \\ M_c(t_1) &= 4 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \gamma_1 R_a \alpha^2 \dot{\alpha}.\end{aligned}$$

Запишем уравнения равновесия (10) на этапе I:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} \Lambda^{-1} h^3 \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{R_b} \right) + k \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \dot{\beta}(t) \right\} &= \\ &= \frac{p}{2} (b^2 - x_0^2 - y_0^2) + 4 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \gamma_2 R_b \beta^2 \dot{\beta} + \\ &\quad + 2 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) (b - y_0) \alpha^2 \dot{\alpha}, \\ \frac{2}{3} \Lambda^{-1} h^3 \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{R_a} \right) - k \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \dot{\alpha}(t) \right\} &= \\ &= \frac{p}{2} (a^2 - x_0^2 - y_0^2) - 4 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \gamma_1 R_a \alpha^2 \dot{\alpha} - \\ &\quad - 2 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \varphi (a - x_0) \beta^2 \dot{\beta}.\end{aligned} \tag{13}$$

Все входящие в уравнения (13) линейные α , β , a , b и другие величины отнесем к длине дуги BCA $L = (\pi/2)R_0$; параметр толщины оболочки $\bar{h} = 2h/(\pi R_0)$ — отношение половины толщины к длине дуги BCA , $\bar{l} = 2l/(\pi R_0)$ — параметр удлинения; введем безразмерное

время $\tau = t\Lambda p$; дифференцирование будем осуществлять по параметру τ . Все безразмерные линейные величины в дальнейшем сохраняют свои прежние обозначения.

Приведем систему (13) к каноническому виду:

$$\begin{aligned} a_{11}\dot{R}_b + a_{12}\dot{R}_a &= b_1, \\ a_{21}\dot{R}_b + a_{22}\dot{R}_a &= b_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Коэффициенты матрицы системы (14) выразим в виде

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{4}{3}h^3 - \frac{2}{3}\pi^2kh^3\frac{R_b^2}{l^2}(1 - \cos\varphi) + \pi^2h\frac{R_b^3}{l^3}\gamma_2\beta^2(1 - \cos\varphi) - \\ &\quad - \frac{\pi^2}{2}\frac{hR_b^2}{l^3}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)(b - y_0)\alpha^2\sin\varphi, \\ a_{12} &= -\frac{2}{3}\pi^2kh^3\frac{R_b^2}{l^2}\cos\varphi + \pi^2h\frac{R_b^3}{l^3}\gamma_2\beta^2\cos\varphi - \\ &\quad - \frac{\pi^2}{2}\frac{hR_b^2}{l^3}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)(b - y_0)\alpha^2(1 - \sin\varphi), \\ b_1 &= \frac{R_b^2}{2}(b^2 - x_0^2 - y_0^2); \\ a_{21} &= -\frac{2}{3}\pi^2kh^3\frac{R_a^2}{l^2}\sin\varphi + \pi^2h\frac{R_a^3}{l^3}\gamma_1\alpha^2\sin\varphi - \frac{\pi^2}{2}\frac{hR_a^2}{l^3}\varphi(a - x_0)\beta^2(1 - \cos\varphi), \\ a_{22} &= -\frac{4}{3}h^3 - \frac{2}{3}\pi^2kh^3\frac{R_a^2}{l^2}(1 - \sin\varphi) + \pi^2h\frac{R_a^3}{l^3}\gamma_1\alpha^2(1 - \sin\varphi) - \\ &\quad - \frac{\pi^2}{2}\frac{hR_a^2}{l^3}\varphi(a - x_0)\beta^2\cos\varphi, \\ b_2 &= \frac{R_a^2}{2}(a^2 - x_0^2 - y_0^2). \end{aligned}$$

Здесь $\varphi = \left(1 - \frac{\pi}{2}R_a\right) / (R_b - R_a)$;

$$\alpha(\tau) = a(\tau) - a_0, \quad a = R_a(1 - \sin\varphi) + R_b\sin\varphi;$$

$$\beta(\tau) = b_0 - b(\tau), \quad b = R_b(1 - \cos\varphi) + R_a\cos\varphi;$$

$$x_0 = R_b\sin\varphi; \quad y_0 = R_a\cos\varphi; \quad \gamma_2 = \frac{\varphi}{2}\sin\varphi + \frac{\sin\varphi}{\varphi} - 1;$$

$$\gamma_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\frac{\cos\varphi}{2} + \frac{\cos\varphi}{\pi/2 - \varphi} - 1.$$

Систему (14) решим при начальных условиях [4]:

$$R_a(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{\alpha_0}{\sqrt{2} - 1}, \quad R_b(0) = \frac{2}{\pi} + \frac{\alpha_0}{\sqrt{2} - 1}.$$

Считаем, что во время нагружения возрастающим давлением $p < p_3$, начальное (для решения задачи ползучести) значение эксцентриситета

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_{00}}{1 - p/p_3},$$

где p_3 — эйлерово давление для бесконечно длинной оболочки [8].

