УДК 532.507

Эволюция вихревых возмущений на различных стадиях турбулентных течений

© М.Ф. Иванов[1], А.Д. Киверин[1], Е.Д. Шевелкина[2]

[1]Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, 125412, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Методами численного моделирования исследованы особенности развития вихревых возмущений на стадиях стационарной (развитой) турбулентности и затухания. Предложен и верифицирован подход к моделированию стационарной стадии турбулентности как развивающегося во времени винеровского случайного процесса. На стадии затухания турбулентности обнаружен эффект обратной эволюции возмущений, направленной на укрупнение масштабов вихревых структур за счет механизма диффузии вихрей.

Ключевые слова: *изотропная турбулентность, затухание турбулентности, численное моделирование.*

Введение. Активные исследования турбулентности ведутся с конца XIX в. Однако теория, описывающая этот процесс, до настоящего времени полностью не разработана. В общих чертах турбулентное течение можно рассматривать как хаотическое неупорядоченное движение жидкости или газа. Принципиальным является то, что турбулентное течение – диссипативный процесс и может развиваться только в открытой системе при наличии внешнего по отношению к среде источника энергии, поддерживающего динамику возмущений. В этом случае в системе не может достигаться равновесное распределение возмущений, подобное локально равновесному распределению частиц в газах, где движение молекул также неупорядоченное и хаотическое. Однако возможно стационарное состояние турбулентного течения, когда кинетическая энергия возмущений, переходящая за счет вязких напряжений во внутреннюю энергию (нагрев) среды, полностью компенсируется энергией, поступающей извне. В общем случае развитие турбулентных течений подразделяют на три стадии: возникновение турбулентности, развитая турбулентность, затухание. Очевидно, что стадии возникновения и затухания турбулентности существенно нестационарные, в то время как стадия развитой турбулентности может иметь стационарный характер.

Физическая природа возникновения турбулентности связана с гидродинамическими неустойчивостями, прежде всего сдвиговыми, такими как неустойчивость Гельмгольца. Нарастание амплитуды возмущений контактной границы приводит за счет нелинейных факторов к формированию сложных взаимосвязанных структур, охватывающих широкий интервал пространственных масштабов. При этом во многих случаях дозвуковых течений возникающие возмущения поля скоростей практически не приводят к возмущению плотности среды, поэтому ее можно рассматривать как несжимаемую. В этом случае возмущения носят так называемый энтропийный характер и, следовательно, должны формироваться в вихревые структуры [1], эволюция которых приводит к развитой турбулентности.

Теория развития турбулентности впервые была предложена в 1944 г. Л.Д. Ландау. Согласно этой теории, переход к турбулентности происходит через последовательность бифуркаций Хопфа, при каждой из которых в поле возмущений происходит рождение новых мод с возрастающей частотой. Строго говоря, теория Ландау, описывающая возмущения набором растущего во времени, но детерминированного, числа гармоник, не соответствовала представлениям о турбулентности как о хаотическом процессе. Теория турбулентности стала более реалистичной, когда в 1971 г. Д. Рюэлем и Ф. Такенсом было показано, что уже после второй бифуркации регулярное решение становится неустойчивым и система переходит в хаотическое состояние [2, 3]. Таким образом, согласно принятой в настоящее время теории, развитая турбулентность является хаотическим набором турбулентных пульсаций. В этом представлении турбулентность можно рассматривать как однородную и изотропную, причем если приток энергии компенсирует ее диссипацию за счет вязкого трения, характеристики турбулентности можно получить из закона Колмогорова – Обухова для однородной изотропной стационарной турбулентности. Если принять предположение Н.А. Колмогорова о существовании в области изменений пространственных масштабов инерционного интервала, в котором динамика турбулентных пульсаций зависит только от характерного масштаба возмущения и скорости диссипации энергии, то можно получить соотношения между важными характеристиками турбулентности [1, 4]:

$$v_\lambda \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}; \tag{1}$$

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \tag{2}$$

где v_λ – изменение скорости турбулентных возмущений на масштабе λ; ε – скорость диссипации энергии; $E(k)$ – кинетическая энергия возмущений, соответствующих волновому числу k.

