

## Применение теории собственных напряжений к описанию нелинейного деформирования металлов и сплавов

© Б.М. Пахомов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Представлена деформационная модель нелинейного поведения изотропного материала, построенная на основе теории собственных напряжений. Предложенная модель приводит к нарушению гипотезы об упругом изменении объема: остаточное изменение объема зависит от степени пластического деформирования и пропорционально первому инварианту тензора напряжений. Проведено сравнение расчетных и экспериментальных данных для случаев одноосного растяжения-сжатия, всестороннего сжатия, двухосного напряженного состояния. Рассмотрен случай разгрузки материала после предварительного пластического нагружения. Выведены выражения для остаточных внутренних напряжений. Получено условие текучести для повторного нагружения; поверхность текучести при этом расширяется и одновременно перемещается в пространстве главных напряжений вдоль прямой, равнонаклоненной к осям. Показано, что предложенная модель внутренне непротиворечива и описывает как основные эффекты, возникающие при нагружении материала за пределами упругости, так и некоторые специфические свойства материалов, например анизотропное упрочнение.*

**Ключевые слова:** деформационная модель, остаточное изменение объема, анизотропное упрочнение.

Рассмотрим нелинейное деформирование изотропного материала. Для этого определяющие соотношения, связывающие компоненты тензоров напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ), запишем в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = K \varepsilon_{ij} + L \varepsilon \delta_{ij}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_{ii}$ ;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Будем считать, что параметр  $L$  остается постоянным в процессе нагружения, т. е. не зависит от напряжения и деформации. Рассмотрев это предположение для случая линейно-упругого поведения материала, можно установить, что параметр  $L$  однозначно определяется через модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  по формуле

$$L = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (2)$$

Параметр  $K$  будем считать зависимым от вида напряженно-деформированного состояния. Пусть также для случая линейно-

упругого тела этот параметр остается постоянным и равным параметру  $K_0$ , который определяется соотношением

$$K_0 = \frac{E}{1 + \nu} . \quad (3)$$

Таким образом, мы предположили, что связи между различными направлениями деформирования упругие, а все нелинейные эффекты заключены в механизме, который определяет деформирование материала, лишенного этих связей, или тех случаев, когда эти связи не работают (при  $\varepsilon = 0$ ). Под направлениями деформирования условимся понимать растяжение-сжатие по осям  $Ox, Oy, Oz$  и сдвиги в плоскостях  $xOy, yOz, zOx$ . Таким образом, обобщенная жесткость материала оказывается разделенной на собственную жесткость материала, определяемую переменным параметром  $K$ , и жесткость связи, характеризуемую параметром  $L$ . Назовем  $K$  собственным модулем, а  $L$  — модулем связи и будем считать эти параметры основными характеристиками материала.

Введем обозначения

$$p_{ij} = K \varepsilon_{ij}; \quad Q = L \varepsilon. \quad (4)$$

Назовем  $p_{ij}$  собственными напряжениями, а  $Q$  — напряжением связи. Тогда формулу (1) можно записать в виде

$$\sigma_{ij} = p_{ij} + Q \delta_{ij}. \quad (5)$$

Также введем понятия интенсивности собственных напряжений

$$p_i = \sqrt{\frac{1}{2} p_{ij} p_{ij}} \quad (6)$$

и интенсивности деформаций

$$\bar{\varepsilon}_i = \sqrt{\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}. \quad (7)$$

Из выражений (4), (6) и (7) очевидно равенство

$$p_i = K \bar{\varepsilon}_i. \quad (8)$$

Удельную потенциальную энергию  $U = (1/2)\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$  представим в виде суммы

$$U = U_p + U_Q,$$

где

$$U_p = \frac{1}{2} p_{ij} \varepsilon_{ij}; \quad U_Q = \frac{1}{2} Q \varepsilon. \quad (9)$$