В табл. 1 и 2 представлены результаты решения системы (14) [6]:

Таблица 1

Результаты решения системы (14) в зависимости от параметра \bar{l} ($\bar{h} = 0,03$)

\bar{l}	∞	12,5	5	2,5
$R_a(10)$	0,6325	0,6325	0,6325	0,6325
$R_b(10)$	0,6407	0,6407	0,6407	0,6407
R_a^*	0,3070	0,2997	0,1835	0,0419
R_b^*	∞	∞	∞	∞
τ_*	106,5	108,5	154	1080

Из табл. 1 следует, что параметр \bar{l} (при фиксированном значении параметра толщины $\bar{h} = 0,03$) влияет на время протекания τ^* этапа I и конечную конфигурацию срединного сечения в конце этапа I: чем короче оболочка, тем сильнее сплющивается при $\tau = \tau^*$ ее срединное сечение, о чем можно судить по радиусу R_a^* ; оболочку, длина которой превышает 12,5, можно считать бесконечно длинной ($R_a(10)$, $R_b(10)$ — значения радиусов R_a и R_b при безразмерном времени $\tau = 10$).

Таблица 2

Результаты решения системы (14) в зависимости от параметра \bar{h} ($\bar{l} = 2,5$)

\bar{h}	0,030	0,017	0,012
$R_a(10)$	0,6325	0,6094	0,5058
$R_b(10)$	0,6407	0,6662	0,7707
R_a^*	0,0419	0,0177	0,0097
R_b^*	∞	∞	∞
τ_*	1080	1130	1215

Напомним, что значения радиусов R_a и R_b определены при $\tau = 10$. Естественно, чем тоньше оболочка, тем сильнее сплющивается срединное сечение при $\tau = \tau^*$, и время завершения этапа I немного увеличивается.

На рис. 6 показана характерная картина завершения этапа I деформирования линейно вязкой короткой оболочки ($\bar{l} < 5$). Очевидно, что для таких оболочек рассматривать этап II не имеет смысла.

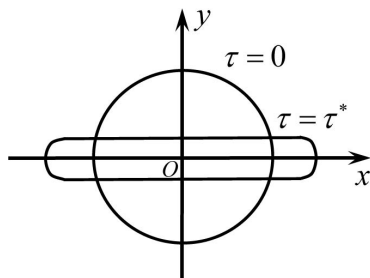


Рис. 6. Форма срединного поперечного сечения линейно вязкой оболочки в начале и в конце этапа I деформирования

Линейно упругий материал оболочки. В этом случае, согласно закону Гука,

$$\sigma_i = \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_i + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (15)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tau_{ij}, \quad i \neq j.$$

Здесь E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; ε_i — нормальные деформации; σ_i и σ_{ij} — нормальные и касательные напряжения; τ_{ij} — деформации сдвига.

В силу статической гипотезы теории оболочек напряжением σ_3 (нормальным к срединной поверхности оболочки) в уравнениях (15) пренебрегаем [9], и тогда из третьего уравнения получаем

$$\varepsilon_3 + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{1 - \nu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

При этом первый инвариант тензора деформаций срединной поверхности запишем в виде

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (16)$$

Подставив равенство (16) в уравнения (15), найдем

$$\sigma_1 = \sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_z), \quad \sigma_2 = \sigma_z = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_\theta). \quad (17)$$

Для оболочки, толщина которой равна $2h$, выражения для моментов в окружном направлении в точках A и B (сечение $z = 0$) имеют вид

$$M_\theta = M_{a,b} = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1 - \nu^2} (\kappa_{a,b}^\theta + \nu \kappa_{a,b}^z).$$

Здесь $\kappa^{\theta,z}$ — приращения кривизны в окружном и продольном направлениях.

