

## **Расчет нижней границы предельной нагрузки для многослойных волокнистых композитов при двухосном нагружении**

© Б.С. Сарбаев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Предложен способ расчета прочностных характеристик многослойных композиционных материалов (КМ) с различными схемами армирования при двухосном нагружении. Монослой из волокнистого КМ подчиняется критерию максимальных напряжений. Основное внимание уделено расчету нижней границы предельной нагрузки на основе статической теоремы метода предельного равновесия. Расчет предельной нагрузки рассмотрен как задача линейного программирования, предложен численный способ ее решения. Для ряда частных случаев методом неравенств получены аналитические решения, в том числе для КМ со сложной схемой армирования при использовании нитяной модели однонаправленного волокнистого КМ. Предложена модель, не учитывающая несущую способность монослоя при чистом сдвиге в плоскости армирования. Приведены примеры, в которых выполнен анализ прочностных характеристик КМ для многослойных стекло- и углепластиков с различными схемами армирования. Построены предельные кривые, удовлетворительно согласующиеся с известными экспериментальными данными.*

**Ключевые слова:** многослойный композиционный материал, предельная нагрузка, линейное программирование, критерий максимальных напряжений.

При разработке элементов конструкций из многослойных волокнистых композиционных материалов (КМ) необходимо располагать данными о прочностных характеристиках материала. Получение исчерпывающей информации экспериментальным способом затруднено в связи с многообразием возможных схем армирования многослойных КМ и вариантов их нагружения. Поэтому на этапе предварительного проектирования полезно использовать расчетно-теоретические способы прогнозирования прочностных характеристик многослойных КМ.

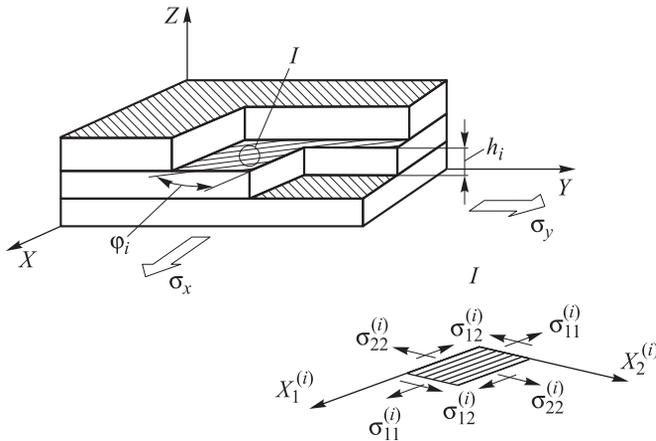
В настоящее время на практике утвердился подход, в соответствии с которым расчет предельной (разрушающей) нагрузки для многослойных КМ предполагает анализ напряжений и деформаций в монослоях в течение всего процесса нагружения. В этом случае необходимы модель нелинейного деформирования однонаправленного волокнистого КМ и критерий разрушения. Типичным примером такого подхода является способ расчета прочностных характеристик многослойных КМ, изложенный в работах [1, 2]. В нем для монослоя используют

модель идеально-пластического ортотропного тела и критерий максимальных напряжений. Расчету пределов прочности многослойного КМ с заданной схемой армирования при различных видах нагружения предшествует численный анализ диаграмм деформирования.

На этапе предварительного проектирования некоторых видов конструкций из КМ (например, для ракетно-космической техники) такой подход представляется избыточным, так как в этом случае достаточно располагать данными о схеме армирования и численных значениях пределов прочности монослоя. В этой связи перспективен расчет прочностных характеристик многослойных КМ, основанный на методе предельного равновесия. Как известно [3], в этом случае конструкцию рассматривают в предельном состоянии и нет необходимости в нелинейном анализе процесса деформирования материала. Применительно к многослойным КМ такой подход был реализован в работе [4], в которой на основе метода конечных элементов разработан способ оценки предельной нагрузки конструкции снизу и сверху. Материал при этом рассматривают как жестко-пластический с условием пластичности, изображаемым в пространстве напряжений гладкими и негладкими предельными поверхностями, а задачу расчета предельной нагрузки — как задачу нелинейного программирования.

В работах [5, 6] метод предельного равновесия был применен для расчета прочностных характеристик многослойных КМ с симметричным перекрестным армированием, а также КМ, содержащих изотропный слой. В отличие от работы [4] акцент сделан на применении критерия максимальных напряжений для монослоя и критерия Треска — Сен-Венана для изотропного слоя. В такой постановке задача расчета предельной нагрузки для многослойного КМ с заданной схемой армирования сравнительно проста и может быть рассмотрена как задача линейного программирования. Кроме того, в ряде случаев такой подход позволяет получить обозримые аналитические результаты, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными и удобны в практических расчетах. Отметим, что в этих же публикациях можно найти краткий обзор литературы по применению метода предельного равновесия в механике композитов.

