УДК 522.54:532.135

К теории нестационарных течений вязкопластических сред

© В.И. Вишняков, Л.Д. Покровский

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В рамках реологической модели Шведова – Бингама получено точное решение модельной задачи о движении квазитвердого ядра неньютоновской жидкости в бесконечном плоском канале при скачкообразном изменении градиента давления. Проведено сравнение числовой оценки с аналогичными результатами, полученными ранее другими авторами приближенными методами.

Ключевые слова: *реология, вязкопластическая среда, плоский канал.*

Реологическая модель Шведова – Бингама успешно применяется при описании разнообразных течений большого числа реальных вязкопластических сред [1]. Например, в процессе заполнения каналов в технологии формирования пластических масс необходимо учитывать особенности течения жидкости, связанные с ее неньютоновостью.

В одномерном случае реологическое уравнение вязкопластической среды Шведова – Бингама имеет вид [2]

$$\tau = \tau_0 \operatorname{sign}\frac{du}{dy} + \eta\frac{du}{dy}, \qquad (1)$$

где τ – касательное напряжение сдвига; τ_0 – его предельное значение, при котором начинается движение вязкопластической среды; η – коэффициент динамической вязкости; $\frac{du}{dy}$ – проекция градиента скорости на направление, перпендикулярное направлению движения среды. При $\tau > \tau_0$ вязкопластическая среда ведет себя как обыкновенная вязкая ньютоновская жидкость, при $\tau < \tau_0$ – как квазитвердое тело [3]. Поэтому для структуры течений этих сред характерно наличие зон (областей) вязкого течения и квазитвердых одновременно, хотя в исключительных случаях квазитвердые зоны могут отсутствовать [4]. Таким образом, решение задач о произвольных течениях вязкопластической среды в любом канале, как правило, связано с совместным описанием движений в вязких и квазитвердых зонах, на границах между которыми должны выполняться определенные условия.

Постановка задачи. В общем случае не удается получить точное аналитическое решение полной нестационарной задачи. В этой связи разработаны приближенные и численные методы, в том числе основанные на модификации уравнения Шведова – Бингама (см., например, работу [5]). Причем уравнения, описывающие движения среды в вязких и квазитвердых зонах, оказываются частично расщепленными. Это позволяет, оставаясь в рамках классической бингамовской реологической модели, при некоторых естественных дополнительных условиях рассмотреть отдельно движение квазитвердой зоны, найти точное решение задачи и установить его единственность. Такие решения представляют определенный интерес, например, в случае, если квазитвердая зона занимает (по ширине) большую часть канала.

Цель данной работы – получить решение задачи об одномерном течении бингамовской среды с реологическим законом (1) в бесконечном плоском канале под действием скачкообразно изменяющегося градиента давления.

Решение задачи. Схема течения приведена на рис. 1, где направление течения совпадает с осью z, координата y отсчитывается от середины канала, $y(t)$ определяет положение границы квазитвердой зоны, d – полуширина канала (вследствие симметрии рассматривается только верхняя половина канала).

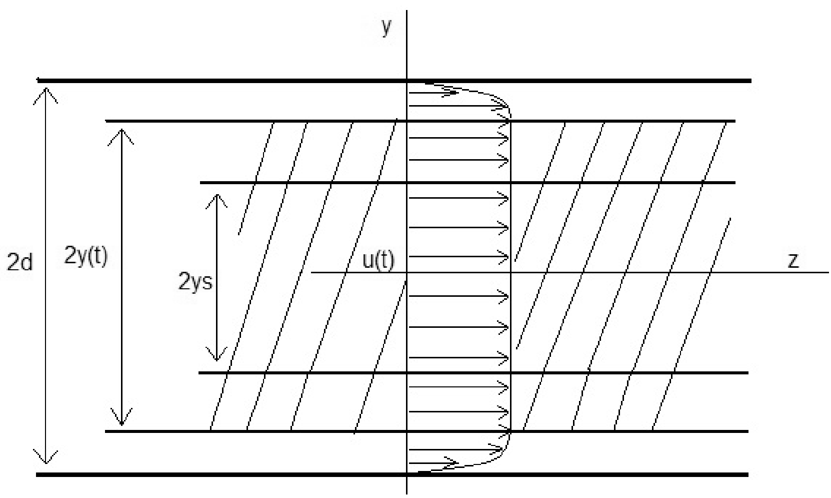

Рис. 1. Схема течения

Уравнение движения, записанное для элемента квазитвердого ядра длиной Δz, имеет вид

$$\Delta m(t)\frac{du}{dt} = -\Delta p y(t) - \tau_0 \Delta z,$$

где $\Delta m(t) = \rho y(t)\Delta z$, ρ – плотность среды; $u(t)$ – скорость движения квазитвердого ядра в момент времени t.

Обозначим через $p=-\dfrac{dp}{dz}$ градиент давления и запишем это уравнение в виде

$$\rho\frac{du}{dt}=p-\frac{\tau_0}{y(t)}. \tag{2}$$

В состоянии стационарного движения $p=p_s=\text{const}$, отсюда получим значение координаты границы раздела $y=y_s=\dfrac{\tau_0}{p_s}=\text{const}$, а скорость движения квазитвердого ядра, в свою очередь, можно определить из решения стационарной задачи в вязкой зоне [5]:

$$u_s=\frac{1}{2\eta}p_s\left(d-y_s\right)^2. \tag{3}$$

Рассмотрим нестационарное движение под действием мгновенного повышения градиента давления от $p_0=\dfrac{\tau_0}{d}$ до $p_s>p_0$. Уравнение движения квазитвердого ядра при $t>0$ следует из уравнения (2) при $p=p_s$:

$$\rho\frac{du}{dt}=p_s-\frac{\tau_0}{y(t)}. \tag{4}$$

Уравнение (4) содержит две неизвестные функции $u(t)$ и $y(t)$, однако они не являются независимыми.