Приращения кривизны в окружном направлении в точках A и B соответственно можно представить следующим образом:

$$\kappa_a^\theta = \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_{a0}}, \quad \kappa_b^\theta = \frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_{b0}}.$$

Считаем, что в продольном направлении первоначальная кривизна равна нулю, поэтому имеем

$$\kappa_a^z = x''(z), \quad \kappa_b^\theta = y''(z).$$

Как уже отмечалось, в окружном направлении срединная поверхность оболочки изометрична, поэтому из равенств (17) получим

$$\varepsilon_\theta = 0 \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \varepsilon_z, \quad \sigma_z = \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_z,$$

где σ_θ — напряжение в окружном направлении элемента срединной поверхности в точках B и A ; σ_z — мембранное напряжение в продольном направлении.

Поскольку деформация оболочки

$$\varepsilon_z = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \beta^2 & \text{— на образующей } BB', \\ \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \alpha^2 & \text{— на образующей } AA', \end{cases}$$

тогда средние напряжения в оболочке в направлении оси Oz

$$\sigma_z^0 = \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_z = \begin{cases} \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \beta^2 & \text{— на } BB', \\ \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \alpha^2 & \text{— на } AA'. \end{cases} \quad (18)$$

Силы в точках B и A соответственно имеют вид

$$t_2(B) = 4h \frac{\beta}{l} \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \beta^2,$$

$$t_1(A) = 4h \frac{\alpha}{l} \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \alpha^2.$$

Согласно формулам (6), (7), для равнодействующих распределенных по дуге BCA сил $t_2(s)$, $t_1(s)$ и их моментов относительно точки C

получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} T_2 &= 2h \frac{\beta}{l} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \beta^2 \varphi, \\ T_1 &= 2h \frac{\alpha}{l} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \alpha^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \\ M_c(t_2) &= 4h \frac{\beta}{l} \gamma_2 R_b \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \beta^2, \\ M_c(t_1) &= 4h \frac{\alpha}{l} \gamma_1 R_a \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \alpha^2. \end{aligned}$$

Запишем систему уравнений равновесия срединного сечения:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_{b0}} \right) - \nu k \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \beta \right] &= \frac{p}{2} (b^2 - x_0^2 - y_0^2) + \\ &+ 4h R_b \frac{\beta}{l} \gamma_2 \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 + 2h \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\alpha}{l} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \alpha^2 (b - y_0), \\ \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_{a0}} \right) + \nu k \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \alpha \right] &= \frac{p}{2} (a^2 - x_0^2 - y_0^2) - \\ &- 4h R_a \frac{\alpha}{l} \gamma_1 \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 - 2h \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\beta}{l} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \varphi \beta^2 (a - x_0). \end{aligned} \quad (19)$$

Приведем систему (19) к безразмерному виду (все линейные величины отнесем к длине дуги ACB $L = (\pi/2)R_0$) и выделим параметр нагружения $\lambda = \frac{p}{p_3}$, где $p_3 = 2 \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{h}{R_0} \right)^3$ — эйлерово (бифуркационное) давление для бесконечно длинной оболочки [10].

Систему уравнений равновесия представим в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_{b0}} - \pi^2 \nu k \frac{\beta}{l^2} &= \frac{3\pi^3}{16} \lambda (b^2 - x_0^2 - y_0^2) + \\ &+ \frac{3}{2} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \gamma_2 \beta^3 R_b + \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \alpha^3 (b - y_0), \\ \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_{a0}} - \pi^2 \nu k \frac{\alpha}{l^2} &= \frac{3\pi^3}{16} \lambda (a^2 - x_0^2 - y_0^2) - \\ &- \frac{3}{2} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \gamma_1 \alpha^3 R_a - \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \varphi \beta^3 (a - x_0). \end{aligned} \quad (20)$$

Безразмерными геометрическими параметрами оболочки в системе (20) являются: параметр толщины h — отношение половины толщины оболочки к длине дуги BCA ; параметр длины l — отношение половины длины оболочки к длине дуги BCA . Краевые условия определяют значение параметра k : $1/2$ — при жесткой заделке краевых сечений; $1/4$ — при шарнирном закреплении краевых сечений, которые в обоих случаях считаем окружностями радиусом R_0 .