Рассмотрим многослойный КМ с заданной схемой армирования при плоском напряженном состоянии. Вектор приложенных к КМ средних напряжений  $\{\sigma_c\} = (\sigma_x, \sigma_y, 0)^T$ , т. е. имеет место двухосное нагружение (рис. 1). Координаты изображающей точки на плоскости напряжений  $\sigma_x O \sigma_y$ , задающие текущее напряженное состояние, определим в соответствии с формулами  $\sigma_x = S \cos \alpha$  и  $\sigma_y = S \sin \alpha$  (рис. 2). Здесь  $S \geq 0$  — модуль вектора напряжения;  $\alpha$  — угол, характеризующий кривую нагружения многослойного КМ. При построении предельной кривой на плоскости  $\sigma_x O \sigma_y$ , угол  $\alpha$  изменяется от 0 до  $2\pi$ .



**Рис. 1.** Многослойный КМ и монослой при плоском напряженном состоянии

Уравнения статики для рассматриваемого КМ имеют следующий вид:

$$S \cos \alpha = \sum_{i=1}^n \left( \sigma_{11}^{(i)} \cos^2 \varphi_i + \sigma_{22}^{(i)} \sin^2 \varphi_i + \sigma_{12}^{(i)} \sin 2\varphi_i \right) \delta_i;$$

$$S \sin \alpha = \sum_{i=1}^n \left( \sigma_{11}^{(i)} \sin^2 \varphi_i + \sigma_{22}^{(i)} \cos^2 \varphi_i - \sigma_{12}^{(i)} \sin 2\varphi_i \right) \delta_i;$$

$$\sum_{i=1}^n \left[ \left( \sigma_{22}^{(i)} - \sigma_{11}^{(i)} \right) \sin \varphi_i \cos \varphi_i + \sigma_{12}^{(i)} \cos 2\varphi_i \right] \delta_i = 0,$$

(1)

где  $n$  — число монослоев;  $\sigma_{11}^{(i)}$ ,  $\sigma_{22}^{(i)}$ ,  $\sigma_{12}^{(i)}$  — напряжения в  $i$ -м монослое (индекс «1» соответствует направлению вдоль волокон, «2» — поперек волокон (см. рис. 1);  $\varphi_i$  и  $\delta_i$  — соответственно угол армирования и относительная толщина  $i$ -го монослоя.

Как следует из формулы (1), параметром нагрузки в данном случае является положительная величина  $S$ .

Далее предполагаем, что  $i$ -й монослой подчиняется критерию максимальных напряжений, т. е. справедливы следующие нестрогие неравенства:

$$\begin{aligned} -F_{-1}^{(i)} &\leq \sigma_{11}^{(i)} \leq F_{+1}^{(i)}; \\ -F_{-2}^{(i)} &\leq \sigma_{22}^{(i)} \leq F_{+2}^{(i)}; \\ -F_{12}^{(i)} &\leq \sigma_{12}^{(i)} \leq F_{12}^{(i)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $F_{+1}^{(i)}$ ,  $F_{-1}^{(i)}$ ,  $F_{+2}^{(i)}$ ,  $F_{-2}^{(i)}$  — пределы прочности монослоя при растяжении—сжатии вдоль и поперек волокон;  $F_{12}^{(i)}$  — предел прочности



**Рис. 2.** Текущее напряженное состояние многослойного КМ на плоскости  $\sigma_x O \sigma_y$

монослоя при сдвиге в плоскости армирования. Отметим, что при выполнении равенств происходит разрушение монослоя.

Из первых двух формул (1), а также неравенств (2) для многослойных КМ с произвольной схемой армирования следует неравенство

$$-\sum_{i=1}^n (F_{-1}^{(i)} + F_{-2}^{(i)}) \delta_i \leq \sigma_x + \sigma_y \leq \sum_{i=1}^n (F_{+1}^{(i)} + F_{+2}^{(i)}) \delta_i,$$

а если все монослои изготовлены из одного материала, то

$$-F_{-1} - F_{-2} \leq \sigma_x + \sigma_y \leq F_{+1} + F_{+2}. \quad (3)$$

Согласно статической теореме метода предельного равновесия, нижней границей предельной нагрузки для многослойного КМ является наибольшая из нагрузок, удовлетворяющих уравнениям статики (1) и условиям (2). Следовательно, для отыскания нижней границы предельной нагрузки необходимо найти максимальное значение параметра  $S$  при выполнении условий (1) и (2), выражаемых линейными зависимостями относительно переменных  $\sigma_{11}^{(i)}, \sigma_{22}^{(i)}, \sigma_{12}^{(i)}, S$ . Таким образом, получаем задачу линейного программирования.