Будем называть  $U_Q$  энергией связи, а  $U_p$  — собственной энергией. Тогда из выражений (4), (6), (7) и (9) следует

$$U_p = p_i \bar{\varepsilon}_i = \frac{p_i^2}{K},$$

а в упругой области

$$U_p = \frac{p_i^2}{K_0}. \quad (10)$$

Аддитивность такого разделения удельной потенциальной энергии легко доказать, рассмотрев последовательное приложение двух систем напряжений, одна из которых соответствует всестороннему растяжению или сжатию, а другая — равенству нулю первого инварианта тензора напряжений. В этом случае работа напряжений первой системы на деформациях второй будет равна нулю, что и является доказательством.

Далее примем следующие допущения.

1. Будем считать, что пластическое течение начинается в тот момент, когда собственная энергия  $U_p$  достигает критического значения или, согласно (10), когда критического значения достигает интенсивность собственных напряжений  $p_i$ . В упругой области  $p_i$  равно касательному напряжению при чистом сдвиге, поэтому в качестве критического значения для  $p_i$  примем предел текучести при сдвиге  $\tau_T$ . Используя запись уравнений (1) в упругой области и выражения (4), (6), можно получить условие начала пластического течения в виде

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{2} (1 + \nu)} \times \\ \times \left[ (1 + 2\nu^2) (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - 2\nu(2 - \nu) (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + \right. \\ \left. + 2(1 + \nu)^2 (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \right]^{1/2} = \tau_T. \quad (11)$$

2. При  $p_i > \tau_T$ , когда интенсивность собственных напряжений  $p_i$  возрастает, значение собственного модуля  $K$  монотонно убывает и является функцией только  $p_i$ .

3. Значение модуля связи  $L$  остается постоянным для всех видов напряженно-деформированного состояния и не зависит от значений, которые принимают параметры состояния среды в процессе деформирования.

4. Разгрузка происходит упруго с начальным модулем  $K_0$ .

Соотношения (1) легко преобразовать к обратному виду. Тогда с учетом принятых допущений полные  $\varepsilon_{ij}$ , упругие  $\varepsilon_{ij}^e$  и пластические  $\varepsilon_{ij}^p$  деформации будут выражаться соотношениями

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{K} \sigma_{ij} - \frac{L}{K(K+3L)} \sigma \delta_{ij}; \\ \varepsilon_{ij}^e &= \frac{1}{K_0} \sigma_{ij} - \frac{L}{K_0(K_0+3L)} \sigma \delta_{ij}; \\ \varepsilon_{ij}^p &= \left( \frac{1}{K} - \frac{1}{K_0} \right) \sigma_{ij} - L \left[ \frac{1}{K(K+3L)} - \frac{1}{K_0(K_0+3L)} \right] \sigma \delta_{ij},\end{aligned}\tag{12}$$

где  $\sigma$  — первый инвариант тензора напряжений.

Таким образом, сформулирован закон пластического деформирования, в котором определена связь между конечными значениями напряжений и деформаций. Обычно теории, устанавливающие такую связь, называются деформированными. Поэтому будем называть теорию, соответствующую уравнениям (1)–(12), деформационной теорией в собственных напряжениях.

Для проверки этой теории рассмотрим, как выполняется равенство параметров Надаи — Лоде [1] по напряжениям и деформациям, а также вопрос о существовании единой диаграммы деформирования. Параметры Надаи — Лоде по напряжениям  $\chi_\sigma$  и деформациям  $\chi_\varepsilon$  в главных напряжениях и деформациях определяются формулами

$$\begin{aligned}\chi_\sigma &= \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{33} - \sigma_{11}}{\sigma_{11} - \sigma_{33}}; \\ \chi_\varepsilon &= \frac{2\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33}}.\end{aligned}\tag{13}$$

Используя соотношения (12), легко показать, что равенство этих параметров выполняется тождественно для всех видов напряженно-деформированного состояния. Здесь стоит отметить, что эксперименты не всегда подтверждают справедливость соосности тензоров напряжений и деформаций [2].