Согласно предположению А.Н. Колмогорова об универсальном постоянстве скорости диссипации энергии для заданного течения, из соотношения (1) следует соотношение между изменением скоростей на двух разных пространственных масштабах λ_1 и λ_2:

$$\frac{v_1}{v_2} \sim \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/3}, \tag{3}$$

или аналогичное соотношение между числами Рейнольдса течений на разных масштабах:

$$\frac{\mathrm{Re}_1}{\mathrm{Re}_2} \sim \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{4/3}. \tag{3a}$$

Из соотношения (1) можно получить также оценку пространственного масштаба диссипации (размер области, для которой $\mathrm{Re}_0 \sim 1{,}0$) [1]:

$$\lambda_0 \sim L\,\mathrm{Re}_L^{-3/4}, \tag{4}$$

где λ_0, Re_L – диссипативный масштаб и число Рейнольдса крупномасштабных турбулентных пульсаций в потоке соответственно.

Оценка (4) будет справедливой только при предположении о допустимости распространения закономерностей, сформулированных для инерционного интервала на всю область пространственных масштабов турбулентного течения в условиях постоянного вложения энергии в систему, компенсирующего диссипативные потери.

В случае, когда энерговложение в систему прекращается или значительно уменьшается, наступает стадия затухания динамики турбулентных возмущений. Эта стадия нестационарная, поэтому полученные А.Н. Колмогоровым соотношения неприменимы, что требует дополнительных исследований эволюции возмущений на стадии затухания турбулентности. Результаты исследований данного процесса приведены ниже.

Согласующееся с теорией Рюэля и Такенса описание турбулентности хаотическим набором пульсаций дает конструктивный подход к оценкам характеристик турбулентного течения, являясь в то же время весьма упрощенным, так как не учитываются процессы самоорганизации и образования когерентных структур в потоке. Эти структуры в настоящее время выделены и описаны на основе натурных наблюдений и лабораторных экспериментов [5] и являются предметом теоретического анализа [6]. Их нерегулярное рождение и такая же нерегулярная продолжительность жизни следуют из общих принципов нелинейной динамики хаотических систем [7] и не противоречат общему хаотическому состоянию системы. Однако более детальный анализ процессов самоорганизации турбулентных возмущений (установление критериев возникновения, пространственные и временные масштабы и т. п.) является крайне сложной задачей, далекой от решения не только аналитическими методами, но и методами математического моделирования. В частности, нет убедительного ответа на актуальный вопрос о соответствии между глобальными законами эволюции турбулентных возмущений (типа сформулированных, но строго не доказанных соотношений Колмогорова) и локальной структурой течений, включающей и когерентные образования.

В данной работе методами математического моделирования исследуется структура и эволюция возмущений, возникающих в среде за счет задаваемых хаотических некоррелируемых пульсаций. Полученные результаты позволяют получить представление о динамике локальных структур в неупорядоченной среде, что может быть полезно для понимания ряда турбулентных эффектов. Проводимый при исследовании анализ относится к двум стадиям: стационарной стадии возмущенной среды и стадии затухания возмущений.

Постановка задачи моделирования турбулентности. Эволюцию возмущений, вызванных хаотическим воздействием на газообразную среду (воздух при нормальных условиях), исследовали методами математического моделирования. Динамика среды описана системой уравнений Навье – Стокса сжимаемой жидкости. Расчеты проводили в трехмерном кубическом объеме. На границах задавали условия проскальзывания и прилипания газа к стенкам, или периодические граничные условия. Уравнения газовой динамики решали численно эйлерово-лагранжевым методом, известным как метод «крупных частиц» [8], модифицированным с целью повышения точности [9]. Расчеты проводили на вычислительных сетках, линейные размеры ячеек которых изменялись от $2\cdot10^{-4}$ до $5\cdot10^{-5}$, а линейные размеры расчетной области L выбирали от 0,01 до 0,03 м. Стохастическое возмущение скоростей газа в каждой расчетной ячейке рассматривали как развивающийся во времени винеровский случайный процесс с единичной дисперсией и нулевым математическим ожиданием, что обеспечивало правильный закон диффузии возмущений в поле скоростей.