Как известно [7], в задачах линейного программирования функция цели должна зависеть от неотрицательных переменных. В связи с этим введем вспомогательные переменные

$$\begin{aligned} X_{11}^{(i)} &= \sigma_{11}^{(i)} + F_{-1}^{(i)}; \\ X_{22}^{(i)} &= \sigma_{22}^{(i)} + F_{-2}^{(i)}; \\ X_{12}^{(i)} &= \sigma_{12}^{(i)} + F_{12}^{(i)}. \end{aligned}$$

При любом значении напряжений переменные  $X_{11}^{(i)}, X_{22}^{(i)}, X_{12}^{(i)}$  будут неотрицательными. При этом вектор переменных имеет вид

$$X = (X_{11}^{(1)}, X_{22}^{(1)}, X_{12}^{(1)}, X_{11}^{(2)}, X_{22}^{(2)}, X_{12}^{(2)}, \dots, X_{11}^{(n)}, X_{22}^{(n)}, X_{12}^{(n)})^T. \quad (4)$$

Целевую функцию запишем в виде

$$F(X, S) = S. \quad (5)$$

Тогда для определения нижней границы предельной нагрузки следует определить  $\text{Max}[F(X, S)]$  при выполнении условий

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_{11}^{(i)} \cos^2 \varphi_i + X_{22}^{(i)} \sin^2 \varphi_i + X_{12}^{(i)} \sin 2\varphi_i) \delta_i - C_{11}^{(i)} - S \cos \alpha &= 0; \\ \sum_{i=1}^n (X_{11}^{(i)} \sin^2 \varphi_i + X_{22}^{(i)} \cos^2 \varphi_i - X_{12}^{(i)} \sin 2\varphi_i) \delta_i - C_{22}^{(i)} - S \sin \alpha &= 0; \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \left[ (X_{22}^{(i)} - X_{11}^{(i)}) \sin \varphi_i \cos_i \varphi + X_{12}^{(i)} \cos 2\varphi_i \right] \delta_i - C_{12}^{(i)} = 0;$$

$$0 \leq X_{11}^{(i)} \leq F_{+1}^{(i)} + F_{-1}^{(i)}, \quad 0 \leq X_{22}^{(i)} \leq F_{+2}^{(i)} + F_{-2}^{(i)}, \quad 0 \leq X_{12}^{(i)} \leq 2F_{12}^{(i)}, \quad S \geq 0, \quad (6)$$

где

$$C_{11}^{(i)} = \sum_{i=1}^n \left( F_{-1}^{(i)} \cos^2 \varphi_i + F_{-2}^{(i)} \sin^2 \varphi_i + F_{12}^{(i)} \sin 2\varphi_i \right) \delta_i;$$

$$C_{22}^{(i)} = \sum_{i=1}^n \left( F_{-1}^{(i)} \sin^2 \varphi_i + F_{-2}^{(i)} \cos^2 \varphi_i - F_{12}^{(i)} \sin 2\varphi_i \right) \delta_i;$$

$$C_{12}^{(i)} = \sum_{i=1}^n \left[ (F_{-2}^{(i)} - F_{-1}^{(i)}) \sin \varphi_i \cos_i \varphi + F_{12}^{(i)} \cos 2\varphi_i \right] \delta_i.$$

Отметим, что данная формулировка задачи аналогична формулировке задачи расчета предельной нагрузки для стержневых конструкций, предложенной в работе [8]. Рассматриваемая здесь задача линейного программирования может быть решена численно с помощью стандартных программ, например встроенной функции Maximize в пакете MathCAD. Следует учитывать, что для схем армирования многослойных КМ, наиболее часто используемых на практике, количество компонент вектора  $X$  относительно невелико. При этом ограничения (6) существенным образом упрощаются, а целевая функция (5) остается неизменной. Рассмотрим ряд примеров.

Выполним анализ прочностных характеристик многослойного КМ с симметричным перекрестным армированием. В этом случае имеем  $n = 2$ ;  $\delta_1 = \delta_2 = 0,5$ ;  $\varphi_1 = \varphi$ ,  $\varphi_2 = -\varphi$ . Здесь и далее угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $OX$  (см. рис. 1). Из третьего равенства (1) получаем

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{11};$$

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = \sigma_{22};$$

$$\sigma_{12}^{(1)} = -\sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{12}.$$

Тогда вектор переменных (4) будет иметь вид  $X = (X_{11}, X_{22}, X_{12})^T$ , что приводит к упрощению условий (6):

$$X_{11} \cos^2 \varphi + X_{22} \sin^2 \varphi + X_{12} \sin 2\varphi - C_{11} - S \cos \alpha = 0;$$

$$X_{11} \sin^2 \varphi + X_{22} \cos^2 \varphi - X_{12} \sin 2\varphi - C_{22} - S \sin \alpha = 0; \quad (7)$$