Ранее мы сделали предположение о том, что значение собственного модуля  $K$  является функцией только интенсивности собственных напряжений  $p_i$ . Это означает, что существует единая для всех видов напряженного состояния зависимость интенсивности собственных напряжений  $p_i$  от интенсивности деформаций  $\bar{\varepsilon}_i$ . Согласно формулам (4), (6) и (7), имеем

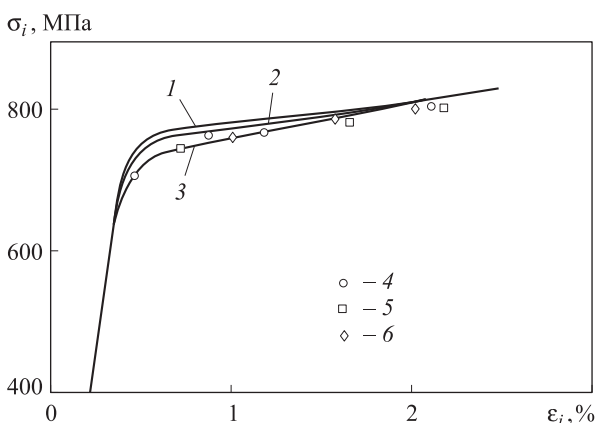
$$p_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_i^{\tau};$$

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_i^{\tau},$$
(14)

где  $\sigma_i^{\tau}, \varepsilon_i^{\tau}$  — интенсивности напряжений и деформаций, соответствующие чистому сдвигу.

Отсюда следует, что кривая  $p_i(\bar{\varepsilon}_i)$  с точностью до масштабных коэффициентов  $1/\sqrt{3}$  по оси ординат и  $\sqrt{3}/2$  по оси абсцисс должна совпадать с кривой  $\sigma_i^{\tau}(\varepsilon_i^{\tau})$ . Считая кривую  $\sigma_i^{\tau}(\varepsilon_i^{\tau})$  опорной, можно построить зависимости  $\sigma_i(\varepsilon_i)$  для некоторых видов напряженного состояния.

На рис. 1 в координатах  $\sigma_i — \varepsilon_i$  изображены результаты испытаний трубчатых образцов, выполненных из стали ЭИ415 [3], при различных отношениях осевого напряжения  $\sigma_z$  к окружному  $\sigma_t$ . По опорной кривой, соответствующей одноосному растяжению (см. рис. 1, кривая 2) были построены две кривые, соответствующие чистому сдвигу (кривая 1) и  $\sigma_z/\sigma_t = 1$  (кривая 3). Расположение экспериментальных точек отвечает следствию, вытекающему из предлагаемой нами схемы деформирования, — кривые  $\sigma_i(\varepsilon_i)$  для  $\sigma_z/\sigma_t \approx 1$  располагаются ниже, а для  $\sigma_z/\sigma_t \leq 0$  выше, чем кривая 2. Обработка результатов аналогичных экспериментов на металлах при двухосном напряженном состоянии [4] показала, что гипотеза о существовании единой кривой  $p_i(\bar{\varepsilon}_i)$  выполняется лучше, чем  $\sigma_i(\varepsilon_i)$ .



**Рис. 1.** Пластическое деформирование трубчатых образцов из стали ЭИ415:

1 — чистый сдвиг; 2 — одноосное растяжение; 3 —  $\sigma_z/\sigma_t = 1$ ;  
 4–6 —  $\sigma_z/\sigma_t = 0,5; 0,25; 0,75$  соответственно

