

Рассеяние энергии при колебаниях композитных оболочек

© А.А. Смердов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены вопросы демпфирования колебаний композитных оболочек. На основе энергетического подхода и технической теории демпфирования выведены расчетные формулы для коэффициентов диссипации и величин относительной мощности диссипации, соответствующих каждой форме колебаний многослойных ортотропных цилиндрических оболочек. Аналогичные зависимости выведены также для трехслойных оболочек с легким (сотовым) наполнителем и многослойными композитными обшивками. Проведено численное исследование эффективности применения углепластиков в крупногабаритных композитных оболочках высокого демпфирования с различными схемами армирования. Показан немонотонный характер зависимости исследуемых характеристик демпфирования как от параметров волнообразования, так и от ориентации материала в слоях обшивок трехслойной оболочки. Полученные результаты могут найти применение, например, при разработке методов акустической защиты выводимых на орбиту космических аппаратов.

Ключевые слова: композит, оболочка, колебания, демпфирование, трехслойная структура.

К числу преимуществ композитных оболочек, помимо малой массы и высокой несущей способности, относятся также высокие (на один-два порядка выше, чем у металлических) коэффициенты диссипации [1, 2]. Существенным преимуществом при этом является возможность управления коэффициентами диссипации путем целенаправленного изменения параметров структуры композитного материала.

Важность задач такого рода можно проиллюстрировать следующим примером. Качество трехслойных обтекателей современных ракет-носителей определяется не только их несущей способностью и массовыми характеристиками, но и способностью обеспечить акустическую защиту выводимого на орбиту полезного груза при внешнем акустическом воздействии с уровнем акустического давления до 160 дБ. Согласно экспериментальным данным [3], пропускание звука в основном происходит в зонах частотного спектра, совпадающих с собственными частотами (рис. 1). Характеристики акустической проницаемости оболочечных конструкций трехслойных обтекателей на собственных частотах определяются в основном диссипативными характеристиками оболочки. Для радикального улучшения звукопоглощающих характеристик трехслойных панелей и оболочек необходима оптимизация образующих их композитных структур.

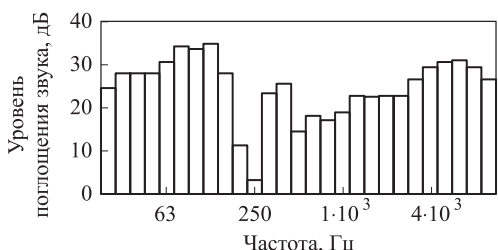


Рис. 1. Спектр поглощения звука стенкой композитного обтекателя ракеты-носителя «Протон» (разность акустических давлений в 1/3 октавных частотных диапазонах, дБ)

Существует несколько различных подходов к описанию процессов рассеяния энергии в композитах [1]. Для проектных расчетов целесообразно использовать наиболее простой энергетический подход [2, 4]. Этот подход заключается в анализе уравнения баланса энергии с учетом потерь на внутреннее трение для каждой собственной формы колебаний. При этом значения членов в уравнении баланса энергии приближенно находят по формам и частотам консервативной системы. Таким образом, каждой собственной форме колебаний ставят в соответствие коэффициент диссипации Ψ (коэффициент поглощения или относительный гистерезис), определяемый как отношение потерь энергии ΔU в элементе за один цикл свободных затухающих колебаний к максимальной потенциальной энергии U за цикл колебаний [5]. Произведение коэффициента диссипации на соответствующую ему собственную частоту представляет собой относительную мощность диссипации q , характеризующую относительное рассеяние энергии за единицу времени при гармонических затухающих колебаниях. Коэффициенты диссипации определяют амплитуды вынужденных колебаний системы в установившемся режиме при резонансе, а мощности диссипации — скорости затухания свободных колебаний.

При анализе колебаний тонкостенных композитных оболочек с использованием технической теории демпфирования [2] коэффициент диссипации для любой формы колебаний может быть записан в виде

$$\Psi = \frac{\iiint \Delta U_0(x, y, z) dx dy dz}{\iiint U_0(x, y, z) dx dy dz} = \frac{\frac{1}{2} \iiint (\psi_x \sigma_x \varepsilon_x + \psi_y \sigma_y \varepsilon_y + \psi_s \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz}{\frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz}, \quad (1)$$

где интегрирование выполняют по всему объему конструкции, $\Delta U_0(x, y, z)$, $U_0(x, y, z)$ — соответственно удельные потери энергии и удельная энергия за цикл колебаний в элементарном объеме матери-

ала; ψ_x, ψ_y, ψ_s — технические константы демпфирования, характеризующие материал в данной точке; $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ — соответственно амплитудные напряжения и деформации; оси Ox и Oy расположены в касательной плоскости оболочки, а Oz — по нормали к ней (для цилиндрических оболочек ось Ox направлена вдоль образующей). Константы ψ_x, ψ_y, ψ_z определяют исходя из характеристик однонаправленного композита: технических констант упругости $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$ и технических констант демпфирования ψ_1, ψ_2 и ψ_6 [4].

