УДК 378.147

Использование интерактивных методов при выполнении и самопроверке домашних заданий по физике

© И.С. Яковенко, А.В. Купавцев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Обсуждается возможность использования пакета Maple студентами младших курсов высших учебных заведений для выполнения и самопроверки домашнего задания по физике. Самопроверка является обязательной составляющей каждого технического проекта и важнейшим элементом обучения и самообучения естественным наукам. Показаны различные способы и средства самоконтроля при выполнении домашнего задания о затухающем колебании.

Ключевые слова: *язык пакета Maple, механические затухающие колебания, компьютерная самопроверка решения физической задачи.*

Одним из перспективных направлений в обучении физике студентов технического университета является использование персональных компьютеров в образовательном процессе. Современное программное обеспечение позволяет легко и быстро выполнить рутинную составляющую семестровых домашних заданий и курсовых проектов, значительно увеличить наглядность, а также интерактивность курса общей физики в технических университетах. Графические возможности таких программных пакетов, как Maple, Mathema-tica, MATLAB, позволяют разрабатывать демонстрационные и методические материалы, которые развивают классический курс за счет элементов программирования и математического моделирования. Учебно-методические материалы на основе современных математических программных пакетов дают возможность студентам проводить исследования в различных областях математики, физики и техники.

Близость математического языка и синтаксиса языка символьных вычислений пакета Maple делает использование последнего интуитивно понятным и не требует каких-либо дополнительных навыков программирования на начальном уровне [1]. Обучение основным конструкциям языка может быть включено непосредственно в процесс решения учебных задач и проблем. Ниже приведем пример решения задачи из семестрового домашнего задания по физике.

По условию задачи, студенту необходимо провести исследование колебательной системы в виде горизонтального пружинного маятника, в которой происходят затухающие колебания. При этом заданы значения массы m, постоянной силы трения r и постоянной упругости пружины k, а также длина l_0 нерастянутой пружины, длина пружины l_1 в начальный момент времени и скорость маятника v_0 в начальный момент времени.

Общий вид дифференциального уравнения, описывающего затухающие колебания в системе,

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \qquad (1)$$

Решением этого уравнения является функция

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (2)$$

Здесь $x(t)$ – смещение маятника относительно центра равновесия; A_0, φ_0 – амплитуда и фаза, определяемые из начальных условий; $2\delta = \frac{r}{m}$; δ – коэффициент затухания; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$; ω_0 – собственная частота гармонических колебаний; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – собственная частота затухающих колебаний.

Точный вид решения, при заданных параметрах маятника и начальных условиях находим из решения системы алгебраических уравнений относительно неизвестных A_0 и φ_0:

$$\begin{aligned} x(0) &= l_0 - l_1; \\ \dot{x}(0) &= v_0. \end{aligned} \qquad (3)$$

После определения неизвестных величин A_0 и φ_0 необходимо убедиться в правильности полученного решения. Умение выполнять различные проверки предлагаемых решений является существенной составляющей профессиональной компетенции инженера и содержит в себе активную образовательную функцию [2].

Первым этапом самопроверки является вычисление периода затухающих колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$ и периода гармонических колебаний $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Для этих двух величин всегда должно выполняться неравенство $T > T_0$. Такую проверку легко осуществить с помощью пакета Maple. Для этого сначала нужно присвоить значение параметров маятника соответствующим переменным:

```
> m := 0.3 ; k := 15 ; r := 0.22
```

$$m := 0.3$$
$$k := 15$$
$$r := 0.22$$

Далее определим значения неизвестных величин δ, ω и ω_0:

> $\delta := \frac{r}{2 \cdot m}$; $\omega 0 := \mathrm{sqrt}\left(\frac{k}{m}\right)$; $\omega := \mathrm{sqrt}\left(\omega 0^2 - \delta^2\right)$

$$\delta := 0.3667$$
$$\omega 0 := 7.0711$$
$$\omega := 7.0616$$

И, наконец, имея все необходимые данные, можно выполнить проверку соотношения между периодами T и T_0:

> $T := \frac{2 \cdot \mathrm{Pi}}{\omega}$; $T0 := \frac{2 \cdot \mathrm{Pi}}{\omega 0}$

$$T := 0.2832\,\pi$$
$$T0 := 0.2828\,\pi$$

Сравнивая эти значения, приходим к выводу, что T и T_0 удовлетворяют неравенству $T > T_0$.

