УДК 621.983.044; 620.178.73

Расчет температуры оболочек при их внешнем динамическом нагружении

© Н.А. Гладков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Разработана методика определения температуры произвольных частиц интенсивно деформируемых цилиндрических и сферических оболочек, подверженных имплозивному нагружению. Физико-механические свойства материала оболочек соответствуют модели жесткопластического тела. Введено понятие абсолютной деформационной температуры, которая входит в качестве основного сомножителя в формулы, определяющие температуру частиц оболочек. Остальные сомножители в этих формулах являются функциями безразмерных параметров, зависящих от геометрических размеров оболочек. Установлено, что при схлопывании оболочек происходит значительное увеличение температуры частиц материала, расположенных на внутренних поверхностях оболочек.

Ключевые слова: *интенсивная деформация, идеальная пластичность, температура, симметричная оболочка, имплозия (implosion).*

Методические особенности решения задач по определению температуры интенсивно пластически деформированных тел приведены в работе [1]. В настоящей статье разработанная методика [1] применена для расчета температуры цилиндрических и сферических оболочек, подверженных интенсивному имплозивному нагружению.

С одной стороны, термин «имплозия» дословно означает удар внутрь. С другой стороны, *implosion* – имплозия – направленный внутрь взрыв. Поэтому под словосочетанием «имплозивное нагружение оболочки» будем подразумевать направленное внутрь с ее внешней стороны интенсивное нагружение.

В работе [1] показано, что для произвольной частицы с элементарным объемом dV адиабатически деформируемого тела можно составить в соответствии с первым законом термодинамики временнóе дифференциальное уравнение, отнесенное к единице объема:

$$\rho C \frac{dT}{dt} = \sigma_{ij}\xi_{ij}, \qquad (1)$$

где ρ, C – плотность и удельная темплоемкость материала тела; T – абсолютная температура частицы тела; t – время; σ_{ij}, ξ_{ij} – компоненты тензоров напряжений и скорости деформаций частицы тела соответственно. Правая часть уравнения (1) определяет мощность деформации частицы тела, а его левая часть характеризует увеличение количества теплоты этой частицы в единицу времени. Причем интегрирование исходного уравнения (1) следует проводить вдоль траектории движения частицы деформируемого тела.

Полагая, что материал оболочки несжимаем ($\rho = \text{const}$), а его физико-механические свойства соответствуют модели жесткопластического тела, можно упростить правую часть уравнения (1). В результате получаем

$$\sigma_{ij}\xi_{ij} = \tau_i\eta_i = \tau_{SD}\eta_i, \tag{2}$$

где τ_i – интенсивность касательных напряжений; η_i – интенсивность скоростей деформации сдвига; τ_{SD} – динамический предел текучести материала оболочки при сдвиге. Следовательно, уравнение (1) с учетом (2) принимает более простой вид:

$$C\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho}\tau_{SD}\eta_i. \tag{3}$$

Уравнение (3) позволяет рассчитать температуру частиц оболочки в любой момент времени, т. е. в результате решения (3) найти временную зависимость $T = T(t)$. При этом предварительно необходимо определить кинематические характеристики деформируемой оболочки. С этой целью первоначально рассмотрим эти характеристики для цилиндрической оболочки, начальные радиусы внутренней и внешней поверхностей которой обозначим через R_{10} и R_{20} соответственно.

Рассмотрим имплозивное нагружение цилиндрической оболочки большого удлинения ($l >> d$, где l – длина оболочки; d – ее диаметр). Такой подход, с одной стороны, позволяет пренебречь краевыми эффектами, а с другой стороны, если нагружение оболочки будет происходить только в радиальном направлении, задача становится осесимметричной. В этом случае ось вращения оболочки будет совпадать с осью цилиндрической системы координат (ЦСК) (R, φ, z – координаты этой системы), а компоненты скорости, скорости деформации и напряжения не зависят от полярного угла φ.