Пусть параметр нагружения λ непрерывно (квазистатически) возрастает. Продифференцируем уравнения (20) по параметру λ :

$$\begin{aligned}
 -\dot{R}_b - \pi \nu k \frac{1}{l^2} R_b^2 \dot{\beta} &= \frac{3\pi^3}{16} R_b^2 (b^2 - x_0^2 - y_0^2) + \\
 &+ \frac{3\pi^3}{8} \lambda R_b^2 (b\dot{b} - x_0\dot{x}_0 - y_0\dot{y}_0) + \frac{9}{2} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \gamma_2 R_b^3 \beta^2 \dot{\beta} + \frac{3}{2} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \gamma_2 \beta^3 R_b^2 \dot{R}_b + \\
 &+ \frac{9}{4} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) R_b^2 (b - y_0) \alpha^2 \dot{\alpha} + \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \alpha^3 R_b^2 (\dot{b} - \dot{y}_0), \\
 -\dot{R}_a + \pi^2 \nu k \frac{1}{l^2} R_a^2 \dot{\alpha} &= \frac{3\pi^3}{16} R_a^2 (a^2 - x_0^2 - y_0^2) + \\
 &+ \frac{3\pi^3}{8} \lambda R_a^2 (a\dot{a} - x_0\dot{x}_0 - y_0\dot{y}_0) - \frac{9}{2} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \gamma_1 R_a^3 \alpha^2 \dot{\alpha} - \frac{3}{2} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \gamma_1 \alpha^3 R_a^2 \dot{R}_a - \\
 &- \frac{9}{4} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \varphi R_a^2 (a - x_0) \beta^2 \dot{\beta} - \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \varphi \beta^3 R_a^2 (\dot{a} - \dot{x}_0).
 \end{aligned} \tag{21}$$

Полученная система (21) замыкается условием постоянства длины дуги BCA , из которого (в безразмерных величинах) следует выражение для угла φ :

$$R_b \varphi + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) R_a = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{1 - \frac{\pi}{2} R_a}{R_b - R_a}.$$

Используя геометрические соотношения для этапа I процесса деформирования срединного сечения

$$\alpha = a(\lambda) - a_0, \quad a(\lambda) = R_a(1 - \sin \varphi) + R_b \sin \varphi,$$

$$x_0(\lambda) = R_b \sin \varphi, \quad \beta(\lambda) = b_0 - b(\lambda),$$

$$b(\lambda) = R_b(1 - \cos \varphi) + R_a \cos \varphi, \quad y_0(\lambda) = R_a \cos \varphi,$$

запишем систему (21) в каноническом виде:

$$\begin{aligned}
 a_{11} \dot{R}_b + a_{12} \dot{R}_a &= \frac{3\pi^3}{16} R_b^2 (b^2 - x_0^2 - y_0^2), \\
 a_{12} \dot{R}_b + a_{22} \dot{R}_a &= \frac{3\pi^3}{16} R_a^2 (a^2 - x_0^2 - y_0^2).
 \end{aligned} \tag{22}$$

Коэффициенты системы (22) имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -1 + \frac{\pi^2}{l^2} \nu k R_b^2 (1 - \cos \varphi) - \frac{3\pi^3}{8} \lambda R_b^2 (b(1 - \cos \varphi) - R_b \sin^2 \varphi) + \\
 &+ \frac{9}{2} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \gamma_2 R_b^3 \beta^2 (1 - \cos \varphi) - \frac{3}{2} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \gamma_2 R_b^2 \beta^3 - \\
 &- \frac{9}{4} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) R_b^3 \alpha^2 (1 - \cos \varphi) \sin \varphi - \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) R_b^2 \alpha^3 (1 - \cos \varphi),
 \end{aligned}$$

$$a_{12} = \frac{\pi^2}{l^2} \nu k R_b^2 \cos \varphi - \frac{3\pi^3}{8} \lambda R_b^2 (b \cos \varphi - R_a \cos^2 \varphi) + \\ + \frac{9}{2} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \gamma_2 R_b^3 \beta^2 \cos \varphi - \frac{9}{4} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) R_b^3 \alpha^2 (1 - \cos \varphi) (1 - \sin \varphi);$$

$$a_{21} = \frac{\pi^2}{l^2} \nu k R_a^2 \sin \varphi - \frac{3\pi^3}{8} \lambda R_a^2 (a \sin \varphi - R_b \sin^2 \varphi) + \\ + \frac{9}{2} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \gamma_1 R_a^3 \alpha^2 \sin \varphi - \frac{9}{4} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \varphi R_a^3 \beta^2 (1 - \sin \varphi) (1 - \cos \varphi),$$