Для ортотропного материала подынтегральные выражения в числителе и знаменателе формулы (1) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \Delta U_0 &= \frac{1}{2} \left(p_{xx} \varepsilon_x^2 + 2p_{xy} \varepsilon_x \varepsilon_y + p_{yy} \varepsilon_y^2 + p_{ss} \gamma_{xy}^2 \right); \\ U_0 &= \frac{1}{2} \left(g_{xx} \varepsilon_x^2 + 2g_{xy} \varepsilon_x \varepsilon_y + g_{yy} \varepsilon_y^2 + g_{ss} \gamma_{xy}^2 \right). \end{aligned} \quad (2)$$

В выражения (2) входят коэффициенты $g_{xx}, g_{xy}, g_{yy}, g_{ss}$ матрицы жесткости и коэффициенты $p_{xx}, p_{xy}, p_{yy}, p_{ss}$ матрицы упругодиссипативных характеристик определяемые по формулам

$$\begin{aligned} g_{xx} &= g_{11} \cos^4 \varphi + g_{22} \sin^4 \varphi + (2g_{12} + 4g_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \\ g_{xy} &= (g_{11} + g_{22} - 4g_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + g_{12} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi); \\ g_{yy} &= g_{11} \sin^4 \varphi + g_{22} \cos^4 \varphi + (2g_{12} + 4g_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \\ g_{ss} &= (g_{11} + g_{22} - 2g_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + g_{66} (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)^2; \\ p_{xx} &= p_{11} \cos^4 \varphi + p_{22} \sin^4 \varphi + (2p_{12} + 4p_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \\ p_{xy} &= (p_{11} + p_{22} - 4p_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + p_{12} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi); \\ p_{yy} &= p_{11} \sin^4 \varphi + p_{22} \cos^4 \varphi + (p_{12} + 4p_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \\ p_{ss} &= (p_{11} + p_{22} - 2p_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + p_{66} (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)^2, \end{aligned}$$

где $\pm\varphi$ — угол армирования текущего ортотропного слоя многослойной структуры, отсчитываемый от оси Ox конструкции);

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad g_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad g_{12} = \nu_{21}g_{11} = \nu_{12}g_{22}; \quad g_{66} = G_{12}; \\ p_{11} &= \psi_1 g_{11}; \quad p_{22} = \psi_2 g_{22}; \quad p_{12} = \frac{1}{2} g_{12} (\psi_1 + \psi_2); \quad p_{66} = \psi_6 g_{66}. \end{aligned}$$

При колебаниях монолитных многослойных цилиндрических оболочек амплитудная энергия во всем объеме конструкции

$$U = \frac{1}{2} \iint_S \left[\sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} (g_{xx}^{(i)} \varepsilon_x^2 + 2g_{xy}^{(i)} \varepsilon_x \varepsilon_y + g_{yy}^{(i)} \varepsilon_y^2 + g_{ss}^{(i)} \gamma_{xy}^2) dz \right] dx dy, \quad (3)$$

а потери энергии за цикл свободных затухающих колебаний

$$\Delta U = \frac{1}{2} \iint_S \left[\sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} (p_{xx}^{(i)} \varepsilon_x^2 + 2p_{xy}^{(i)} \varepsilon_x \varepsilon_y + p_{yy}^{(i)} \varepsilon_y^2 + p_{ss}^{(i)} \gamma_{xy}^2) dz \right] dx dy, \quad (4)$$

где S — площадь боковой поверхности оболочки; n — число слоев в многослойном пакете; величины с верхним индексом i относятся к i -му слою, а z_{i-1} и z_i представляют собой координаты внутренней и внешней границ этого слоя.

Если деформирование оболочки может быть описано с помощью гипотез Кирхгофа — Лява и теории пологих оболочек [6], то входящие в формулы (3) и (4) деформации могут быть выражены через амплитудные перемещения точек координатной поверхности оболочки в направлениях осей координат u , v , w следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_x - z w_{xx}; \\ \varepsilon_y &= v_y + \frac{w}{R} - z w_{xx}; \\ \gamma_{xy} &= u_y + v_x - 2w_{xy}, \end{aligned} \quad (5)$$

где R — радиус оболочки; индекс после запятой здесь и далее обозначает дифференцирование по соответствующей координате.

После подстановки (5) в (3), (4) и интегрирования по координате z знаменатель выражения (1) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iint_S \left(B_{xx} u_x^2 - 2C_{xx} u_x w_{xx} + D_{xx} w_{xx}^2 + B_{yy} v_y^2 + B_{yy} \frac{w^2}{R^2} + 2B_{yy} v_y \frac{w}{R} - \right. \\ &- 2C_{yy} v_y w_{yy} - 2C_{yy} w_{yy} \frac{w}{R} + D_{yy} w_{yy}^2 + B_{ss} u_y^2 + B_{ss} v_x^2 + 4D_{ss} w_{xy}^2 + \\ &+ 2B_{ss} u_y v_x - 4C_{ss} u_y w_{xy} - 4C_{ss} v_x w_{xy} + 2B_{xy} u_x v_y + 2B_{xy} u_x \frac{w}{R} - \\ &\left. - 2C_{xy} u_x w_{yy} - 2C_{xy} v_y w_{xx} - 2C_{xy} w_{xx} \frac{w}{R} + 2D_{xy} w_{xx} w_{yy} \right) dx dy, \end{aligned} \quad (6)$$