Поскольку нагрузка действует только в радиальном направлении, то окружная и осевая составляющие скорости, а также осевые и касательные компоненты напряжений будут равны нулю:

$$\begin{aligned} &\upsilon_\varphi = \upsilon_z = 0; \\ &\sigma_z = \tau_{Rz} = \tau_{R\varphi} = \tau_{z\varphi} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Отличными от нуля будут радиальные σ_R и окружные σ_φ компоненты напряжения, а также радиальная составляющая скорости υ_R. При этом компоненты скорости деформации, согласно формулам (4), будут иметь следующий вид:

$$\xi_R = \frac{\partial \upsilon_R}{\partial R}; \quad \xi_\varphi = \frac{\upsilon_R}{R}; \quad \xi_z = 0; \quad \eta_{Rz} = \eta_{R\varphi} = \eta_{z\varphi} = 0. \tag{5}$$

При таких исходных данных интенсивность скоростей деформаций, согласно формулам (5), рассчитывается по упрощенной зависимости:

$$\eta_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\left(\xi_R - \xi_\varphi\right)^2 + \xi_\varphi^2 + \xi_R^2}. \tag{6}$$

Материал оболочки несжимаем ($\rho = \text{const}$), поэтому уравнение неразрывности в ЦСК с учетом изложенного выше примет вид

$$\frac{d\upsilon_R}{dR} + \frac{\upsilon_R}{R} = 0. \tag{7}$$

Интегрируя уравнение (7), находим аналитическое соотношение между радиальными скоростями частиц:

$$\upsilon_R = \upsilon_0 \frac{R_{20}}{R}, \tag{8}$$

где $\upsilon_R = \upsilon_R(t)$, $\upsilon_0 = \upsilon_0(t)$ – радиальные скорости частиц, расположенных соответственно на цилиндрической поверхности внутри оболочки радиусом $R = R(t)$ и на внешней поверхности оболочки радиусом $R_{20} = R_{20}(t)$. Таким образом, радиальная скорость частиц $\upsilon_0(t)$ на внешней поверхности оболочки обеспечивает ее имплозивное нагружение.

Далее по формулам (5) в соответствии с соотношением (8) находим компоненты скорости деформации:

$$\xi_R = \upsilon_0 \frac{R_{20}}{R^2}; \tag{9}$$

$$\xi_\varphi = \upsilon_0 \frac{R_{20}}{R^2}. \tag{10}$$

Подставляя формулы (9) и (10) в зависимость (6), выражаем интенсивность скоростей деформаций:

$$\eta_i = 2\upsilon_0 \frac{R_{20}}{R^2}. \tag{11}$$

Для расчета изменения температуры удобно использовать динамический предел текучести σ_{SD}, который связан с τ_{SD} простым соотношением

$$\sigma_{SD} = \sqrt{3}\tau_{SD}. \tag{12}$$

Тогда уравнение (3) с учетом соотношения (12) примет следующий вид:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_{SD}}{\rho C} \eta_i. \tag{13}$$

Сомножитель $\dfrac{\sigma_{SD}}{\rho C}$ в уравнении (13) имеет размерность температуры. Кроме того, как будет показано ниже, он является определяющим при расчете температуры оболочки. Поэтому целесообразно обозначить этот сомножитель как абсолютную деформационную температуру:

$$T_{\text{деф}} = \frac{\sigma_{SD}}{\rho C}. \tag{14}$$

Уравнение (13) с учетом формулы (14) имеет вид

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}} T_{\text{деф}} \eta_i. \tag{15}$$

После подстановки соотношения (11) в формулу (15) приходим к уравнению, содержащему две независимые переменные величины t и R, которые определяют изменение температуры во времени и по координате:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2}{\sqrt{3}} T_{\text{деф}} \upsilon_0 \frac{R_{20}}{R^2}. \tag{16}$$

Уравнение (16) необходимо интегрировать вдоль траектории движения частиц оболочки. Поскольку этими траекториями в данной задаче являются радиальные линии в ЦСК, то правую часть уравнения (16) выразим, согласно соотношению (8), через радиальную скорость