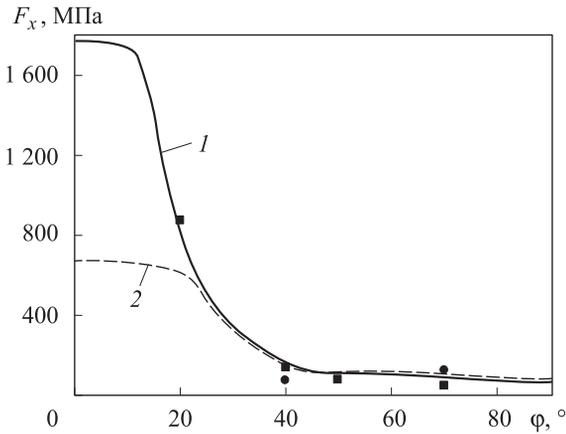
$$0 \leq X_{11} \leq F_{+1} + F_{-1}, \quad 0 \leq X_{22} \leq F_{+2} + F_{-2}, \quad 0 \leq X_{12} \leq 2F_{12}, \quad S \geq 0,$$

где  $C_{11}$ ,  $C_{22}$  — константы, вычисляемые по формулам

$$C_{11} = F_{-1} \cos^2 \varphi + F_{-2} \sin^2 \varphi + F_{12} \sin 2\varphi;$$

$$C_{22} = F_{-1} \sin^2 \varphi + F_{-2} \cos^2 \varphi - F_{12} \sin 2\varphi.$$

Проведем расчет предела прочности  $F_x$  данного КМ в зависимости от угла армирования  $\varphi$ . Для этого в условиях (7) примем  $\alpha = 0$ . Аналитическое решение данной задачи методом неравенств приведено в работе [5]. На рис. 3 показана кривая, полученная для углепластика на основе волокон Т700 и эпоксидного связующего. В расчете были приняты следующие значения пределов прочности:  $F_{+1} = 1770$  МПа;  $F_{-1} = 670$  МПа;  $F_{+2} = 65,9$  МПа;  $F_{-2} = 73,5$  МПа;  $F_{12} = 57,4$  МПа. Отметим, что полученные численные результаты совпали с расчетами, выполненными по формулам из работы [5].



**Рис. 3.** Зависимость предела прочности при одноосном растяжении (1, ■) и сжатии (2, ●) для многослойного углепластика с симметричным перекрестным армированием от угла армирования  $\varphi$ :  
линии — расчет; точки — эксперимент [9]

Построим предельную кривую для стеклопластика марки E-Glass/MY750/HY917/DY063 с углами армирования  $\varphi = \pm 55^\circ$ . Соответствующие экспериментальные данные представлены в работе [10]. В статье [5] показано, что область допустимых напряжений определяется следующими неравенствами:

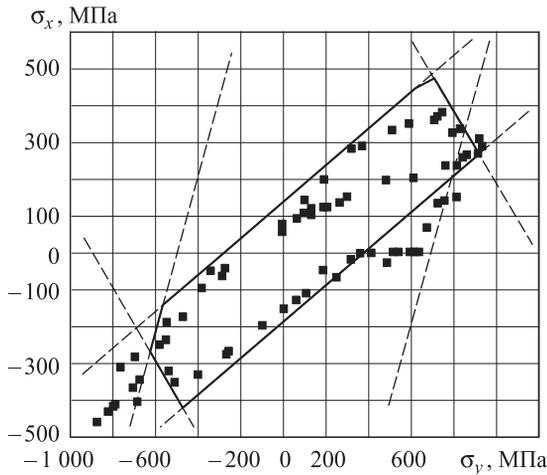
$$-F_{-1} - F_{-2} \leq \sigma_{11c} + \sigma_{22c} \leq F_{+1} + F_{+2};$$

$$-2F_{12} \operatorname{tg} \varphi - F_{+1} (\operatorname{tg}^2 \varphi - 1) \leq \sigma_{11c} - \sigma_{22c} \operatorname{tg}^2 \varphi \leq 2F_{12} \operatorname{tg} \varphi + F_{-1} (\operatorname{tg}^2 \varphi - 1);$$

$$-2F_{12} \operatorname{ctg} \varphi - F_{-2} (1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi) \leq \sigma_{11c} - \sigma_{22c} \operatorname{ctg}^2 \varphi \leq 2F_{12} \operatorname{ctg} \varphi + F_{+2} (1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi).$$

(8)

На рис. 4 область, соответствующая неравенствам (8), ограничена штриховыми линиями, а ее границей является искомая предельная кривая. Определенная в результате численного решения задачи линейного программирования предельная кривая практически совпала с кривой, полученной из неравенств (8). В расчетах использованы следующие прочностные характеристики монослоя:  $F_{+1} = 1150$  МПа;  $F_{-1} = 750$  МПа;  $F_{+2} = 40$  МПа;  $F_{-2} = 150$  МПа;  $F_{12} = 80$  МПа. Как видно на рис. 4, теоретические результаты (сплошные линии) в целом удовлетворительно соответствуют экспериментальным данным (точки).