Основой следующей проверки является закон убывания полной механической энергии при действии сил трения, который можно записать в следующем виде:

$$\left(W''_{\text{п}} - W'_{\text{п}}\right) = -r\int_0^{t_1} v(t)^2\, dt, \tag{4}$$

где $W'_{\text{п}} = \frac{kx(0)^2}{2} + \frac{mv(0)^2}{2} = \frac{k\left(l_1 - l_0\right)^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2}$ – начальная полная энергия системы; $W''_{\text{п}} = \frac{kx(t_1)^2}{2}$ – полная энергия системы в момент времени t_1, выбранный таким образом, что $v(t_1) = 0$; $r\int_0^{t_1} v(t)^2\, dt$ – диссипация энергии системы за промежуток времени $t \in [0, t_1]$.

Начнем выполнение проверки закона сохранения энергии в пакете Maple с присваиванием переменным заданных начальных условий, а также с учетом полученных из решения системы уравнений (1.3) величин A_0 и φ_0:

> $l1 := 4$; $l0 := 1$; $v0 := 0.5$; $A0 := 3.0085$; $\phi 0 := -0.0753$

$$l1 := 4$$
$$l0 := 1$$
$$v0 := 0.5000$$
$$A0 := 3.0085$$
$$\phi 0 := -0.0753$$

Далее из уравнения $v(t_1) = 0$ определим момент времени t_1. Для этого присвоим переменной $x(t)$ решение в виде (2):

> $x(t) := A0 \cdot \exp(-\delta \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi 0)$

$$x := t \to A0\, \mathrm{e}^{-\delta t} \cos(\omega t + \phi 0)$$

Зависимость скорости от времени получим дифференцированием этого выражения с помощью оператора *diff*:

> $v(t) := diff(x(t), t)$

$$v := t \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t)$$

Найдем решение уравнения $v(t_1) = 0$ с помощью оператора *solve*:

> $Sol := solve(v(t1) = 0, \{t1\})$

$$Sol := \{t1 = 0.003316866738\}$$

По умолчанию, с помощью оператора *solve* определяется один корень уравнения, находящийся ближе всего к началу координат. Присвоим найденное значение переменной t_1 с помощью оператора *assign*:

> $assign(Sol)$

Далее проверим равенство (4). Левая часть равенства

> $\dfrac{k \cdot eval(x(t), t = t1)^2}{2} - \left(\dfrac{k \cdot (l1 - l0)^2}{2} + \dfrac{m \cdot v0^2}{2}\right)$

$$-0.0001$$

Здесь для вычисления значения функции $x(t)$ в точке $t = t_1$ используется оператор *eval*.

Правая часть равенства имеет вид

> $-r \cdot int\left(v(t)^2, t = 0 ..t1\right)$

$$-0.0001$$

Для вычисления интеграла $\int_0^{t_1} v(t)^2\, dt$ используем оператор *int*.

Сравнивая полученные значения можно заключить, что равенство (4) выполняется и решение согласуется с законом сохранения энергии.

Последний способ проверки заключается в построении графического изображения полученного решения. На графике необходимо отметить время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в *e* раз, это время, во-первых, должно соответствовать значению $\tau = 1/\delta$, во-вторых, число полных колебаний, за которое амплитуда уменьшится в e раз должно быть равно величине, обратной логарифмическому декременту затухания $\lambda = \ln\dfrac{A(t)}{A(t+T)}$, где $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$.

Благодаря широким графическим возможностям пакета Maple, выполнить такую проверку несложно. Сначала найдем значение τ из определения:

> $\tau := \dfrac{1}{\delta}$

$$\tau := 2.7273$$

Вычислим значение начальной амплитуды, уменьшенное в e раз:

> $A1 := evalf\left(\dfrac{A0}{\mathrm{e}}\right)$

$$A1 := 1.1068$$

Здесь для определения числового значения выражения используется оператор *evalf*.

Логарифмический декремент затухания:

> $\lambda := evalf\left(\ln\left(\dfrac{x(0)}{x(T)}\right)\right)$

$$\lambda := 0.3263$$

Число полных колебаний, за которое амплитуда уменьшается в e раз:

> $\mathrm{floor}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$

$$3$$

Здесь для округления значения до меньшего целого числа используется оператор *floor*.