Из соотношений (12) следует, что в процессе пластического деформирования сумма нормальных пластических деформаций  $\Delta \varepsilon^p = \varepsilon_{ii}^p$ , равная пластическому изменению объема, в общем случае не равна нулю, зависит от текущего значения собственного модуля  $K$  и пропорциональна первому инварианту тензора напряжений  $\sigma$ :

$$\Delta \varepsilon^p = \frac{1}{K^p} \sigma, \quad (15)$$

где

$$K^p = \frac{(K + 3L)(K_0 + 3L)}{K_0 - K}. \quad (16)$$

Согласно (16), величина  $K^p$  меняется от бесконечности при  $K = K_0$  до некоторого минимального значения  $K_{\min}^p$  при  $K \rightarrow 0$ , определяемого выражением

$$K_{\min}^p = \frac{3L(K_0 + 3L)}{K_0},$$

или с учетом формул (2) и (3)

$$K_{\min}^p = \frac{3\nu E}{(1 - 2\nu)^2}. \quad (17)$$

В табл. 1 представлены рассчитанные с помощью выражения (15) значения параметра  $\lambda$ , равного отношению пластического изменения объема к пластической деформации  $\varepsilon^p$  при одноосном растяжении. Значения  $\lambda$  определялись для некоторых значений параметра  $\psi = K_0 / K$ , характеризующего степень пластического деформирования, и некоторых значений коэффициента Пуассона. Из результатов, приведенных в таблице, следует, что для материалов с коэффициентом Пуассона меньше 0,15...0,2 пластическое изменение объема составляет значительную часть от остаточной деформации  $\varepsilon^p$ . При  $\nu = 0,3...0,35$  и  $\psi \leq 4...5$  параметр  $\lambda$  принимает значения, сравнимые с погрешностью измерения деформаций, а при  $\psi \rightarrow \infty$   $\lambda$  становится бесконечно малой величиной.

Таблица 1

**Значения параметра  $\lambda$**

$\nu$	$\lambda$ , %, при $\psi$ , равном				
	1,5	2	5	10	100
0,1	62,8	51,6	33,7	21,3	2,9
0,2	33,3	23,1	12,0	6,7	0,075
0,3	13,6	8,2	3,7	2,0	0,021
0,4	3,0	1,6	0,7	0,35	0,003

Для большинства металлов значение  $\Delta\varepsilon^p$ , определенное по формуле (15), составляет около 0,1 %, что согласуется с экспериментальными данными о пластическом разрыхлении металлов [5]. В работе [6] измерялось остаточное изменение объема для сталей 40 и 45 при одноосном растяжении в области пластичности до деформации 10 %. Относительное уменьшение плотности составило около 0,01 %. Аналогичные результаты получены в работе [7] для стали 45. При растяжении на 1; 3 и 5 % объем увеличился на 0,011, 0,024 и 0,04 % соответственно, а при сжатии на 5 % — уменьшился на 0,025 %.

В табл. 2 представлены результаты измерений остаточного изменения объема, полученные при испытаниях на простое сжатие различных материалов [8], а в табл. 3 и 4 — данные расчетов пластического изменения объема при одноосном растяжении, полученные с использованием предложенного подхода. За исходные брали кривые деформирования при одноосном растяжении и чистом сдвиге для сталей 30 (рис. 2) и ЭИ415 (см. рис. 1) соответственно.

Таблица 2

**Результаты измерений, полученные при испытании на простое сжатие**

Материал	$\varepsilon_{11}$ , %	$\Delta\varepsilon^p$ , %
Мягкая сталь	14	0
Сталь для болтов	15	-0,014
Сталь 1035	15	0,01
Норвежское железо	17	-0,25
Высокоуглеродистая сталь	14	0,015
Чугун	1,5	-0,19
Коррозионно-стойкая сталь	13,5	0,012
Медь	10...16	0,021...0,049
Латунь	11	0,02
Дуралюмин	9,7	-0,046