**Рис. 4.** Предельная кривая для многослойного стеклопластика с углами армирования  $\varphi = \pm 55^\circ$  на плоскости напряжений  $\sigma_x$   $O\sigma_y$

Рассмотрим многослойный КМ со схемой армирования  $[0/90^\circ/\pm\varphi]$ . Здесь схема армирования такова:  $n = 4$ ;  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi/2$ ,  $\varphi_3 = -\varphi_4 = \varphi$ ; относительные толщины монослоев  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  известны, причем  $\delta_3 = \delta_4 = \delta/2$ , где  $\delta$  — толщина двойного спирального слоя.

Из третьего равенства (1) получаем соотношения

$$\begin{aligned}\sigma_{12}^{(1)} &= \sigma_{12}^{(2)} = 0; \\ \sigma_{11}^{(3)} &= \sigma_{11}^{(4)} = \sigma_{11}; \\ \sigma_{22}^{(3)} &= \sigma_{22}^{(4)} = \sigma_{22}; \\ \sigma_{12}^{(3)} &= -\sigma_{12}^{(4)} = \sigma_{12}.\end{aligned}$$

Вектор переменных принимает вид

$$X = \left( X_{11}^{(1)}, X_{22}^{(1)}, X_{11}^{(2)}, X_{22}^{(2)}, X_{11}, X_{22}, X_{12} \right)^T.$$

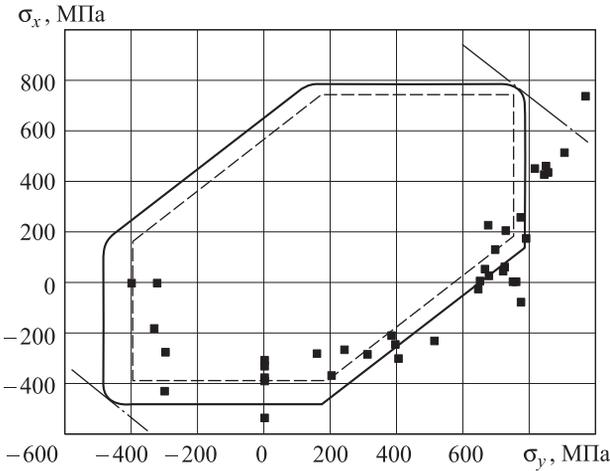
Тогда ограничения (6) можно записать так:

$$\begin{aligned}
 & X_{11}^{(1)}\delta_1 + X_{22}^{(2)}\delta_2 + (X_{11}\cos^2\varphi + X_{22}\sin^2\varphi + X_{12}\sin 2\varphi)\delta - C_{11} - S\cos\alpha = 0; \\
 & X_{22}^{(1)}\delta_1 + X_{11}^{(2)}\delta_2 + (X_{11}\sin^2\varphi + X_{22}\cos^2\varphi - X_{12}\sin 2\varphi)\delta - C_{22} - S\sin\alpha = 0; \\
 & 0 \leq X_{11} \leq F_{+1} + F_{-1}, 0 \leq X_{22} \leq F_{+2} + F_{-2}, 0 \leq X_{12} \leq 2F_{12}, S \geq 0; \\
 & 0 \leq X_{11}^{(k)} \leq F_{+1} + F_{-1}, 0 \leq X_{22}^{(k)} \leq F_{+2} + F_{-2}, k = 1, 2,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= F_{-1}\delta_1 + F_{-2}\delta_2 + (F_{-1}\cos^2\varphi + F_{-2}\sin^2\varphi + F_{12}\sin 2\varphi)\delta; \\
 C_{22} &= F_{-2}\delta_1 + F_{-1}\delta_2 + (F_{-1}\sin^2\varphi + F_{-2}\cos^2\varphi - F_{12}\sin 2\varphi)\delta.
 \end{aligned}$$

На рис. 5 изображена предельная кривая, полученная в результате численного решения задачи для квазиизотропного углепластика марки AS4/5301-6 со схемой армирования  $[90^\circ/\pm 45^\circ/0]$ , т. е. при  $\varphi = \pi/4$ ;  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0,25$ . При расчете были приняты такие прочностные характеристики монослоя:  $F_{+1} = 1\,500$  МПа;  $F_{-1} = 800$  МПа;  $F_{+2} = 40$  МПа;  $F_{-2} = 135$  МПа;  $F_{12} = 40$  МПа. По-прежнему точками обозначены экспериментальные данные из работы [10]. Как и следовало ожидать, предельная кривая в соответствии с неравенством (3) расположена между двумя параллельными прямыми  $\sigma_x = F_{+1} + F_{+2} - \sigma_y$  и  $\sigma_x = -F_{-1} - F_{-2} - \sigma_y$ , которые на рис. 5 показаны штрихпунктирными линиями.