В такой постановке задачи каждая из компонент скорости среды в каждой счетной ячейке включает две составляющие:

$$U = U_{\mathrm{g}} + U_p; \tag{5}$$

$$U_p = \varkappa\gamma\tau^{1/2}, \tag{6}$$

где U_g – детерминированная составляющая любой из компонент скорости, определяемая путем решения уравнений газовой динамики; U_p – стохастическая составляющая скорости; $\varkappa$ – множитель, задающий уровень пульсаций (в проведенных расчетах равный или близкий единице); γ – случайная величина, распределенная по нормальному закону с единичной дисперсией и нулевым математическим ожиданием, τ – выбранный в расчетах шаг по времени.

Заданные случайные возмущения скорости среды газа, изначально находящегося в состоянии покоя, вызывают в последующие моменты времени движение среды, которое описывается уравнениями Навье – Стокса. При этом одновременно возникают возмущения в каждой расчетной точке и на каждом шаге. Развивающийся процесс довольно быстро выходит на стационарную по уровню энергии возмущений стадию при всех рассмотренных значениях интенсивности $\varkappa$ пульсаций, размеров области и расчетных ячеек. При изменении данных параметров задачи стационарный уровень энергии несколько меняется, но поля течений скоростей (рис. 1) и энергетические спектры возмущений (рис. 2) качественно остаются во всех случаях одними и теми же.

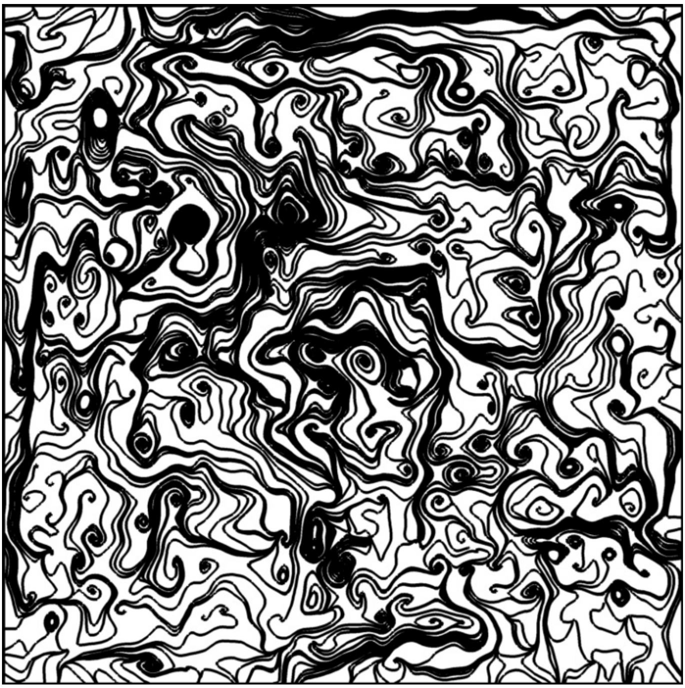

Рис. 1. Поле скоростей в сечении *XY*, проходящем через центр расчетной области при $\varkappa = 1{,}0$, $L = 0{,}01$ м и граничных условиях с прилипанием потока на стенках

На рис. 1 приведено только одно из возможных сечений поля скоростей, однако, как показывает анализ многочисленных результатов, представленная картина является вполне типичной и характерна для любого сечения в области возбужденных течений. Таким образом, результаты компьютерного моделирования показали, что хотя

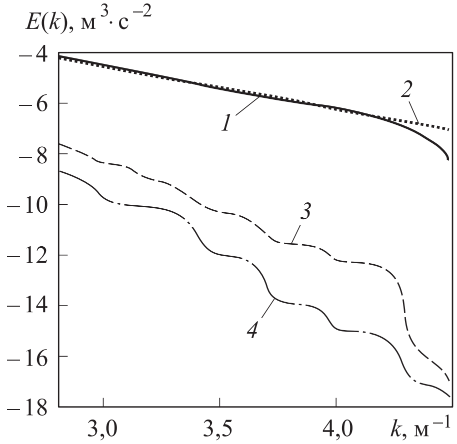

Рис. 2. Энергетический спектр возмущений $E(k)$ при $\varkappa = 1{,}0$ и $L = 0{,}01$ м:

1 – стационарная стадия процесса; *2* – спектр, соответствующий теории Колмогорова (см. (2)); *3*, *4* – стадии затухания без прилипания газа на стенках и с прилипанием соответственно

задаваемые извне возмущения являются однородными и изотропными, формирующиеся при этом потоки не однородны и представляют собой неупорядоченно распределенные мелкомасштабные вихри. Соответственно неоднородной в пространстве является и диссипация энергии, возникающая за счет вязких напряжений, которые для вихревых течений пропорциональны grad(rot $\boldsymbol{U}$).

В этом случае при имеющей место неоднородности потока (нарушающей также и его изотропию) в характеристиках стационарного состояния возмущенной среды должны были бы найти отражение основные характеристики этой неоднородности. Например, определенную роль, казалось бы, должны играть такие естественные масштабы, как средний диаметр сформировавшихся на этой стадии вихрей, или плотность вихрей в объеме. Последнее, однако, не учитывается в закономерности (1), выведенной А.Н. Колмогоровым при предположении, что в возмущенной (однородной и изотропной) среде нет естественного масштаба и изменение скорости потока на произвольно выбранном пространственном масштабе зависит только от самого этого масштаба.

Наиболее информативным следствием из основного в теории Колмогорова соотношения (1) является закон распределения энергии возмущений в k-пространстве (2). Распределение энергии по спектру несложно получить после обработки результатов расчетов или экспериментов, и поэтому оно служит надежной оценкой справедливости теории Колмогорова. На рис. 2 представлен спектр энергии возмущений по волновым числам, соответствующий стационарному состоянию, воспроизводимому как при наличии, так и при отсутствии прилипания газа на стенках объема (кривая *1* воспроизводит спектр, соответствующий стационарной стадии, представленной на рис. 1). Энергетический спектр качественно и количественно слабо зависит от условий на границах рассматриваемой области. Наиболее принципиальным является тот факт, что в широком интервале волновых чисел, и особенно в области длинных волн (малые k), распределение энергии по спектру хорошо согласуется с формулой Колмогорова – Обухова – законом «5/3» (2). Существенное отклонение спектра от закона «5/3» начинает наблюдаться только при приближении к масштабам, соответствующим размеру нескольких расчетных ячеек, воспроизводящих минимально возможные вихри в системе, а на масштабе, близком к размеру ячейки, наступает резкое падение энергетического спектра, что представляется естественным. В проведенных расчетах наряду с распределением энергии по спектру закону «5/3» соответствует и зависимость от линейного масштаба системы L времени T выхода на стационарную стадию стохастически возмущаемой системы:

$$T \sim L^{2/3} / \varepsilon^{1/3}. \tag{7}$$

Отметим, что хорошее согласование спектрального распределения энергии с законом Колмогорова – Обухова получено при математическом моделировании динамики стохастически возмущаемых сред также в работах [10, 11] и др.

Отсутствие в теории Колмогорова дополнительных масштабов, по-видимому, можно обосновать, если рассматривать среду как совокупность разномасштабных вихревых структур, взаимодействующих одна с другой. В работе [12] методом прямого математического моделирования, выполненного путем решения уравнений Навье – Стокса в трехмерной геометрии, показано, что при взаимодействии конвективных вихрей разных радиусов и интенсивности распределение энергии по характерным масштабам (на которых азимутальная скорость вихрей имеет явно выраженный максимум) устанавливается строго в соответствии с законом «5/3» (2). При этом входящие в задачу дополнительные параметры, характеризующие среду и геометрию рассматриваемой области, никак не влияют на полученную закономерность распределения энергии по пространственному спектру. Таким образом, в теории Колмогорова именно зависимость (2) является основной. Вид этой зависимости определяется закономерностями взаимодействий вихрей в инерционном интервале, проявляемых через перестройку поля течений. Считая, что закон «5/3» следует непосредственно из гидродинамики вихревых течений, остальные соотношения в теории Колмогорова – (1) или (7) – можно считать вторичными, вытекающими из соотношения (2), что в этом случае легко доказать.