Таблица 3

**Результаты расчета пластического изменения объема для стали 30**

$\sigma \cdot 10^{-2}$ , МПа	$\varepsilon$ , %	$K \cdot 10^{-4}$ , МПа	$\nu$	$\Delta\varepsilon$ , %	$\Delta\varepsilon^e$ , %	$\Delta\varepsilon^p$ , %
3,25	0,19	13,08	0,3	0,076	0,076	0
3,31	0,34	7,13	0,37	0,09	0,079	0,011
3,41	0,62	3,88	0,42	0,102	0,08	0,0224
3,63	0,84	3,01	0,43	0,112	0,085	0,026
3,8	1	2,64	0,44	0,119	0,089	0,029
3,9	1,09	2,48	0,444	0,122	0,092	0,031
4,2	1,41	2,05	0,453	0,134	0,099	0,035
5	500	0,007	0,4998	0,17	0,12	0,0522

Результаты расчета пластического изменения объема для стали ЭИ415

$\sigma_i \cdot 10^{-2}$ , МПа	$\varepsilon_i$ , %	$p_i \cdot 10^{-2}$ , МПа	$\bar{\varepsilon}_i$ , %	$K \cdot 10^{-4}$ , МПа	$\nu$	$\Delta\varepsilon$ , %	$\Delta\varepsilon^e$ , %	$\Delta\varepsilon^p$ , %
7,38	0,5	4,26	0,433	9,84	0,324	0,20	0,19	0,0118
7,75	1	4,48	0,866	5,17	0,389	0,24	0,197	0,043
8,1	2	4,68	1,732	2,7	0,435	0,272	0,206	0,066
8,1	3	4,68	2,6	1,8	0,45	0,28	0,21	0,073
8,1	500	4,68	433	0,011	0,4997	0,298	0,207	0,0917

Следует отметить, что в работах [9–11], посвященных влиянию гидростатического напряжения на пластическое деформирование материалов, содержатся подобные приведенным выше экспериментальные результаты.

Также были проведены расчеты для всестороннего сжатия. При этом использовали диаграммы деформирования, приведенные на рис. 1 и 2. На рис. 3 для некоторых материалов показано изменение объема в зависимости от гидростатического давления. Анализируя экспериментальные данные, полученные при всестороннем сжатии металлов, для которых заметного остаточного изменения объема не наблюдается [10], можно отметить, что при напряжениях, значительно превышающих предел текучести, модуль объемного сжатия увеличивается, а при раз-

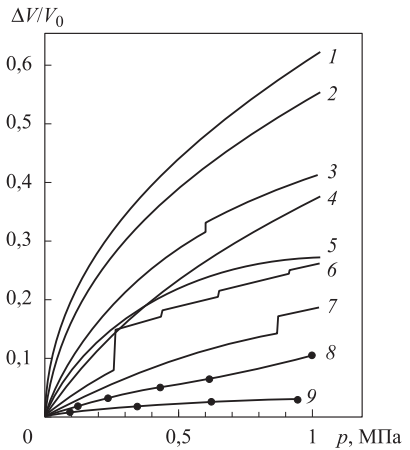
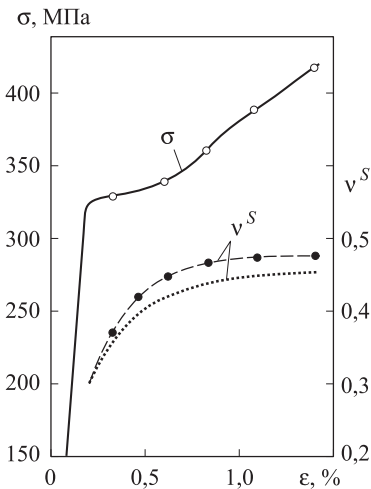


Рис. 2. Кривая деформирования и коэффициент поперечной деформации при одноосном растяжении стали 30 [4]

Рис. 3. Связь между объемной деформацией и гидростатическим давлением:

1–7 — экспериментальные кривые соответственно для Rb, K, Ba, Li, Fe, Bi, Sb [11]; 8, 9 — расчетные кривые для сталей ЭИ415 и 30 соответственно



грузке материал ведет себя как нелинейно-упругая среда. Поэтому чтобы описать эти эффекты, нужно изменить основные положения предлагаемой модели. В данной работе этот вопрос не рассматривается.