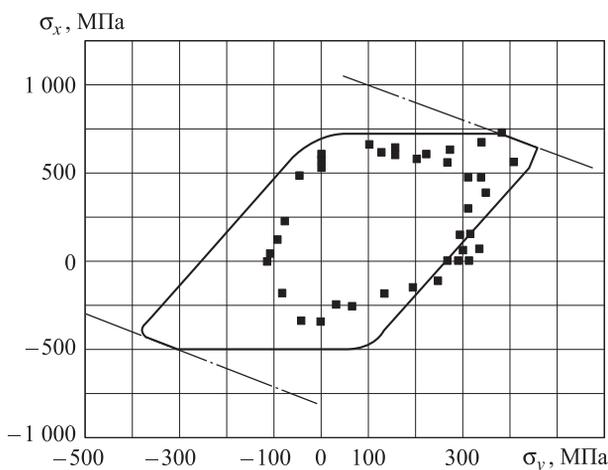


**Рис. 5.** Предельная кривая для квазиизотропного углепластика со схемой армирования  $[90^\circ/\pm 45^\circ/0]$  на плоскости напряжений  $\sigma_x, \sigma_y$ .

Проведем анализ прочностных характеристик многослойного КМ со схемой армирования  $[90^\circ/\pm\varphi]$ . В этом случае имеем  $n = 3$ ;  $\varphi_1 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 = -\varphi_3 = \varphi$ ; относительные толщины монослоев  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  известны, причем  $\delta_2 = \delta_3 = \delta/2$ . Аналогично предыдущему случаю здесь также можно получить частный случай ограничений (6). При этом вектор переменных будет иметь следующий вид:

$$X = (X_{11}^{(1)}, X_{22}^{(1)}, X_{11}, X_{22}, X_{12})^T.$$

Результаты расчета для стеклопластика марки E-Glass/LY556/HT907/DY063 со схемой армирования  $[90^\circ/\pm 30^\circ]$ , для которого  $\delta_1 = 0,172$ ;  $\delta = 0,828$ , приведены на рис. 6. Экспериментальные данные (точки) заимствованы из работы [10]. Характеристики прочности монослоя таковы:  $F_{+1} = 1\,150$  МПа;  $F_{-1} = 750$  МПа;  $F_{+2} = 40$  МПа;  $F_{-2} = 150$  МПа;  $F_{12} = 80$  МПа. Предельная кривая получена расчетным путем, прямые  $\sigma_x = F_{+1} + F_{+2} - \sigma_y$  и  $\sigma_x = -F_{-1} - F_{-2} - \sigma_y$  показаны штрихпунктиром.



**Рис. 6.** Предельная кривая для стеклопластика со схемой армирования  $[90^\circ/\pm 30^\circ]$

Следует отметить одно из достоинств предлагаемого подхода к определению нижней границы предельной нагрузки. В ряде случаев, согласно методу неравенств, из соотношений (1) и (2) следуют аналитические решения, которые могут быть востребованы при выполнении проектных расчетов. Однако при большом числе переменных решение задачи по методу неравенств приводит к чрезвычайно громоздким преобразованиям и его применение становится нерациональным. Существенные упрощения получают при использовании дополнительных гипотез относительно физико-механических свойств волокнистых КМ. В частности, относительно простое решение можно получить при введении в расчет нитяной модели монослоя, в соответствии с которой параметрами  $F_{+2}^{(i)}$ ,  $F_{-2}^{(i)}$ ,  $F_{12}^{(i)}$  можно пренебречь по сравнению с  $F_{+1}^{(i)}$ ,  $F_{-1}^{(i)}$  и принять, что  $\sigma_{22}^{(i)} \approx \sigma_{12}^{(i)} \approx 0$ .