Особый интерес представляет проблема обоснования прямого компьютерного моделирования турбулентных течений. Необходимо отметить, что теория Колмогорова, как и рассматриваемый в данной работе математический эксперимент, непосредственно относится не к турбулентным течениям, а к динамике некой возмущенной среды. В теории Колмогорова предполагается, что эта среда обладает свойствами стационарности, однородности, изотропии, постоянства скорости диссипации энергии. В математическом эксперименте рассматриваются возмущения, генерируемые как винеровский процесс и эволюционирующие по законам динамики гидродинамической среды. При этом, несмотря на весьма абстрактный характер модели процесса, принятой в теории Колмогорова, выводы, следующие из этой теории, многократно и достаточно хорошо подтверждаются результатами обширных экспериментов [3]. Это позволяет считать, что теория Колмогорова наиболее успешно описывает отдельные элементы турбулентных движений. Значительно более сложным является вопрос прямого численного моделирования турбулентности путем непосредственного решения трехмерных уравнений Навье – Стокса. Проблема заключается в том, что турбулентность возникает при весьма больших Re (от $10^4 \ldots 10^6$ и более), а диссипация энергии происходит при Re порядка 1,0. Следовательно, если инерционному интервалу соответствует Re, равное всего 10^4, то отношение размеров крупномасштабных турбулентных структур к масштабу области диссипации, согласно соотношению (4), уже равно 10^3. Таким образом, для того чтобы в этом случае корректно описать турбулентную динамику, число ячеек в расчетной области должно быть не менее 10^9. Объем вычислений при этом становится чрезмерно большим, и для решения одного варианта задачи потребуется несколько месяцев непрерывного счета даже с применением самых современных многопроцессорных комплексов, что, естественно, неприемлемо.

Возможна, однако, достаточно достоверная компьютерная имитация ряда характерных турбулентных процессов. Так, рассматриваемый в данной работе подход к моделированию развитой турбулентности позволяет исключить из расчетов динамику крупномасштабных вихрей, так как их роль в формировании турбулентности в этом случае заменена стохастическим заданием пульсаций. Хотя такой подход к моделированию гидродинамических сред не имеет строгих доказательств, его применимость тем не менее достаточно убедительно обосновывается хорошим совпадением результатов с выводами теории Колмогорова и прежде всего с распределением энергии по пространственным масштабам (волновым числам), представленным соотношением (2). Возможность исключения в подходе с модельным заданием турбулентных пульсаций крупномасштабных процессов с большими числами Рейнольдса позволяет более детально исследовать турбулентность на существенно меньших масштабах. Так приведенные выше результаты получены в кубическом объеме со стороной 0,01 м при движении газа со средним по пространству и времени $Re \approx 300$, что не соответствует условиям турбулентного движения. Однако с учетом соотношения (3а), непосредственно следующего из закономерностей (1) или (2), которые соблюдаются и в проводимых расчетах, можно считать, что полученная в такой постановке динамика среды соответствует динамике турбулентного течения на масштабе 0,01 м, в то время как, например, на масштабе 1,0 м течению отвечает $Re \approx 1{,}4 \cdot 10^5$, характерное уже для развитой турбулентности.

Результаты проведенного математического моделирования показали, что спектральное распределение (2) в области бóльших длин волн (на порядок бóльших размера счетной ячейки) слабо зависит от выбора размера ячейки или от точности вычислений. Это указывает на малую зависимость воспроизведения динамики крупных возмущений на стационарной стадии турбулентности от точности воспроизведения динамики среды на масштабе диссипации. В то же время, как следует из соотношения (4), для правильного описания стационарного режима выбранному размеру крупномасштабных возмущений должен соответствовать вполне определенный масштаб области диссипации, а следовательно, и размер счетных ячеек, который не должен превосходить этот масштаб. Исходя из этого условия для корректного расчета эволюции турбулентных возмущений, целесообразно выбрать ячейки, обеспечивающие сходимость расчетов по уровню энергии возмущений на стационарной стадии процесса.