Дополним постановку задачи естественным условием $u=F(y)$ и заменим производную $u'(t)$ на $y'(t)$ из соотношения $u'(t)=$ $=F'(y)y'(t)$. Вид функции F определим из выражения (3), связывающего положение границы и скорость движения квазитвердого ядра в стационарном состоянии:

$$u=\frac{1}{2\eta}p_s\left(d-y\right)^2. \tag{5}$$

В результате получим уравнение

$$y'=-\frac{\eta\left(p_s y-\tau_0\right)}{\rho p_s\left(d-y\right)y},$$

решение которого, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0$, имеет вид

$$\frac{\eta}{\rho}t=(y-d)(y-d+2y_s)+y_s(y_s-d)\ln\frac{y-y_s}{d-y_s}. \qquad (6)$$

Отметим, что $y(t)\to y_s$ при $t\to\infty$, т. е. переход из одного стационарного состояния в другое происходит за бесконечное время. Решение поставленной задачи определяется выражениями (5) и (6). Отметим также, что оно единственное вследствие теоремы существования и единственного решения задачи Коши.

Для числовой оценки решения уравнение (6) удобно записать в безразмерном виде, вводя такие же, как в работе [5], переменные: $Y=\frac{y}{d}$, $\Pi=\frac{p}{p_0}$, $\tilde{t}=\frac{t}{t^*}$, $t^*=\frac{\rho d^2}{2\eta}$, $\Pi_s=\frac{p_s}{p_0}>1$, $Y_s=\frac{1}{\Pi_s}<1$. Уравнение (6) в безразмерном виде:

$$\tilde{t}=(Y-1)(Y-1+2Y_s)+Y_s(Y_s-1)\ln\frac{Y-Y_s}{1-Y_s}.$$

На рис. 2 приведена зависимость $y(t)$ при значениях $Y_s=1/4$, $Y(0)=1$. Она незначительно отличается от аналогичной кривой из работы [5], отмеченной на рис. 2 пунктирной линией.

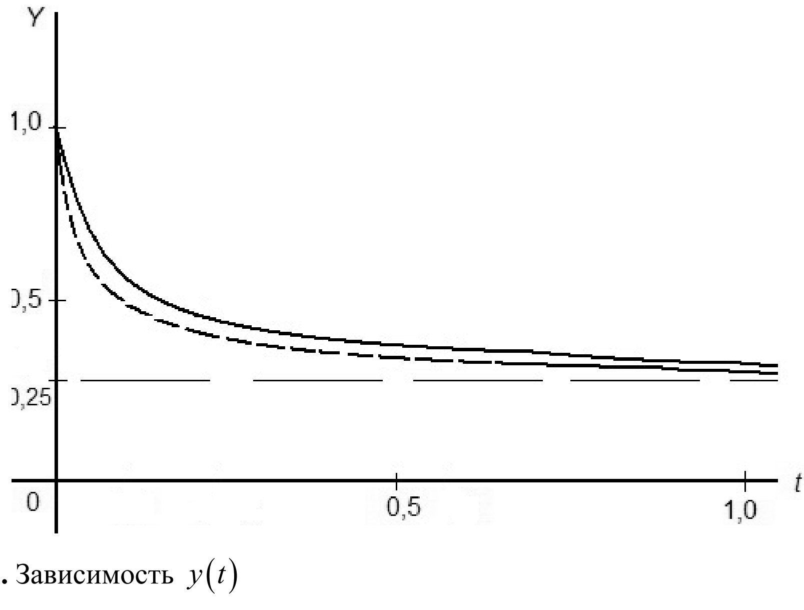

Рис. 2. Зависимость $y(t)$

Предложенный подход позволяет также определить параметры движения квазитвердой зоны в случае мгновенного сброса градиента давления.

Авторы признательны д-ру физ.-мат. наук Павлову К.Б. за результативное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Рейнер М. *Реология*. Москва, Наука,1965, 223 с.
[2] Фронштетер Г.Б., Данилевич С.Ю., Родионова Н.В. *Течение и теплообмен неньютоновских жидкостей в трубах*. Киев, Наукова думка, 1990, 215 с.
[3] Уилкинсон У.Л. *Неньютоновские жидкости*, Москва, Мир, 1964, 216 с.
[4] Вишняков В.И., Павлов К.Б., Романов А.С. Перистальтическое течение неньютоновской вязкопластической жидкости в щелевом канале. *Инженерно-физический журнал*, 1976, т. XXX1, № 3, с. 499–505.
[5] Гноевой А.В., Климов Д.М., Чесноков В.М. *Основы теории течений бингамовских сред*. Москва, Физматлит, 2004, 272 с.

Статья поступила в редакцию 05.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Вишняков В.И., Покровский Л.Д. К теории нестационарных течений вязкопластических сред. *Инженерный журнал: наука и инновации,* 2013, вып. 8. URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/876.html

Вишняков Виктор Ильич — доцент кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 15 работ в области гидродинамики неньютоновских жидкостей.
e-mail: sofvish@mail.ru

Покровский Леонид Дмитриевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 работ в области численного моделирования нестационарных течений.