$$a_{22} = -1 + \frac{\pi^2}{l^2} \nu k R_a^2 (1 - \sin \varphi) - \frac{3\pi^3}{8} \lambda R_a^2 (a(1 - \sin \varphi) - R_a \cos^2 \varphi) - \\ - \frac{9}{2} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \gamma_1 R_a^3 \alpha^2 (1 - \sin \varphi) + \frac{3}{2} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \gamma_1 R_a^2 \alpha^3 - \\ - \frac{9}{4} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \varphi R_a^3 \beta^2 (1 - \sin \varphi) \cos \varphi + \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{h^2 l^3} \varphi R_a^2 \beta^3 (1 - \sin \varphi);$$

$$b_1 = \frac{3\pi^3}{16} (b^2 - x_0^2 - y_0^2), \quad b_2 = \frac{3\pi^3}{16} (a^2 - x_0^2 - y_0^2).$$

Решим систему (22) относительно первых производных \dot{R}_b и \dot{R}_a :

$$\begin{aligned} \dot{R}_b &= f_1(R_a, R_b, k, h, l, \lambda), \\ \dot{R}_a &= f_2(R_a, R_b, k, h, l, \lambda). \end{aligned} \quad (23)$$

Решение системы (23) при начальных условиях

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \beta_0, \quad R_{a0} = \frac{2}{\pi} - \frac{\alpha_0}{\sqrt{2} - 1}, \quad R_{b0} = \frac{2}{\pi} + \frac{\alpha_0}{\sqrt{2} - 1}$$

позволило выявить особенность поведения срединного сечения упругой оболочки: при возрастании внешнего давления $\lambda \in [0, \lambda^*)$ ($\lambda^* \approx 0,8$, значение параметра $\lambda^* = 1$ соответствует эйлерову давлению для бесконечно длинной оболочки) этап I завершается, если $\dot{R}_b(\lambda) \rightarrow \infty$ при конечном значении $R_b = R_b^*$.

На рис. 7 показаны характерная конфигурация срединного сечения и зависимость $R_b = R_b(\lambda)$ при $\alpha_0 = 0,01$, $l/R_0 = 4,7$, $k = 1/4$.

Зависимость $R_b = R_b(\lambda)$ представляет собой картину нарушения корректности квазистатической постановки: при конечном изменении основной характеристики процесса $R_b \rightarrow R_b^*$ скорость $\dot{R}_b \rightarrow \infty$ [11].

Отметим, что перемещения точек B и A в процессе нагружения имеют порядок нескольких толщин оболочки, т.е. в рамках нашего подхода — малые перемещения; при $\alpha_0 \rightarrow 0$ значение $\lambda^* \rightarrow 1$ (стремится к эйлерову значению).

Полагая перемещения малыми ($\alpha^2, \beta^2 \ll \alpha, \beta \ll 1$, причем $\beta = \alpha$), проведем асимптотический анализ на основании любого из уравнений системы (23).

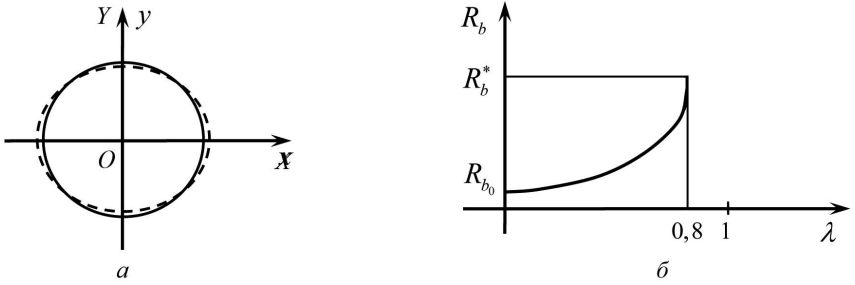


Рис. 7. Форма поперечного сечения упругой оболочки в начале (—) и в конце при $\lambda = \lambda^*$ (- - -) процесса деформирования (а); зависимость радиуса R_b от параметра нагружения λ (б)

Для линейно упругой оболочки критическим будем называть такое значение параметра λ , при котором $\alpha \rightarrow \infty$.

Таким образом, формула критического давления для упругой оболочки конечной длины имеет вид [12]:

$$p_* = \frac{2}{3} \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{h}{R_0} \right)^3 \left[\sqrt{2} + 1 + 4k \left(\frac{\pi R_0}{2l} \right)^2 \right]. \quad (24)$$

В работе [8] при изучении устойчивости равновесия круговой формы кольца (под действием внешнего гидростатического давления) выведена формула критического (по Эйлеру) значения интенсивности давления, когда по длине окружности образуются две полуволны синусоиды:

$$q_{кр} = \frac{3EI}{R_0^3}, \quad (25)$$

где I — момент инерции прямоугольного поперечного сечения кольца.