Эволюция возмущений на стадии затухания. На рис. 3 представлена (в одном из произвольных сечений) временная эволюция течений, стационарный режим которых иллюстрирует рис. 1, после прекращения стохастической подпитки турбулентных пульсаций. Перераспределение энергии по пространственному спектру для граничных условий с проскальзыванием потока и с торможением потока на стенках, возникающее после изоляции системы от внешних динамических воздействий, приведено на рис. 2 (кривые 3, 4). Все полученные результаты относятся к стадии затухания турбулентности и отражают принципиальную характерную черту этой стадии – рост вихревых структур, определяющих конфигурацию течений. Такую эволюцию турбулентных возмущений можно объяснить усилением упорядоченности в поле течений при ослаблении (в данном случае отключении) турбулентных пульсаций. Теперь структура поля течений формируется только динамикой вихрей, которая определяется их диффузией в пространстве скоростей [1], когда их радиус растет с одновременным снижением интенсивности и объединением вихрей за счет сил притяжения, возникающих в газовом потоке между сближающимися вихрями.

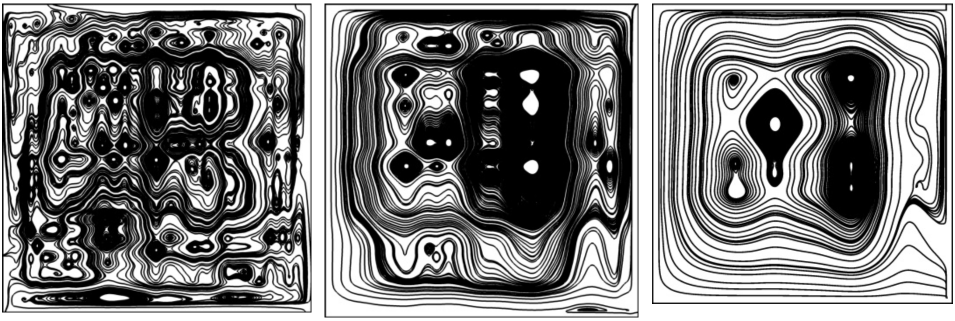

Рис. 3. Эволюция вихревых структур на стадии затухания развитой турбулентности в одном из сечений, проходящем через центр расчетной области (условия задачи соответствуют условиям рис. 1)

Полученный в расчетах рост вихрей в затухающем турбулентном потоке показывает, что в случае, когда диссипация энергии преобладает над энерговложением в систему, обнаруживается смена направления эволюции турбулентных структур. Так, если развитая турбулентность характеризуется хорошо известным каскадом переходов от крупномасштабных вихрей к более мелким, играющим роль стоков кинетической энергии за счет преобладающей роли молекулярной вязкости на малых масштабах, то на стадии затухания наблюдается обратный переход от мелкомасштабных вихрей к вихрям более крупных радиусов. В этом случае затухание формирующихся крупных вихрей возможно за счет их рассеяния в вязкой среде, согласно результатам вихревой диффузии:

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t}\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right), \tag{8}$$

где ν – вязкость среды.

На стадии затухания турбулентности фундаментальный закон распределения энергии по спектру в соответствии с законом «5/3» не соблюдается, что следует уже из сопоставления спектральных кривых на рис. 2, причем на стадии затухания отношение энергии, сконцентрированной в области длинных волн, к энергии в области коротких волн значительно больше, чем на стационарной стадии развитой турбулентности. Вид спектров затухающих возмущений на рис. 2 более различается для задач с разными условиями на границах области, чем в стационарном случае. Это указывает на значительно бóльшую зависимость эволюции затухающих вихрей от граничных условий. Так, в случае торможения потоков на стенках области вихревые структуры со временем формируются в единый конический вихрь, занимающий практически всю расчетную область. В случае проскальзывания течений вдоль стенок общая направленность процесса сохраняется, однако теперь вследствие влияния на процесс акустических волн, которые затухали на стенках в предыдущем случае, эволюция возмущений имеет более сложный вид. Растущие структуры периодически сильно деформируются, разрушаются и возникают снова.