В качестве примера воспользуемся нитяной моделью монослоя для рассмотренного выше КМ со схемой армирования  $[0/90^\circ/\pm\phi]$ . Тогда из соотношений (1) имеем

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{11}^{(1)}\delta_1 + \sigma_{11}\delta \cos^2 \varphi; \\ \sigma_y &= \sigma_{11}^{(2)}\delta_2 + \sigma_{11}\delta \sin^2 \varphi.\end{aligned}$$

Неравенства (2) упрощаются и примут вид

$$\begin{aligned}-F_{-1} &\leq \sigma_{11}^{(1)} \leq F_{+1}; \\ -F_{-1} &\leq \sigma_{11}^{(2)} \leq F_{+1}; \\ -F_{-1} &\leq \sigma_{11} \leq F_{+1}.\end{aligned}$$

Применяя в соответствии с методом неравенств процедуру исключения переменных  $\sigma_{11}^{(1)}$ ,  $\sigma_{11}^{(2)}$ ,  $\sigma_{11}$ , после преобразований получаем следующие условия:

$$\begin{aligned}-\delta_1 F_{-1} \sin^2 \varphi - \delta_2 F_{+1} \cos^2 \varphi &\leq \sigma_x \sin^2 \varphi - \sigma_y \cos^2 \varphi \leq \\ &\leq \delta_1 F_{+1} \sin^2 \varphi + \delta_2 F_{-1} \cos^2 \varphi; \\ -F_{-1}(\delta_1 + \delta \cos^2 \varphi) &\leq \sigma_x \leq F_{+1}(\delta_1 + \delta \cos^2 \varphi); \\ -F_{-1}(\delta_2 + \delta \sin^2 \varphi) &\leq \sigma_y \leq F_{+1}(\delta_2 + \delta \sin^2 \varphi).\end{aligned}\tag{9}$$

Граница области на плоскости  $\sigma_x O \sigma_y$ , определяемая этими неравенствами, есть искомая предельная кривая. Тогда для рассмотренного выше квазиизотропного КМ будем иметь

$$\begin{aligned}-\frac{F_{-1} + F_{+1}}{4} &\leq \sigma_x - \sigma_y \leq \frac{F_{-1} + F_{+1}}{4}; \\ -\frac{F_{-1}}{2} &\leq \sigma_x \leq \frac{F_{+1}}{2}; \\ -\frac{F_{-1}}{2} &\leq \sigma_y \leq \frac{F_{+1}}{2}.\end{aligned}\tag{10}$$

Предельная кривая, построенная в соответствии с неравенствами (10), показана на рис. 5 штриховой линией.

Рассмотрим еще вариант аналитического решения. Некоторые виды многослойных КМ с тканым наполнителем обладают сравнительно малой жесткостью и прочностью при сдвиге в плоскости армирования [11, 12]. Например, для углерод-углеродных КМ на основе углеродной ткани со структурой 2D предел прочности элементарного слоя при сдвиге в плоскости армировании может быть на порядок меньше пределов прочности при растяжении и сжатии вдоль основы и утка. Для таких материалов при теоретическом анализе по аналогии с нитяной моделью монослоя целесообразно пренебречь величиной  $F_{12}^{(i)}$  по сравнению с  $F_{+1}^{(i)}$ ,  $F_{-1}^{(i)}$ ,  $F_{+2}^{(i)}$ ,  $F_{-2}^{(i)}$  и допустить, что  $\sigma_{12}^{(i)} \approx 0$ .

В качестве примера получим зависимость предела прочности при одноосном нагружении КМ со схемой армирования  $[0/\pm\varphi]$  от угла  $\varphi$ . Выполним расчет для случая  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1/3$ . Из формул (1) при  $\sigma_{12} = 0$  имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} + 2(\sigma_{11} \cos^2 \varphi + \sigma_{22} \sin^2 \varphi) &= 3\sigma_x; \\ \sigma_{22}^{(1)} + 2(\sigma_{11} \sin^2 \varphi + \sigma_{22} \cos^2 \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

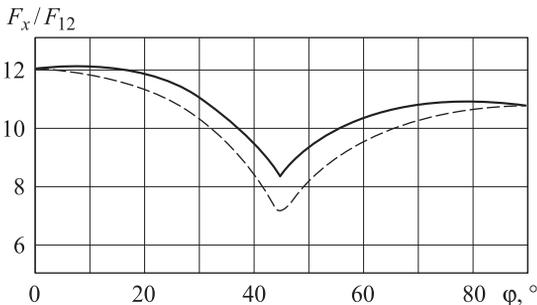
Из условий (2) следует

$$\begin{aligned} -F_{-1} &\leq \sigma_{11}^{(1)} \leq F_{+1}; \\ -F_{-2} &\leq \sigma_{22}^{(1)} \leq F_{+2}; \\ -F_{-1} &\leq \sigma_{11} \leq F_{+1}; \\ -F_{-2} &\leq \sigma_{22} \leq F_{+2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Исключая из соотношений (11) и (12) переменные  $\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{22}^{(1)}, \sigma_{11}, \sigma_{22}$ , после преобразований (в связи с громоздкостью не приводим) получаем следующие ограничения для напряжения  $\sigma_x$ :