При переходе материала в пластическую область обычно вместо коэффициента Пуассона используют коэффициент поперечной деформации  $\nu^s$  [12], определяемый как отношение полных поперечных деформаций к продольной.

Согласно уравнениям (11), коэффициент поперечной деформации

$$\nu^s = \frac{L}{K + 2L}. \quad (18)$$

На рис. 2 сопоставлены рассчитанные по формуле (18) (пунктирная кривая) и экспериментальные (штриховая кривая) [13] данные о коэффициенте поперечной деформации, полученные для пластического деформирования стали 30.

При разгрузке полные деформации будут складываться из упругих  $\varepsilon_{ij}^e$ , зависящих от текущих напряжений, и пластических  $\varepsilon_{ij}^p$ , достигнутых к началу разгрузки деформаций, которые в области упругости остаются постоянными, т. е.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (19)$$

Используя формулы (4), (12) и (15), можно получить, что напряжение связи  $Q$  в процессе разгрузки

$$Q = \frac{L}{K_0 + 3L} \sigma + L \Delta \varepsilon^p = \frac{\nu}{1 + \nu} \sigma + \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \Delta \varepsilon^p, \quad (20)$$

а после снятия нагрузки

$$Q = L \Delta \varepsilon^p = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \Delta \varepsilon^p. \quad (21)$$

Собственные напряжения будут определяться соотношениями

$$p_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{L}{K_0 + 3L} \sigma \delta_{ij} - L \Delta \varepsilon^p \delta_{ij} \quad (22)$$

или, выражая через модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ ,

$$p_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1 + \nu} \sigma \delta_{ij} - \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \Delta \varepsilon^p \delta_{ij}.$$

Подставляя выражения (22) в условие начала текучести (11), получаем

$$\begin{aligned} & (K_0^2 + 4K_0L + 6L^2) (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - \\ & - 2L(2K_0 + 3L) (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + \\ & + 2(K_0 + 3L)^2 (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) - 2K_0 (K_0 + 3L) L \sigma \Delta \varepsilon^p + \\ & + 3L^2 (K_0 + 3L)^2 (\Delta \varepsilon^p)^2 = 2(K_0 + 3L)^2 \tau_{TK}^2, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & (1+2\nu^2)(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - 2\nu(2-\nu)(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + \\ & + 2(1+\nu)^2(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) - 2\nu E\sigma\Delta\varepsilon^p + \\ & + \frac{3E^2\nu^2}{(1-2\nu)^2}(\Delta\varepsilon^p)^2 = 2(1+\nu)^2\tau_{TK}^2, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\tau_{TK}$  — напряжение  $p_i$  в начале разгрузки, равное пределу текучести при сдвиге.

Запишем соотношение (23) в главных напряжениях  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ :

$$\begin{aligned} & (1+2\nu^2)(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - 2\nu(2-\nu)(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) - \\ & - 2\nu E\sigma\Delta\varepsilon^p + \frac{3E^2\nu^2}{(1-2\nu)^2}(\Delta\varepsilon^p)^2 = 2(1+\nu)^2\tau_{TK}^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнение (24) определяет в пространстве главных напряжений удлинённый эллипсоид вращения, у которого полудлины главных диаметров  $d_1, d_2$  и  $d_3$  можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} d_1 &= d_2 = \sqrt{2}\tau_{TK}; \\ d_3 &= \frac{\sqrt{2}(1+\nu)}{(1-2\nu)}\tau_{TK}. \end{aligned}$$

Наибольший из главных диаметров  $d_3$  равнонаклонен к осям  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ , а координаты центра эллипсоида  $\sigma_{1c}, \sigma_{2c}, \sigma_{3c}$  определяются через остаточное пластическое изменение объема  $\Delta\varepsilon^p$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{1c} &= \sigma_{2c} = \sigma_{3c} = \sigma_c = \frac{L(K_0 + 3L)}{K_0}\Delta\varepsilon^p, \\ \sigma_c &= \frac{E\nu}{(1-2\nu)^2}\Delta\varepsilon^p. \end{aligned} \quad (25)$$