Особый интерес представляет затухание турбулентных возмущений при периодических граничных условиях. В этом случае в области возникает структурированное поле вихрей, формирующее и поддерживающее трехмерные периодические течения с периодами, совпадающими с размерами соответствующих осей по координатным направлениям выбранной расчетной области. Картина соответствующих течений в сечении вдоль одной из осей представлена на рис. 4. Сформировавшиеся структура течений и размеры вихрей в данном случае являются достаточно стабильными, поэтому процесс носит квазистационарный характер с весьма слабым затуханием энергии во времени.

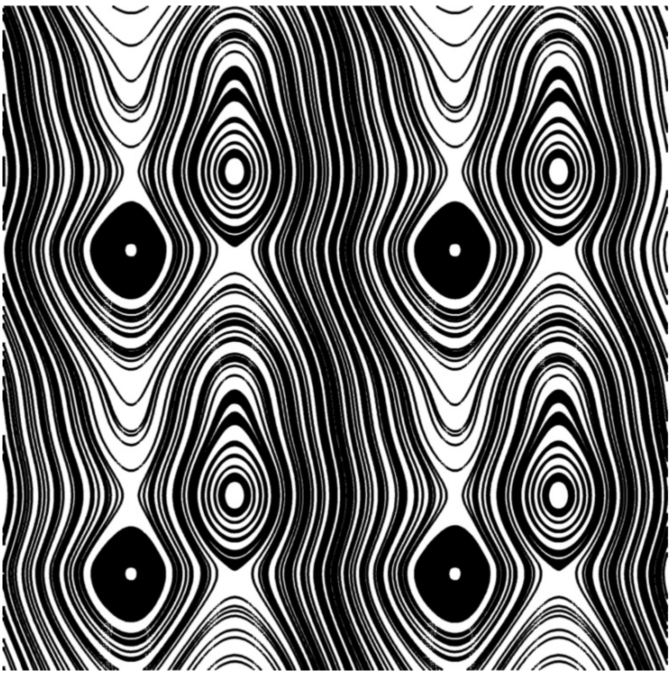

Рис. 4. Поле течений на стадии затухания турбулентности в среде с периодическими граничными условиями в сечении, проходящем через центр расчетной области

Это подтверждается зависимостями на рис. 5, где приведено изменение энергии возмущений во времени на стадии затухания турбулентности для систем с разными граничными условиями. При этом в задаче с проскальзыванием потока на границах диссипация энергии возмущений обусловлена только описанным выше механизмом вязкого рассеяния и поглощения энергии, а в случае торможения потока на границах это условие является дополнительным фактором диссипации энергии, что приводит к более быстрому затуханию турбулентности.

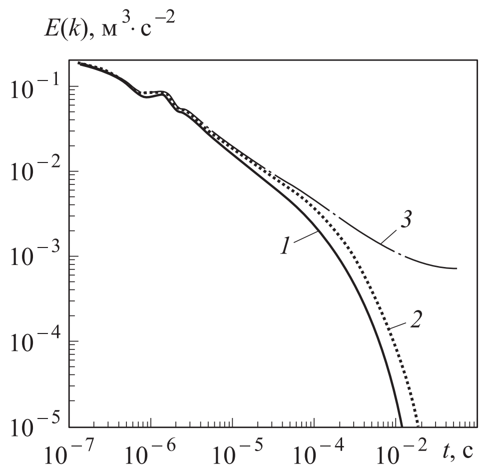

Рис. 5. Изменение энергии возмущений во времени на стадии затухания турбулентности:

1 – 3 – течение с торможением потоков на стенках области с проскальзыванием потока у стенок и с периодическими граничными условиями соответственно

Заключение. Анализ результатов математического моделирования среды, формируемой задаваемыми стохастическими возмущениями, которые развиваются по законам гидродинамики вязкого газа, показал, что такая модель адекватно воспроизводит основные выводы теории Колмогорова, подтверждаемой, в свою очередь результатами лабораторных экспериментов и натурных наблюдений. Это, с одной стороны, позволяет применять предложенный подход при компьютерном моделировании ряда реальных турбулентных процессов (их набор требует дополнительного анализа), а с другой – показывает, что основные соотношения теории Колмогорова следуют непосредственно из закономерностей эволюции хаотических возмущений в газодинамической среде без дополнительных требований однородности и изотропии этой среды. Последнее подтверждается и прямым компьютерным моделированием взаимодействия разномасштабных вихрей в конвективных потоках, основанном на прямом численном решении уравнений Навье – Стокса.