а числитель этого выражения — как

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{2} \iint_S \left(\Pi_{xx} u_x^2 - 2\Gamma_{xx} u_x w_{xx} + \Phi_{xx} w_{xx}^2 + \Pi_{yy} v_y^2 + \Pi_{yy} \frac{w^2}{R^2} + 2\Pi_{yy} v_y \frac{w}{R} - \right. \\ &- 2\Gamma_{yy} v_y w_{yy} - 2\Gamma_{yy} w_{yy} \frac{w}{R} + \Phi_{yy} w_{yy}^2 + \Pi_{ss} u_y^2 + \Pi_{ss} v_x^2 + 4\Phi_{ss} w_{xy}^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2\Pi_{ss}u_yv_x - 4\Gamma_{ss}u_yw_{xy} - 4\Gamma_{ss}v_xw_{xy} + 2\Pi_{xy}u_xv_y + 2\Pi_{xy}u_x\frac{w}{R} - \\
 &\left. - 2\Gamma_{xy}u_xw_{yy} - 2\Gamma_{xy}v_yw_{xx} - 2\Gamma_{xy}w_{xx}\frac{w}{R} + 2\Phi_{xy}w_{xx}w_{yy}\right) dx dy. \tag{7}
 \end{aligned}$$

Здесь символами B , C и D обозначены мембранные, смешанные и изгибные жесткости многослойного пакета, а Π , Γ и Φ — соответствующие обобщенные упруго-диссипативные характеристики, определяемые по формулам

$$\begin{aligned}
 B_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g_{\alpha\beta}^{(i)}(z_i - z_{i-1}); \quad C_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g_{\alpha\beta}^{(i)}(z_i^2 - z_{i-1}^2); \\
 D_{\alpha\beta} &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n g_{\alpha\beta}^{(i)}(z_i^3 - z_{i-1}^3); \quad \Pi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g_{\alpha\beta}^{(i)}(z_i - z_{i-1}); \\
 \Gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g_{\alpha\beta}^{(i)}(z_i^2 - z_{i-1}^2); \quad \Phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n g_{\alpha\beta}^{(i)}(z_i^3 - z_{i-1}^3),
 \end{aligned}$$

в которые вместо α и β следует подставлять x , y или s . Интегралы (6) и (7) могут быть взяты для каждой собственной формы колебаний после вычисления зависимостей $u(x, y)$, $v(x, y)$ и $w(x, y)$.

Наиболее просто найти коэффициенты диссипации для оболочек, торцы которых подкреплены шпангоутами. В этом случае можно считать справедливыми граничные условия Навье [6, 7] и принять зависимости перемещений в виде

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= u_{mn} \cos \lambda_m x \sin \lambda_n y; \\
 v(x, y) &= v_{mn} \sin \lambda_m x \cos \lambda_n y; \\
 w(x, y) &= w_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y,
 \end{aligned} \tag{8}$$

где $\lambda_m = m\pi/L$; $\lambda_n = n/R$; L — длина оболочки; $m = 1, 2, 3, \dots$, $n = 2, 3, 4, \dots$ — параметры волнообразования, представляющие собой число полуволн вдоль оси оболочки и число волн в окружном направлении для данной собственной формы колебаний.

Окончательно выражения (6) и (7) принимают вид

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{S}{8} \left(\lambda_m^2 B_{xx} u_{mn}^2 - 2\lambda_m^3 C_{xx} u_{mn} w_{mn} + \lambda_m^4 D_{xx} w_{mn}^2 + \lambda_n^2 B_{yy} v_{mn}^2 + \right. \\
 &+ B_{yy} \frac{w_{mn}^2}{R^2} - 2\lambda_n B_{yy} v_{mn} w_{mn} \frac{w_{mn}}{R} - 2\lambda_n^3 C_{yy} v_{mn} w_{mn} + 2\lambda_n^2 C_{yy} \frac{w_{mn}^2}{R} + \\
 &\left. + \lambda_n^4 D_{yy} w_{mn}^2 + \lambda_n^2 B_{ss} u_{mn}^2 + \lambda_m^2 B_{ss} v_{mn}^2 + 4\lambda_m^2 \lambda_n^2 D_{ss} w_{mn}^2 + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+2\lambda_m\lambda_n B_{ss}u_{mn}v_{mn} - 4\lambda_m\lambda_n^2 C_{ss}u_{mn}w_{mn} - 4\lambda_m^2\lambda_n C_{ss}v_{mn}w_{mn} + \\
 &+ 2\lambda_m\lambda_n B_{xy}u_{mn}v_{mn} - 2\lambda_m B_{xy}u_{mn} \frac{w_{mn}}{R} - 2\lambda_m\lambda_n^2 C_{xy}u_{mn}w_{mn} - \\
 &- 2\lambda_m^2\lambda_n C_{xy}v_{mn}w_{mn} + 2\lambda_m^2 C_{xy} \frac{w_{mn}^2}{R} + 2\lambda_m^2\lambda_n^2 D_{xy}w_{mn}^2);
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta U = &\frac{S}{8} \left(\lambda_m^2 \Pi_{xx} u_{mn}^2 - 2\lambda_m^3 \Gamma_{xx} u_{mn} w_{mn} + \lambda_m^4 \Phi_{xx} w_{mn}^2 + \lambda_n^2 \Pi_{yy} v_{mn}^2 + \right. \\
 &+ \Pi_{yy} \frac{w_{mn}^2}{R^2} - 2\lambda_n \Pi_{yy} v_{mn} \frac{w_{mn}}{R} - 2\lambda_n^3 \Gamma_{yy} v_{mn} w_{mn} + 2\lambda_n^2 \Gamma_{yy} \frac{w_{mn}^2}{R} + \\
 &+ \lambda_n^4 \Phi_{yy} w_{mn}^2 + \lambda_n^2 \Pi_{ss} u_{mn}^2 + \lambda_m^2 \Pi_{ss} v_{mn}^2 + 4\lambda_m^2 \lambda_n^2 \Phi_{ss} w_{mn}^2 + \\
 &+ 2\lambda_m \lambda_n \Pi_{ss} u_{mn} v_{mn} - 4\lambda_m \lambda_n^2 \Gamma_{ss} u_{mn} w_{mn} - 4\lambda_m^2 \lambda_n \Gamma_{ss} v_{mn} w_{mn} + \\
 &+ 2\lambda_m \lambda_n \Pi_{xy} u_{mn} v_{mn} - 2\lambda_m \Pi_{xy} u_{mn} \frac{w_{mn}}{R} - 2\lambda_m \lambda_n^2 \Gamma_{xy} u_{mn} w_{mn} - \\
 &\left. - 2\lambda_m^2 \lambda_n \Gamma_{xy} v_{mn} w_{mn} + 2\lambda_m^2 \Gamma_{xy} \frac{w_{mn}^2}{R} + 2\lambda_m^2 \lambda_n^2 \Phi_{xy} w_{mn}^2 \right).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Связь между величинами u_{mn} , v_{mn} и w_{mn} определяется системой уравнений [8]