Из уравнения (24) следует, что поверхность пластичности изотропно расширяется (степень расширения определяется увеличением предела текучести при сдвиге) и перемещается вдоль наибольшего диаметра. Максимальное перемещение (при  $K \rightarrow 0$ )

$$\sigma_{c\max} = \frac{1}{3}\sigma_K,$$

где  $\sigma_K$  — значение первого инварианта тензора напряжений, достигнутое к моменту начала разгрузки.

Таким образом, можно сделать вывод, что материал, если его поведение в неупругой области подчиняется уравнениям (12), приобретает анизотропию свойств для всех видов напряженного состояния, где не равен нулю первый инвариант тензора напряжений. Это означает, что даже если при чистом сдвиге эффект Баушингера отсутствует, то, например, при одноосном растяжении-сжатии анизотропное упрочнение будет иметь место.

Исследуем несколько подробнее эффект Баушингера для случая одноосного растяжения. Пусть  $\sigma_{xx} = \sigma_0$ , а все остальные напряжения равны нулю. Примем, что при пластическом деформировании образца было достигнуто растягивающее напряжение  $\sigma_0^+$ , а секущий модуль в соответствующей точке на диаграмме  $p_i - \bar{\epsilon}_i$  при этом был равен  $K$ . Если после этого начать нагружать образец в противоположном направлении, то пластические деформации возникнут в материале при  $\sigma_{xx} = \sigma_0^-$ , где  $\sigma_0^-$  будет определяться формулой

$$\sigma_0^- = - \frac{(K_0^2 + 6K_0L + 6L^2)K + L(K_0^2 + 12K_0L + 18L^2)}{(K + 3L)(K_0^2 + 4K_0L + 6L^2)} \sigma_0^+.$$

Ширина площадки текучести  $2\sigma_\tau$ , определяемая как разность  $\sigma_0^+ - \sigma_0^-$ :

$$2\sigma_\tau = \frac{2(K_0 + 3L)[(K_0 + 2L)K + 2L(K_0 + 3L)]}{(K + 3L)(K_0^2 + 4K_0L + 6L^2)} \sigma_0^+,$$

а смещение этой площадки  $\sigma_{0c}$  относительно начального положения:

$$\sigma_{0c} = \frac{1}{2} (\sigma_0^+ + \sigma_0^-) = \frac{KL(K_0 - K)}{(K + L)(K_0^2 + 4K_0L + 6L^2)} \sigma_0^+.$$

Запишем полученные выражения для  $\sigma_0^-$ ,  $2\sigma_\tau$  и  $\sigma_{0c}$  через коэффициент  $\nu$ , напряжение  $\sigma_0^+$  и параметр  $\psi = K/K_0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_0^- &= - \frac{(1 - 2\nu)(1 + 2\nu - 2\nu^2)\psi + \nu(1 + 8\nu - 2\nu^2)}{(1 + 2\nu^2)[(1 - 2\nu)\psi + 3\nu]} \sigma_0^+; \\ 2\sigma_\tau &= \frac{2(1 + \nu)[(1 - 2\nu)\psi + 2\nu(1 + \nu)]}{(1 + 2\nu^2)[(1 - 2\nu)\psi + 3\nu]} \sigma_0^+; \\ \sigma_{0c} &= \frac{\nu(1 - 2\nu)^2(1 - \psi)}{(1 + 2\nu^2)[(1 - 2\nu)\psi + 3\nu]} \sigma_0^+. \end{aligned} \quad (26)$$