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2}{\sqrt{3}} T_{\text{деф}} \left(-\frac{\upsilon_R}{R} \right). \tag{17}$$

В свою очередь, радиальная скорость равна производной, т. е.

$$\upsilon_R = \frac{dR}{dt}. \tag{18}$$

Подставляя соотношение (18) в уравнение (17) и сокращая правую и левую части уравнения на дифференциал dt, получаем

$$dT = -\frac{2}{\sqrt{3}} T_{\text{деф}} \frac{dR}{R}. \tag{19}$$

После интегрирования уравнения (19) определяем изменение температуры произвольной частицы деформируемой оболочки:

$$T - T_{\text{н}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} T_{\text{деф}} \ln \frac{R}{R_{\text{н}}}, \tag{20}$$

где $R_{\text{н}} = R_{\text{н}}(t_{\text{н}})$, $R = R(t)$ – радиусы цилиндрических поверхностей (вследствие осевой симметрии задачи), на которых расположены исследуемые частицы соответственно в начальный $t = t_{\text{н}}$ и в произвольный t моменты времени; $\Delta T = T - T_{\text{н}}$ – изменение температуры этих частиц оболочки за интервал времени $\Delta t = t - t_{\text{н}}$; $T_{\text{н}}(t_{\text{н}})$, $T(t)$ – соответственно температуры частиц, в момент когда они последовательно находились на цилиндрических поверхностях радиусов $R_{\text{н}}$ и R.

Учитывая, что при имплозивном нагружении оболочки радиусы ее внешней и внутренней поверхностей уменьшаются (оболочка схлопывается), $\ln \frac{R}{R_{\text{н}}}$ в формуле (20) является отрицательной величиной, поэтому запишем формулу (20) в виде

$$T - T_{\text{н}} = \frac{2}{\sqrt{3}} T_{\text{деф}} \ln \frac{R_{\text{н}}}{R}. \tag{21}$$

Если исследование температуры частиц оболочки проводить с момента времени, соответствующего началу процесса деформирования оболочки, то при $t = 0$, $R_{\text{н}} = R_0$, а $T_{\text{н}} = T_0$. В этом случае начальная температура T_0 частиц оболочки будет равна температуре всей оболочки до начала процесса ее деформирования. Формула (21) при этих условиях примет вид

$$T - T_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} T_{\text{деф}} \ln \frac{R_0}{R}. \tag{22}$$

В свою очередь, формулу (22) для частиц оболочки, первоначально расположенных на ее внутренней поверхности, можно записать в виде

$$T - T_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} T_{\text{деф}} \ln \frac{R_{10}}{R_1}, \tag{23}$$

где R_{10}, R_1 – начальный и текущий радиусы внутренней поверхности оболочки. В частности, при полном схлопывании оболочки, т. е. когда $R_1 \to 0$, происходит значительное увеличение температуры частиц, расположенных на внутренней поверхности оболочки.

Однако такая оценка получена при условии, что процесс деформирования будет происходить в соответствии с формулами (4) – (8). При схлопывании оболочки возможно возникновение неустойчивого движения ее частиц, что приведет к движению частиц, несколько отличающемуся от движения, рассмотренного в данной задаче. Тем не менее возможность получения высоких температур при имплозивном схлопывании оболочки является фактором, который может быть в какой-то степени реализован на практике.

Формула (22) для частиц, расположенных на внешней поверхности оболочки, примет вид

$$T - T_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} T_{\text{деф}} \ln \frac{R_{20}}{R_2}, \tag{24}$$

где R_{20}, R_2 – начальный и текущий радиусы внешней поверхности оболочки.