$$\begin{aligned}
 u_{mn} = &-w_{mn} \frac{(a_{13} - \omega^2 c_{13})(a_{22} - \omega^2 c_{22}) - a_{12}(a_{23} - \omega^2 c_{23})}{(a_{11} - \omega^2 c_{11})(a_{22} - \omega^2 c_{22}) - a_{12}^2}; \\
 v_{mn} = &-w_{mn} \frac{(a_{23} - \omega^2 c_{23})(a_{11} - \omega^2 c_{11}) - a_{21}(a_{13} - \omega^2 c_{13})}{(a_{11} - \omega^2 c_{11})(a_{22} - \omega^2 c_{22}) - a_{12}^2},
 \end{aligned} \tag{11}$$

где ω — круговая частота собственных колебаний для данной формы,

$$\begin{aligned}
 a_{11} = &\lambda_m^2 B_{xx} + \lambda_n^2 B_{ss}; \quad a_{12} = \lambda_m \lambda_n (B_{xy} + B_{ss}); \\
 a_{13} = &-\lambda_m \left[\lambda_m^2 C_{xx} + \lambda_n^2 (C_{xy} + 2C_{ss}) + \frac{B_{xy}}{R} \right]; \\
 a_{22} = &\lambda_n^2 B_{yy} + \lambda_m^2 B_{ss}; \\
 a_{23} = &a_{32} = -\lambda_n \left[\lambda_n^2 C_{yy} + \lambda_m^2 (C_{xy} + 2C_{ss}) + \frac{B_{yy}}{R} \right]; \\
 a_{33} = &\lambda_m^4 D_{xx} + 2\lambda_m^2 \lambda_n^2 (D_{xy} + 2D_{ss}) + \lambda_n^4 D_{yy} + \frac{B_{yy}}{R^2};
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$c_{11} = c_{22} = M_1; \quad c_{13} = -\lambda_m M; \quad c_{23} = -\lambda_n M_2; \quad c_{33} = (\lambda_m^2 + \lambda_n^2) M_3 + M_1.$$

Величины a_{11}, \dots, a_{33} и c_{11}, \dots, c_{33} являются коэффициентами определителя, равенство нулю которого дает характеристическое уравнение для расчета собственных частот [8]:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega^2 c_{11} & a_{12} & a_{13} - \omega^2 c_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \omega^2 c_{22} & a_{23} - \omega^2 c_{23} \\ a_{13} - \omega^2 c_{13} & a_{23} - \omega^2 c_{23} & a_{33} - \omega^2 c_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Собственные частоты колебаний пластины определяются решениями кубического относительно ω^2 уравнения (13). При этом каждой паре параметров волнообразования m и n соответствуют три различные значения частоты, причем каждой из них соответствует своя форма колебаний, которая определяется связью между амплитудными значениями перемещений (11). Для каждой из этих форм коэффициент диссипации определяют по формуле (1) с учетом выражений (9)–(11), а относительную мощность диссипации вычисляют как произведение величины Ψ на собственную частоту, равную $\omega/(2\pi)$.

Для тонкостенных оболочек одна из трех форм для каждой пары m и n соответствует преимущественно изгибным колебаниям с большими поперечными прогибами, а две другие — преимущественно мембранным колебаниям, когда основные перемещения имеют место в касательной плоскости. При этом собственная частота первых, как правило, колебаний значительно меньше, чем вторых.

Для замкнутых цилиндрических оболочек наряду с описанными возможны также осесимметричные формы колебаний, при анализе которых в приведенные выше формулы следует подставлять $n = 0$, а вместо выражений (11) использовать зависимости

$$u_{mn} = -w_{mn} \frac{a_{13} - \omega^2 c_{13}}{a_{11} - \omega^2 c_{11}}; \quad v_{mn} = 0. \quad (14)$$

Зависимости характеристик рассеяния энергии от структурных параметров композитной структуры весьма сложны. Для примера на рис. 2 показаны графики коэффициентов и мощностей диссипации для композитной оболочки, образованной перекрестно-армированными слоями углепластика. Радиус оболочки 0,5 м, длина 0,5 м, толщина стенки 2 мм. По оси абсцисс здесь отложены значения угла ориентации слоев $\pm\varphi$, отсчитываемого от оси оболочки. На графиках показаны характеристики собственных форм с числом полуволн $m = 1$ вдоль оси и числами волн $n = 3 \dots 10$ в окружном направлении. Характеристики однонаправленного материала взяты из работы [9].