Применение компьютерного моделирование при задании хаотических возмущений потока позволило получить стационарные вихревые структуры и конфигурации течений, соответствующие разным масштабам турбулентного потока. После установления стационарного течения при отключении генератора внешних возмущений (непосредственный расчет трехмерных уравнений Навье – Стокса) в результате исследования стадии затухания развитой турбулентности обнаружен новый эффект обратной эволюции возмущений, обусловливающий укрупнение масштабов вихревых структур. Следует отметить, что изменение перехода в вихревых структурах от крупных масштабов к более мелким на этапе развития турбулентности на переход от более мелких масштабов к более крупным на стадии затухания, по-видимому, можно рассматривать как одно из проявлений закона Ле Шателье еще и в области турбулентных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика*. Т. 6. Гидродинамика. Москва, Наука, 1988, 730 с.

[2] Ruelle D., Takkens F. On the Nature of Turbulence *Commun. Math. Phys*., 1971, vol. 20, pp. 167–192.

[3] Шустер Г. *Детерминированный хаос*. Москва, Мир, 1988, 240 с.

[4] Фриш У. Турбулентность. *Наследие А.Н. Колмогорова*. Москва, Фазис, 1998, 343 с.

[5] Репик Е.У., Соседко Ю.П. *Турбулентный пограничный слой*. Москва, Физматлит, 2007, 309 с.

[6] Колесниченко А.В., Маров М.Я. *Турбулентность и самоорганизация*. Москва, Бином, 2009, 632 с.

[7] Анищенко В.С., Вадивасов Т.Е., Астахов В.В. *Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем*. Саратов, Изд-во Саратовского Университета, 1999, 367 с.

[8] Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. *Метод крупных частиц в газовой динамике*. Москва, Наука,1982, 391 с.

[9] Иванов Е.Н., Иванов М.Ф. Определение статистических характеристик течений газа в камере под движущимся поршнем методом численного моделирования. *Математическое моделирование*, 2010, т. 22, № 12, с. 33 – 48.

[10] Haugen N.E.L., Kleeorin N., Rogachevskii I., Brandenburg A. Detection of turbulent thermal diffusion of particles in numerical simulations. *Phys. Fluids*, 2012, vol. 24, pp. 0751061 – 07510616.

[11] Mordant N., Lévêque E., Pinton J.-F. Experimental and Numerical Study of the Lagrangian Dynamics of High Reynolds Turbulence. *New J. Phys*, 2004, 6, 116, pp. 1–44.

[12] Иванов М.Ф., Поварницин М.Е. Об усилении вихрей в конвективных ячейках. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2004, № 5, с. 62 – 68.

Статья поступила в редакцию 05.06.2013 г.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Иванов М.Ф., Киверин А.Д., Шевелкина Е.Д. Эволюция вихревых возмущений на различных стадиях турбулентных течений. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 8.
URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/870.html

Иванов Михаил Федорович родился в 1945 г., окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1968 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий лабораторией Объединенного института высоких температур РАН. Автор более 200 работ, в том числе двух монографий. Области научных интересов: вычислительная физика, физика плазмы, физическая газодинамика.
e-mail: ivanov_mf@mail.ru

Киверин Алексей Дмитриевич родился в 1985 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2008 г. Канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Объединенного института высоких температур РАН. Области научных интересов: вычислительная физика, физическая газодинамика. e-mail: alexeykiverin@gmail.com

Шевелкина Екатерина Дмитриевна родилась в 1991 г., студентка МГТУ им. Н.Э. Баумана. Лаборант Объединенного института высоких температур РАН. Области научных интересов: вычислительная физика, физическая газодинамика.