В частности, при полном схлопывании оболочки конечный радиус $R_{2к}$ ее внешней поверхности находим из условия, что оболочка в конечном состоянии принимает форму сплошного цилиндра. Объем такого цилиндра должен быть равен начальному объему оболочки:

$$\pi \left(R_{20}^2 - R_{10}^2 \right) l = \pi R_{2к}^2 l, \tag{25}$$

где l – длина цилиндрической оболочки. Из формулы (25) следует

$$\frac{R_{20}}{R_{2к}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{R_{10}}{R_{20}} \right)^2}}. \tag{26}$$

Формула (24) с учетом формулы (26) позволяет определить конечную температуру $T_к$ внешней поверхности цилиндрической оболочки:

$$T_к - T_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} T_{деф} \ln \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{R_{10}}{R_{20}} \right)^2}} . \qquad (27)$$

Рассмотрим имплозивное нагружение сферической оболочки, у которой r_{10}, r_{20} – начальные радиусы ее внутренней и внешней поверхностей соответственно. Если нагружение оболочки происходит только в радиальном направлении, то задача будет характеризоваться центральной (точечной) симметрией. Поэтому в сферической системе координат (ССК) (r, θ, φ – сферические координаты) касательные напряжения, касательные компоненты скорости и сдвиговые компоненты скорости деформации равны нулю:

$$\upsilon_\theta = \upsilon_\varphi = 0; \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\varphi} = \tau_{\theta\varphi} = 0; \quad \eta_{r\theta} = \eta_{r\varphi} = \eta_{\theta\varphi} = 0. \qquad (28)$$

Поскольку алгоритмы решения задач для цилиндрической и для сферической оболочек полностью совпадают, решение второй задачи будем проводить без повторных рассуждений, так как все особенности решения первой задачи полностью соответствуют особенностям второй задачи.

В результате интегрирования уравнения неразрывности, записанного в ССК, определена радиальная скорость произвольных частиц оболочки:

$$\upsilon_r = -\upsilon_0 \left(\frac{r_{20}}{r} \right)^2 . \qquad (29)$$

Здесь $\upsilon_0 = \upsilon_0(t)$ – радиальная скорость частиц, расположенных на внешней поверхности сферической оболочки радиусом $r_{20} = r_{20}(t)$, обеспечивающая ее имплозивное нагружение.

В соответствии с формулами (28) и (29) интенсивность скоростей деформаций

$$\eta_i = 2\sqrt{3} \upsilon_0 \frac{r_{20}^2}{r^3} . \qquad (30)$$

Тогда уравнение (15) с учетом соотношения (30) примет вид

$$\frac{dT}{dt} = 2T_{\text{деф}} \upsilon_0 \frac{r_{20}^2}{r^3}. \tag{31}$$

Уравнение (31) необходимо интегрировать вдоль траектории движения частиц оболочки. В этой задаче траекториями являются линии, соответствующие направлению радиуса ССК. Согласно уравнению (29), правую часть уравнения (31) выражаем через радиальную скорость

$$\frac{dT}{dt} = -2T_{\text{деф}} \frac{\upsilon_r}{r}, \tag{32}$$

а поскольку $\upsilon_r = \dfrac{dr}{dt}$, то уравнение (32) принимает вид, подобный уравнению (19) для цилиндрической оболочки:

$$dT = -2T_{\text{деф}} \frac{dr}{r}. \tag{33}$$

После интегрирования (см. вывод формулы (21)), получаем уравнение, аналогичное уравнению (21):

$$T - T_{\text{н}} = 2T_{\text{деф}} \ln \frac{r_{\text{н}}}{r}, \tag{34}$$

где $r_{\text{н}} = r_{\text{н}}(t_{\text{н}})$, $r = r(t)$ – радиусы сферических поверхностей, на которых расположены исследуемые частицы соответственно в начальный $t = t_{\text{н}}$ и в произвольный t моменты времени; $\Delta T = T - T_{\text{н}}$ – изменение температуры этих частиц оболочки за интервал времени $\Delta t = t - t_{\text{н}}$; $T_{\text{н}}(t_{\text{н}})$, $T(t)$ – соответственно температуры частиц в момент, когда они последовательно находились на сферических поверхностях радиусов $r_{\text{н}}$ и r.