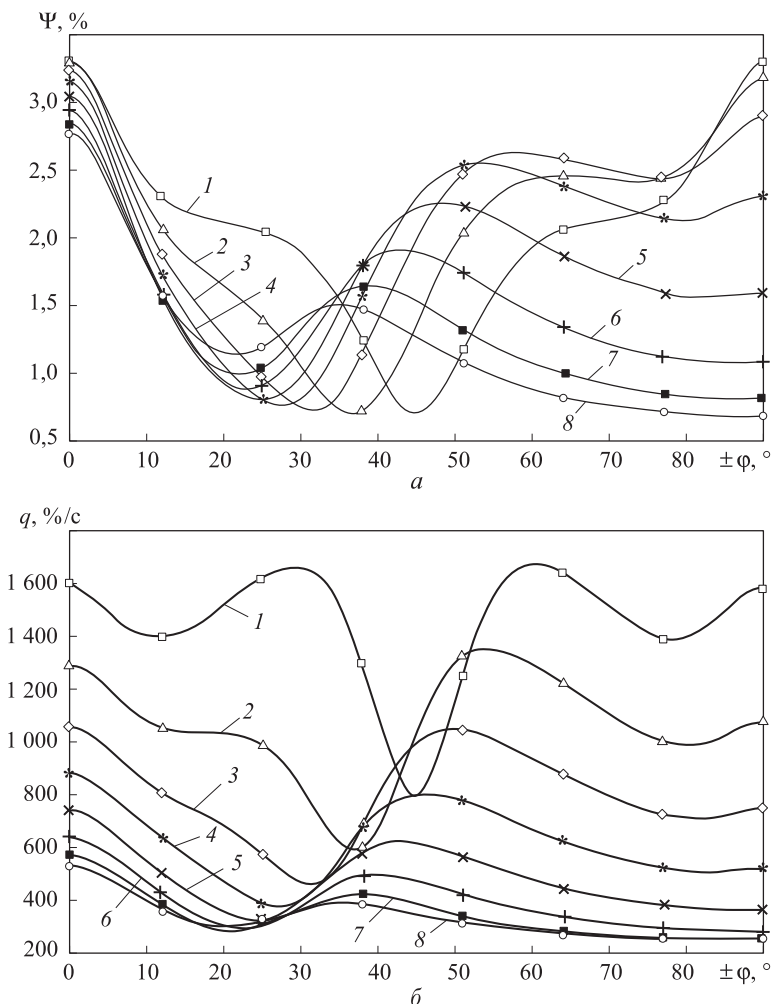


Рис. 2. Коэффициенты (а) и относительные мощности (б) диссипации для преимущественно изгибных форм колебаний перекрестно-армированной оболочки из углепластика в зависимости от угла армирования при $n = 3$ (1), 4 (2), 5 (3), 6 (4), 7 (5), 8 (6), 9 (7) и 10 (8)

Для расчета характеристик рассеяния энергии трехслойных оболочек с многослойными композитными обшивками и легким (сотовым) наполнителем удобно использовать кинематические гипотезы «ломаной линии», когда деформирование каждой из обшивок описывается гипотезами Кирхгофа — Лява, а для наполнителя используется схема Тимошенко [10, 11]. В соответствии с этими гипотезами деформированное состояние оболочки описывается пятью функциями: $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ характеризуют соответственно перемещения точек срединной поверхности наполнителя в направлении осей Ox , Oy и поперечный прогиб; $\vartheta_x(x, y)$ и $\vartheta_y(x, y)$ представляют собой углы поворота наполнителя в соответствующих плоскостях. Связь между угла-

ми поворота заполнителя, прогибом и углами сдвига заполнителя γ_{xz}, γ_{yz} имеет вид

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \vartheta_x - w_x; \\ \gamma_{yz} &= \vartheta_y - w_y;\end{aligned}\tag{15}$$

деформации в обшивках

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} - zw_{,xx} \pm c\gamma_{xz,x}, \\ \varepsilon_y &= v_{,y} + \frac{w}{R} - zw_{,xx} \pm c\gamma_{yz,y}, \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} - 2w_{,xy} \pm c\gamma_{xz,y} \pm c\gamma_{yz,x},\end{aligned}\tag{16}$$

где c — половина толщины заполнителя (знак «+» относится к внешней обшивке, «-» — к внутренней); деформации заполнителя выражаются формулами (15).

Числитель и знаменатель формулы (1) для трехслойной оболочки представляют собой сумму трех слагаемых, вычисляемых для двух обшивок и заполнителя. Энергия деформирования каждой обшивки (предполагается, что обшивки одинаковые) определяется выражением (3), в которое следует подставить деформации (16). Энергия деформирования заполнителя

$$U_3 = \frac{1}{2} \iint_S \left[\int_{-c}^c (G_{xz}^{(3)} \gamma_{xz}^2 + G_{yz}^{(3)} \gamma_{yz}^2) dz \right] dx dy = c \iint_S (G_{xz}^{(3)} \gamma_{xz}^2 + G_{yz}^{(3)} \gamma_{yz}^2) dx dy,$$

где $G_{xz}^{(3)}, G_{yz}^{(3)}$ — модули сдвига материала заполнителя в соответствующих плоскостях.