$$\begin{aligned} -\frac{F_{-1}(3 - 2\operatorname{tg}^2 \varphi) + F_{+2}\operatorname{tg}^2 \varphi}{3} &\leq \sigma_x \leq \frac{F_{+1}(3 - 2\operatorname{tg}^2 \varphi) + F_{-2}\operatorname{tg}^2 \varphi}{3} \\ &\text{при } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}; \\ -\frac{2F_{-2}(1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi) + F_{+2}\operatorname{ctg}^2 \varphi + F_{-1}}{3} &\leq \sigma_x \leq \frac{2F_{+2}(1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi) + F_{-2}\operatorname{ctg}^2 \varphi + F_{+1}}{3} \\ &\text{при } \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

На рис. 7 приведены результаты расчета для КМ со следующими характеристиками:  $F_{+1} / F_{12} = 12$ ,  $F_{-1} / F_{12} = 11$ ,  $F_{+2} / F_{12} = 10$ ,  $F_{-2} / F_{12} = 9$ . Сплошной линией показана кривая, полученная числен-



**Рис. 7.** Зависимость предела прочности при одноосном растяжении для многослойного КМ со схемой армирования  $[0/\pm\varphi]$  от угла  $\varphi$

но с учетом предела прочности  $F_{12}$ , штриховой линией — приближенная кривая, рассчитанная по формулам (13). Видно, что последняя кривая качественно и количественно верно прогнозирует изменение предела прочности в зависимости от угла армирования  $\varphi$ . При этом приближенное значение меньше, чем точное, полученное с учетом предела прочности  $F_{12}$  при сдвиге.

Отметим, что при выполнении проектных расчетов, количество исходных данных, как правило, ограничено. В этом случае приближенные соотношения вида (9), (13) могут быть полезными на этапе предварительного анализа прочностных характеристик многослойного КМ.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1984, 263 с.
- [2] Zinoviev P.A., Grigoriev S.V., Lebedeva O.V., Tairova L.P. The Strength of Multilayered Composites under a plane-stress State. *Composite Science and Technology*, 1998, vol. 58, pp. 1209–1223.
- [3] Ходж Ф.Г. *Расчет конструкций с учетом пластических деформаций*. Москва, Машгиз, 1963, 380 с.
- [4] Терегулов И.Г., Каюмов Р.А., Сибгатуллин Э.С. *Расчет конструкций по теории предельного равновесия*. Казань, Изд-во ФЭН, 2003, 180 с.
- [5] Сарбаев Б.С. Анализ несущей способности слоистых волокнистых композиционных материалов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2000, № 4, с. 59–72.
- [6] Сарбаев Б.С. Анализ несущей способности слоистых композитов и конструкций из них методом предельного равновесия. Образцов И.Ф., Яновский Ю.Г., ред. *Композиционные материалы. Сб. тр. Школы-семинара, посвященной 80-летию со дня рождения академика И.Ф. Образцова*. Москва, ИПРИМ РАН, 2000, с. 3–11.
- [7] Гасс С. *Линейное программирование (методы и приложения)*. Москва, Физматгиз, 1961, 303 с.
- [8] Чирас А.А. *Методы линейного программирования при расчете упругопластических систем*. Ленинград, Стройиздат, 1969, 197 с.
- [9] Смердов А.А., Смердова О.А., Таирова Л.П., Цветков С.В., Ташилов С.В., Магнитский И.В. Экспериментальное исследование жесткостных и прочностных характеристик углепластика. *Конструкции из композиционных материалов*, 2009, № 3, с. 68–82.
- [10] Soden P.D., Hinton M.J., Kaddour A.S. Biaxial Test Results for Strength and Deformation of Range of E-glass and Carbon Fiber Reinforced Composite Laminates: Failure Exercise Benchmark Data. *Composite Science and Technology*, 2002, vol. 62, pp. 1489–1514.
- [11] Белов Г.В., Ерохин Б.Т., Киреев В.П. *Композиционные материалы в двигателях летательных аппаратов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998, 344 с.
- [12] Соколкин Ю.В., Вотинов А.М., Ташкинов А.А., Постных А.М., Чекалкин А.А. *Технология и проектирование углерод-углеродных композитов и конструкций*. Москва, Наука, Физматлит, 1996, 240 с.

Статья поступила в редакцию 06.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сарбаев Б.С. Расчет нижней границы предельной нагрузки для многослойных волокнистых композитов при двухосном нагружении. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/856.html>

**Сарбаев Борис Сафиулович** окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1977 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных работ в области механики композитов, теории пластичности, нелинейного деформирования композитных материалов и конструкций, выполненных из них. e-mail: [bssarbayev@mail.ru](mailto:bssarbayev@mail.ru)