Далее (см. вывод формулы (22)), для сферической оболочки получаем уравнение, аналогичное уравнению (22):

$$T - T_0 = 2T_{\text{деф}} \ln \frac{r_0}{r}. \tag{35}$$

Для частиц, находящихся на внутренней поверхности сферической оболочки, уравнение (35) примет вид

$$T - T_0 = 2T_{\text{деф}} \ln \frac{r_{10}}{r_1}, \tag{36}$$

где r_{10}, r_1 – начальный и текущий радиусы внутренней поверхности. При полном схлопывании оболочки, т. е. при $r_1 \to 0$, происходит (также как и в случае с цилиндрической оболочкой) значительное увеличение температуры частиц, расположенных на внутренней поверхности оболочки.

Для внешней поверхности оболочки уравнение (35) примет вид, подобный уравнению (36):

$$T - T_0 = 2T_{\text{деф}} \ln \frac{r_{20}}{r_2}, \tag{37}$$

где r_{20}, r_2 – начальный и текущий радиусы внешней поверхности оболочки.

При полном схлопывании оболочки конечный радиус ее внешней поверхности $r_{2\text{к}}$ находим из условия, что оболочка примет форму сплошного шара, объем которого равен начальному объему оболочки:

$$\frac{4}{3}\pi\left(r_{20}^3 - r_{10}^3\right) = \frac{4}{3}\pi r_{2\text{к}}^3,$$

откуда получаем

$$\frac{r_{20}}{r_{2\text{к}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{r_{10}}{r_{20}}\right)^3}}. \tag{38}$$

Уравнение (37) при конечном схлопывании оболочки, т. е. с учетом уравнения (38), примет вид

$$T_\text{к} - T_0 = 2T_{\text{деф}} \ln \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{r_{10}}{r_{20}}\right)^3}}. \tag{39}$$

Таким образом, расчетные формулы как для цилиндрической ((21)–(24), (27)), так и для сферической ((34)–(37), (39)) оболочек имеют одинаковую структуру. В этих формулах определяющим сомножителем является абсолютная деформационная температура $T_{\text{деф}}$, остальные сомножители безразмерны и зависят от геометрических параметров оболочек. В качестве примера определим $T_{\text{деф}}$ по формуле (14) для стальной оболочки при следующих значениях [2] величин, входящих в эту формулу: $\sigma_{SD} = 10^9\,\text{Па}$, $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, $C = 460$ Дж/(кг·К). После подстановки получено $T_{\text{деф}} = 279$ К.

Заключение. В результате решения поставленной задачи получены формулы для расчета изменения температуры любых частиц при имплозивном нагружении цилиндрической и сферической оболочек.

Изменение температуры цилиндрической оболочки в $\sqrt{3}$ раз меньше, чем сферической оболочки. Отсюда следует, что процесс деформирования в сферической оболочке протекает более интенсивно, чем в цилиндрической оболочке.

Имплозивное нагружение может иметь практическое применение как один из способов нагревания веществ до высоких температур в замкнутом изолированном объеме, так как в соответствии с расчетом происходит значительное увеличение температуры частиц материала оболочек, расположенных на внутренних поверхностях.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гладков Н.А. Расчет температурных полей в телах, подверженных интенсивным пластическим деформациям. *Тр. Междунар. конф. «XIII Харитоновские тематические научные чтения»,* Саров, РФЯЦ – ВНИИЭФ, 2011, с. 201–205.

[2] *Физические величины*: *Справочник*. Москва, Энергоатомиздат, 1991, 1232 с.

Статья поступила в редакцию 05.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Гладков Н.А. Расчет температуры оболочек при их внешнем динамическом нагружении. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 8. URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/875.html

Гладков Николай Алексеевич родился в 1942 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 140 научных работ в области общей физики, физики быстропротекающих процессов и механики деформируемого твердого тела. e-mail: n.a.gladkov@yandex.ru