Потери энергии в каждой из обшивок выражаются формулой (4) с учетом (16), а потери энергии в заполнителе

$$\begin{aligned}\Delta U_3 &= \frac{1}{2} \iint_S \left[\int_{-c}^c (\psi_{xz}^{(3)} G_{xz}^{(3)} \gamma_{xz}^2 + \psi_{yz}^{(3)} G_{yz}^{(3)} \gamma_{yz}^2) dz \right] dx dy = \\ &= c \iint_S (\psi_{xz}^{(3)} G_{xz}^{(3)} \gamma_{xz}^2 + \psi_{yz}^{(3)} G_{yz}^{(3)} \gamma_{yz}^2) dx dy,\end{aligned}$$

где $\psi_{xz}^{(3)}, \psi_{yz}^{(3)}$ — коэффициенты диссипации материала заполнителя при сдвиге в соответствующих плоскостях.

Для оболочки с подкрепленными торцами перемещения срединной поверхности заполнителя можно определять по формулам (8). Вместо углов поворота заполнителя $\vartheta_x(x, y)$ и $\vartheta_y(x, y)$ целесообразно ввести имеющие размерность длины функции $X(x, y) = c\gamma_{xz}(x, y)$ и $Y(x, y) = c\gamma_{yz}(x, y)$ в виде

$$X(x, y) = X_{mn} \cos \lambda_m x \sin \lambda_n y; \quad Y(x, y) = Y_{mn} \sin \lambda_m x \cos \lambda_n y.$$

После подстановки полученных выражений и интегрирования соотношения для амплитудной энергии и потери энергии за цикл колебаний для трехслойной оболочки принимают вид

$$U = \frac{S}{4} \left(\lambda_m^2 B_{xx} u_{mn}^2 + \lambda_m^4 D_{xx} w_{mn}^2 + \lambda_m^2 B_{xx} X_{mn}^2 + 2\lambda_m^3 C_{xx} w_{mn} X_{mn} + \right. \\ \left. + \lambda_n^2 B_{yy} v_{mn}^2 + \lambda_n^4 D_{yy} w_{mn}^2 + \lambda_n^2 B_{yy} Y_{mn}^2 + B_{yy} w_{mn}^2 / R^2 - \right. \\ \left. - 2\lambda_n B_{yy} v_{mn} w_{mn} / R + 2\lambda_n^3 C_{yy} w_{mn} Y_{mn} + \lambda_n^2 B_{ss} u_{mn}^2 + \lambda_m^2 B_{ss} v_{mn}^2 + \right. \\ \left. + 4\lambda_m^2 \lambda_n^2 D_{ss} w_{mn}^2 + \lambda_n^2 B_{ss} X_{mn}^2 + \lambda_m^2 B_{ss} Y_{mn}^2 + 2\lambda_m \lambda_n B_{ss} u_{mn} v_{mn} + \right. \\ \left. + 4\lambda_m \lambda_n^2 C_{ss} w_{mn} X_{mn} + 4\lambda_m^2 \lambda_n C_{ss} w_{mn} Y_{mn} + 2\lambda_m \lambda_n B_{ss} X_{mn} Y_{mn} + \right. \\ \left. + 2\lambda_m \lambda_n B_{xy} u_{mn} v_{mn} - 2\lambda_m B_{xy} u_{mn} w_{mn} / R + 2\lambda_m^2 \lambda_n^2 D_{xy} w_{mn}^2 + \right. \\ \left. + 2\lambda_m \lambda_n^2 C_{xy} w_{mn} X_{mn} + 2\lambda_m^2 \lambda_n C_{xy} w_{mn} Y_{mn} + 2\lambda_m \lambda_n B_{xy} X_{mn} Y_{mn} + \right. \\ \left. + G_{xz}^{(3)} X_{mn}^2 / c + G_{yz}^{(3)} Y_{mn}^2 / c \right);$$

$$\Delta U = \frac{S}{4} \left(\lambda_m^2 \Pi_{xx} u_{mn}^2 + \lambda_m^4 \Phi_{xx} w_{mn}^2 + \lambda_m^2 \Pi_{xx} X_{mn}^2 + 2\lambda_m^3 \Gamma_{xx} w_{mn} X_{mn} + \right. \\ \left. + \lambda_n^2 \Pi_{yy} v_{mn}^2 + \lambda_n^4 \Phi_{yy} w_{mn}^2 + \lambda_n^2 \Pi_{yy} Y_{mn}^2 + \Pi_{yy} w_{mn}^2 / R^2 - \right. \\ \left. - 2\lambda_n \Pi_{yy} v_{mn} w_{mn} / R + 2\lambda_n^3 \Gamma_{yy} w_{mn} Y_{mn} + \lambda_n^2 \Pi_{ss} u_{mn}^2 + \lambda_m^2 \Pi_{ss} v_{mn}^2 + \right. \\ \left. + 4\lambda_m^2 \lambda_n^2 \Phi_{ss} w_{mn}^2 + \lambda_n^2 \Pi_{ss} X_{mn}^2 + \lambda_m^2 \Pi_{ss} Y_{mn}^2 + 2\lambda_m \lambda_n \Pi_{ss} u_{mn} v_{mn} + \right. \\ \left. + 4\lambda_m \lambda_n^2 \Gamma_{ss} w_{mn} X_{mn} + 4\lambda_m^2 \lambda_n \Gamma_{ss} w_{mn} Y_{mn} + 2\lambda_m \lambda_n \Pi_{ss} X_{mn} Y_{mn} + \right. \\ \left. + 2\lambda_m \lambda_n \Pi_{xy} u_{mn} v_{mn} - 2\lambda_m \Pi_{xy} u_{mn} w_{mn} / R + 2\lambda_m^2 \lambda_n^2 \Phi_{xy} w_{mn}^2 + \right. \\ \left. + 2\lambda_m \lambda_n^2 \Gamma_{xy} w_{mn} X_{mn} + 2\lambda_m^2 \lambda_n \Gamma_{xy} w_{mn} Y_{mn} + 2\lambda_m \lambda_n \Pi_{xy} X_{mn} Y_{mn} + \right. \\ \left. + G_{xz}^{(3)} \Psi_{xz}^{(3)} X_{mn}^2 / c + G_{yz}^{(3)} \Psi_{yz}^{(3)} Y_{mn}^2 / c \right).$$