В случае бесконечно длинной цилиндрической оболочки (длинной трубы), равномерно сжатой внешним давлением, рассмотрим элементарное кольцо единичной ширины и получим критическое значение давления. Подставляя $\frac{E}{1 - \nu^2}$ вместо E и учитывая, что $I = \frac{2}{3}h^3$ (для прямоугольного сечения $1 \times 2h$) [10], согласно формуле (25), имеем

$$p_3 = 2 \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{h}{R_0} \right)^3. \quad (26)$$

Из выражения (24) при $l \rightarrow \infty$ получим

$$p_* = 2 \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{h}{R_0} \right)^3 \frac{\sqrt{2} + 1}{3},$$

т. е. $p_* = 0,805p_3$. Данный результат представляется естественным: в нашем подходе при давлении $p > 0$ сразу начинается процесс деформирования, т. е. сечение оказывается более податливым, чем при эйлеровом рассмотрении.

Сравним результат решения системы уравнений (23) с вычислениями по формуле (24), $l/R_0 = 4,7$ (см. рис. 7). При шарнирном закреплении: $k = 1/4 \Rightarrow p_* \approx 0,84p_3$; при жесткой заделке конечных сечений $k = 1/2 \Rightarrow p_* \approx 0,88p_3$.

Полученные значения критических давлений хорошо согласуются с решением системы (23).

Заключение. Решение задачи о больших перемещениях точек срединной поверхности цилиндрической оболочки конечной длины представлено как развитие кинематической схемы сплющивания бесконечно длинной оболочки (кольца).

Основные результаты данной работы:

1) на примере решения уравнений равновесия линейно вязкой оболочки показано, что при значении параметра длины, большем 10, оболочку можно считать бесконечно длинной, т. е. не учитывать влияние конечных закреплений на процесс деформирования;

2) для линейно упругой оболочки получена асимптотическая формула для вычисления критического давления. Вычисленные по этой формуле значения критического давления адекватны результату численного решения системы уравнений равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Муштари Х.М., Галимов К.З. *Нелинейная теория упругих оболочек*. Казань, Таткнигоиздат, 1957, 431 с.
- [2] Новожилов В.В. *Теория тонких оболочек*. Ленинград, Судпромгиз, 1962, 378 с.
- [3] Лопаницын Е.А., Матвеев Е.А. Устойчивость цилиндрических оболочек с начальными несовершенствами под действием внешнего давления. *Известия РАН. МТТ*, 2011, № 2, с. 17–25.
- [4] Ванько В.И., Шестериков С.А. Сплющивание кольца в условиях ползучести. *Инженерный журнал. МТТ*, 1966, № 5, 127–130 с.
- [5] Ванько В.И., Шестериков С.А. Нелинейно-вязкие цилиндрические оболочки под внешним давлением. *Известия АН СССР. МТТ*, 1971, № 1, с. 110–114.
- [6] Ванько В.И. *Продольный изгиб и выпучивание*. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, МГУ, 1966, 136 с.
- [7] Odquist F.K.G. *Mathematical theory of creep and creep rupture*. Oxford, Clarendon Press, 1966, 168 p.
- [8] Вольмир А.С. *Устойчивость упругих систем*. Москва, Физматгиз, 1963, 879 с.
- [9] Филин А.П. *Элементы теории оболочек*. Ленинград, Стройиздат, 1974, 256 с.
- [10] Тимошенко С.П. *Устойчивость упругих систем*. Москва, ГТИ, 1955, 568 с.
- [11] Ванько В.И. О критериях выпучивания в условиях ползучести. *Прикладная механика и техническая физика*, 1965, № 2, с. 127–130.
- [12] Ванько В.И. Цилиндрическая оболочка под внешним давлением: неклассическое решение задачи о больших перемещениях. *Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского*, 2011, № 4, ч. 4, с. 1413–1414.

Статья поступила в редакцию 20.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Ванько В.И. Цилиндрические оболочки конечной длины под внешним давлением. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 8.
URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/884.html>

Ванько Вячеслав Иванович — д-р техн. наук, проф. кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: vvanko@mail.ru