Для того чтобы в полной мере задействовать графические возможности Maple, необходимо загрузить библиотеку *plots*. Загрузка библиотек осуществляется с помощью команды *with*:

> $with(plots)$:

Изобразим на одной координатной плоскости (x, t) графики зависимости величины $x(t)$, огибающей $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$, прямых $t = \tau$ и $x = A_0/e$ (см. рисунок). Для этого присвоим каждому из графиков отдельные переменные a, b, c, d:

> $a := plot(x(t),\ t = 0\,..10,\ thickness = 2,\ legend =$ "Затухающие Колебания") :

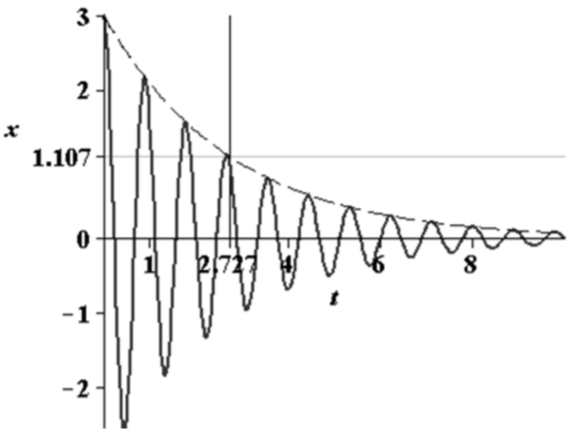
> $b := plot\big(A0 \cdot \exp(-\delta \cdot t),\ t = 0\,..10,\ color = blue,\ linestyle = dash,\ legend$
= "Огибающая амплитуды"$\big)$:

> $c := implicitplot\big(t = \tau,\ t = 0\,..10,\ x = 0\,..3,\ colour = black,\ legend$
= "Время за которое амплитуда уменьшится в е раз"$\big)$:

> $d := implicitplot(x = A1,\ t = 0\,..10,\ x = 0\,..3,\ colour =$ gray, $legend$
= "Значение равное начальной амплитуде уменьшенной в е раз") :

Для графиков $x(t)$ и $A(t)$ использован оператор *plot*, для графиков $t = \tau$ и $x = A_0/e$ – оператор *implicitplot*. Во всех случаях график строится для промежутка времени $t \in [0,10]$. Каждый из этих операторов имеет дополнительные опции, например: опция *thickness* задает толщину линии, опция *color* – цвет линии. С помощью опции *linestyle* для огибающей амплитуды задан стиль *dashed* («пунктирная»). Опцией *legend* для каждой линии задается подпись. Для того чтобы вывести все четыре графика на одной координатной плоскости, используется оператор *display*:

> $display\big(\{a, b, c, d\}, font = [ARIAL, BOLD, 14], tickmarks = \big[\big[\tau = \tau,\ 1 = 1,\ 4 = 4,\ 6 = 6,\ 8 = 8\big],\ [A1 = A1, -2 = -2, -1 = -1,\ 0 = 0,\ 2 = 2,\ 3 = 3]\big]\big)$



Графическая проверка найденного закона затухающих колебаний $x(t)$:

1 – затухающие колебания; *2* – огибающая амплитуда; 1, 727 с – время, за которое амплитуда уменьшается в *е* раз; 1, 107 м – начальная амплитуда

Оператор *dispay* также имеет свои опции; *font* задает параметры шрифта; с помощью *tickmarks* можно явно задать отметки на осях координат. Так, на оси *x* отмечены значения (–2, –1, 0, A1, 2, 3), на оси *t* – (1, τ, 4, 6, 8).

На рисунке видно, что точка пересечения прямых $t = \tau$ и $x = A_0 / e$ находится на кривой огибающей амплитуды, а число полных колебаний за время $t \in [0, \tau]$ равно трем, как и было найдено с помощью логарифмического декремента затухания. На этом графическая проверка результата завершается.

Система символьных вычислений Maple имеет значительный арсенал средств для решения разнообразных задач математики и математической физики. Решение сложных систем алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений, вычисление неопределенных интегралов, символьное дифференцирование – все эти математические операции требуют иного времени для выполнения и могут стать серьезным препятствием на пути к решению физических или математических задач. Со всеми этими проблемами система Maple легко справляется.

Возможности пакета Maple позволяют провести наглядную проверку результатов домашних заданий или курсовых проектов. Рассмотренные в работе методы проверки решения задачи о затухающих колебаниях не требуют глубоких знаний структуры пакета Maple и могут быть использованы студентами младших курсов технических университетов для более полного понимания задачи и ее решения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Сараев П.В. Основы использования математического пакета Maple в моделировании* Липецк, Международный институт компьютерных технологий, 2006, 119 с.

[2] *Купавцев А.В. Деятельностный аспект обучения физике в техническом вузе*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002, с. 87.

Статья поступила в редакцию 05.06.2013 г.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Яковенко И.С., Купавцев А.В. Использование интерактивных методов при выполнении и самопроверке домашних заданий по физике. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 8. URL: http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/878.html

Яковенко Иван Сергеевич – студент кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yakovenko.ivan@bk.ru

Купавцев Анатолий Владимирович – канд. педагог. наук, доцент кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: avkup@bk.ru