Здесь u_{mn} , v_{mn} , X_{mn} и Y_{mn} выражают через w_{mn} следующим образом [8]:

$$u_{mn} = -w_{mn} \frac{a_{13} (a_{22} - \omega^2 c_{22}) - a_{12} a_{23}}{(a_{11} - \omega^2 c_{11})(a_{22} - \omega^2 c_{22}) - a_{12} a_{21}}; \\ v_{mn} = -w_{mn} \frac{a_{23} (a_{11} - \omega^2 c_{11}) - a_{21} a_{13}}{(a_{11} - \omega^2 c_{11})(a_{22} - \omega^2 c_{22}) - a_{12} a_{21}}; \\ X_{mn} = w_{mn} \frac{(a_{35} - \omega^2 c_{35}) a_{45} - (a_{34} - \omega^2 c_{34})(a_{55} - \omega^2 c_{55})}{(a_{44} - \omega^2 c_{44})(a_{55} - \omega^2 c_{55}) - a_{45}^2}; \\ Y_{mn} = w_{mn} \frac{(a_{34} - \omega^2 c_{34}) a_{45} - (a_{35} - \omega^2 c_{35})(a_{44} - \omega^2 c_{44})}{(a_{44} - \omega^2 c_{44})(a_{55} - \omega^2 c_{55}) - a_{45}^2}; \quad (17)$$

a_{11} , a_{12} , a_{22} и a_{33} вычисляются по формулам (12);

$$\begin{aligned}
 a_{13} &= -\lambda_m \frac{B_{xy}}{R}; & a_{23} &= -\lambda_n \frac{B_{yy}}{R}; & a_{34} &= \lambda_m \left[\lambda_m^2 C_{xx} + \lambda_n^2 (C_{xy} + 2C_{ss}) \right]; \\
 a_{35} = a_{53} &= \lambda_n \left[\lambda_n^2 C_{yy} + \lambda_m^2 (C_{xy} + 2C_{ss}) \right]; & a_{44} &= \lambda_m^2 B_{xx} + \lambda_n^2 B_{ss} + G_{xz}^{(3)} / c; \\
 a_{45} &= \lambda_m \lambda_n (B_{xy} + B_{ss}); & a_{55} &= \lambda_m^2 B_{ss} + \lambda_n^2 B_{yy} + G_{yz}^{(3)} / c; \\
 c_{11} = c_{22} &= M_1 + \rho_3 c; & c_{33} &= (\lambda_m^2 + \lambda_n^2) M_3 + M_1 + \rho_3 c \left\{ 1 + \frac{c^2}{3} (\lambda_m^2 + \lambda_n^2) \right\}; \\
 c_{34} &= \lambda_m \left(M_2 + \frac{\rho_3 c^2}{3} \right); & c_{35} &= \lambda_n \left(M_2 + \frac{\rho_3 c^2}{3} \right); & c_{44} = c_{55} &= M_1 + \frac{\rho_3 c}{3},
 \end{aligned}$$

а круговую частоту ω определяют решением характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} - \omega^2 c_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\
 a_{21} & a_{22} - \omega^2 c_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} - \omega^2 c_{33} & a_{34} - \omega^2 c_{34} & a_{35} - \omega^2 c_{35} \\
 0 & 0 & a_{43} - \omega^2 c_{43} & a_{44} - \omega^2 c_{44} & a_{45} \\
 0 & 0 & a_{53} - \omega^2 c_{53} & a_{54} & a_{55} - \omega^2 c_{55}
 \end{vmatrix} = 0.$$

(18)

Каждой паре параметров волнообразования m и n соответствует пять собственных частот, определяемых решениями уравнения (17). Этим частотам, согласно (17), соответствуют следующие формы: две преимущественно мембранные, две преимущественно сдвиговые и одна преимущественно изгибная [8], причем последней соответствует низшая из пяти частот для тонкостенной трехслойной оболочки.

Как и для монолитных, для цилиндрических оболочек возможны осесимметричные формы колебаний, при расчете которых следует положить равными нулю n , v_{mn} и Y_{mn} . Для иллюстрации приведенных зависимостей на рис. 3 показаны графики коэффициентов и мощностей диссипации для крупногабаритной трехслойной оболочки с углепластиковыми обшивками, армированными по схеме $[90_2^{\circ}/0_1/\pm\varphi_1]$. Характеристики материалов обшивок и сотового заполнителя взяты из работы [9]. Радиус оболочки 1,85 м, длина 4 м, толщина заполнителя 32,4 мм, толщина каждой обшивки 0,65 мм. На рисунке показаны характеристики собственных форм с числом полувольт вдоль оси $m = 1$ и числами волн в окружном направлении $n = 2 \dots 8$, а также осесимметричной формы колебаний оболочки. На графиках хорошо виден немонотонный характер зависимости исследуемых характеристик как от параметров волнообразования, так и от ориентации материала в слоях обшивок.

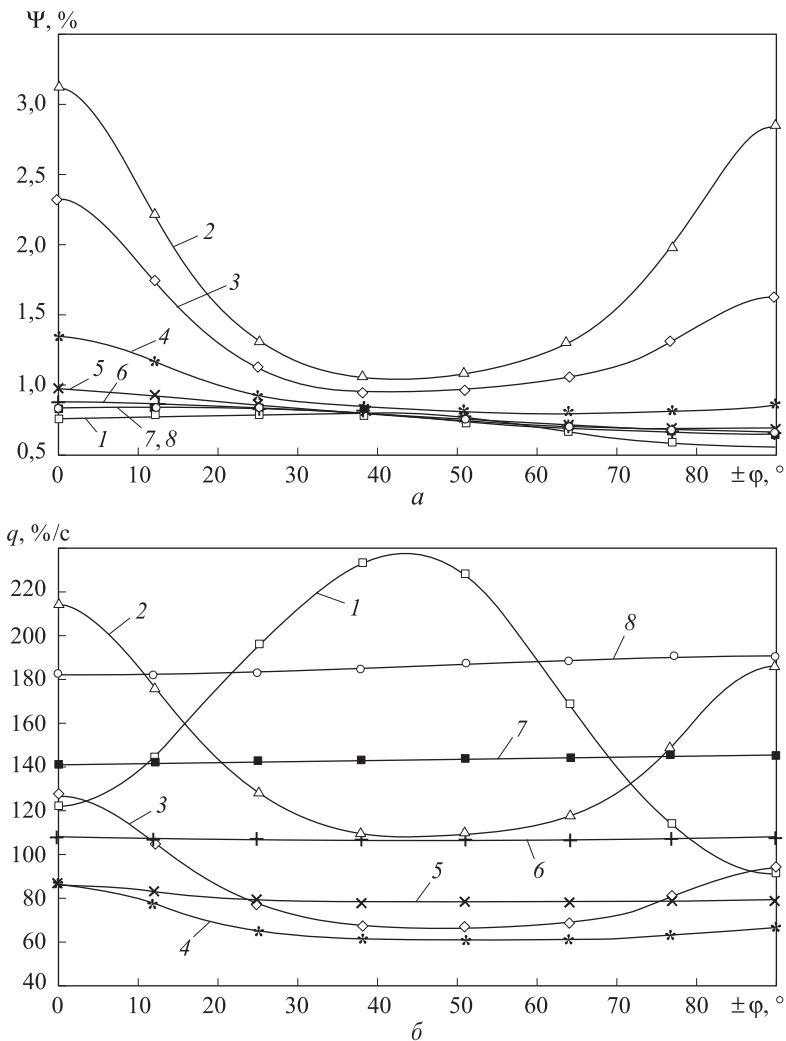


Рис. 3. Коэффициенты (*a*) и относительные мощности (*б*) диссипации для преимущественно изгибных форм колебаний трехслойной оболочки с углепластиковыми обшивками структуры $[90_2^{\circ} / 0_1 / \pm\varphi_1]$ в зависимости от угла φ для осесимметричной формы (1) и при $n = 2$ (2), 3 (3), 4 (4), 5 (5), 6 (6), 7 (7), 8 (8)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Zinoviev P.A., Ermakov Y.N. *Energy Dissipation in Composite Materials*. Lancaster (USA), Technomic Publishing Co., 1994, 246 p.
- [2] Смердов А.А. Оптимизация характеристик демпфирования многослойных композитных стержней. *Авиационная промышленность*, 2006, № 2, с. 12–18.
- [3] Бахтин А.Г., Грудзин А.Л., Зиновьев П.А., Петровский С.А., Смердов А.А. Акустическое сопротивление цилиндрических композитных панелей. *Прикладные проблемы механики ракетно-космических систем. Тез. докл. Всероссийской конф.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000, с. 73.

- [4] Зиновьев П.А., Смердов А.А. *Оптимальное проектирование композитных материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006, 103 с.
- [5] Бидерман В.Л. *Теория механических колебаний*. Москва, Высш. шк., 1980, 408 с.
- [6] Балабух Л.И., Алфутов Н.А., Усюкин В.И. *Строительная механика ракет*. Москва, Высш. шк., 1984, 391 с.
- [7] Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988, 272 с.
- [8] Смердов А.А. *Разработка методов проектирования композитных материалов и конструкций ракетно-космической техники*. Дис. ... д-ра техн. наук. Москва, 2008, 410 с.
- [9] Зиновьев П.А., Смердов А.А., Кулиш Г.Г. Экспериментальное исследование упруго диссипативных характеристик углепластиков. *Механика композитных материалов*, 2003, т. 39, № 5, с. 595–602.
- [10] Григолюк Э.И., Чулков П.П. *Устойчивость и колебания трехслойных оболочек*. Москва, Машиностроение, 1973, 172 с.
- [11] Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1984, 264 с.

Статья поступила в редакцию 06.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Смердов А.А. Рассеяние энергии при колебаниях композитных оболочек.

Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 7.

URL: [http:// engjournal.ru/catalog/machin/rocket/858.html](http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/858.html)

Смердов Андрей Анатольевич окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1981 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 101 научной работы в области оптимального проектирования композитных материалов и конструкций ракетно-космической техники.
e-mail: asmerdov@mail.ru