При  $K = K_0$  параметр  $\psi = 1$ , и из (26) следуют очевидные равенства:  $\sigma_0^- = -\sigma_0^+$ ;  $2\sigma_\tau = 2\sigma_0^+$ ;  $\sigma_0^c = 0$ . Если же  $\psi \rightarrow 0$ , то величины  $\sigma_0^-$ ,  $2\sigma_\tau$  и  $\sigma_{0c}$  будут стремиться к экстремальным значениям:

$$\begin{aligned}\sigma_{0\text{экс}}^- &= -\frac{1+8\nu-2\nu^2}{3(1+2\nu^2)}\sigma_0^+; \\ 2\sigma_\tau^{\text{экс}} &= \frac{4(1+\nu)^2}{3(1+2\nu^2)}\sigma_0^+; \\ 2\sigma_{0c}^{\text{экс}} &= \frac{(1-2\nu)^2}{3(1+2\nu^2)}\sigma_0^+.\end{aligned}$$

Чем ближе значение коэффициента Пуассона к 0,5, тем меньше эффект анизотропного упрочнения, так как при этом  $\sigma_{0\text{экс}}^- \rightarrow -\sigma_0^+$ ;  $2\sigma_\tau^{\text{экс}} \rightarrow 2\sigma_0^+$ , а  $\sigma_{0c}^{\text{экс}} \rightarrow 0$ . Сравнение полученных результатов с экспериментами на повторное нагружение металлов [14] показало, что, для того чтобы количественно описать анизотропное упрочнение, не достаточно только полученных соотношений. Однако следует учитывать вклад, который вносит в перемещение площадки текучести остаточное изменение объема.

При полной разгрузке, т. е. когда  $\sigma_{ij} = 0$ , собственные напряжения  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$  и напряжение связи  $Q$  не будут равны нулю. Это объясняется тем, что при полной разгрузке будет иметь место остаточное изменение объема, определяемое формулой (15). Запишем соотношение для остаточных напряжений

$$p_{xx}^{\text{ост}} = p_{yy}^{\text{ост}} = p_{zz}^{\text{ост}} = -Q^{\text{ост}} = -L\Delta\varepsilon^p$$

или с учетом (13) и (14)

$$p_{xx}^{\text{ост}} = p_{yy}^{\text{ост}} = p_{zz}^{\text{ост}} = -Q^{\text{ост}} = -\frac{L(K_0 - K)}{(K + 3L)(K_0 + 3L)}\sigma_k. \quad (27)$$

Выражая остаточные напряжения через коэффициент Пуассона и параметр  $\psi = K/K_0$ , получаем

$$p_{xx}^{\text{ост}} = p_{yy}^{\text{ост}} = p_{zz}^{\text{ост}} = -Q^{\text{ост}} = -\frac{\nu(1-2\nu)(1-\psi)}{(1+\nu)[(1-2\nu)\psi + 3\nu]}\sigma_k. \quad (28)$$

По мере развития пластических деформаций  $K \rightarrow 0$ . Поэтому максимально возможное  $Q_{\text{max}}^{\text{ост}}$  будет

$$Q_{\max}^{\text{ост}} = \frac{K_0}{3(K_0 + 3L)} \sigma_k = \frac{1 - 2\nu}{3(1 + \nu)} \sigma_k.$$

Существование остаточных внутренних напряжений в материале после разгрузки подтверждено многочисленными исследованиями [15]. Остаточные напряжения, определяемые формулами (27) и (28), качественно соответствуют этому факту. На рис. 4 показаны рассчитанные по формулам (26) и (28) зависимости величин  $\sigma_0^-$  и  $\sigma_0^+$  перемещения центра площадки текучести  $\sigma_{0c}$ , а также остаточного напряжения  $Q^{\text{ост}}$  от степени деформации для одноосного растяжения стали 30 [3].

Таким образом, предложенная схема разделения обобщенной жесткости материала может быть применена для материалов, у которых ярко проявляется неупругая сжимаемость и зависимость пластических свойств от гидростатического напряжения, т. е. имеющих микронеоднородную структуру, поры, трещины.

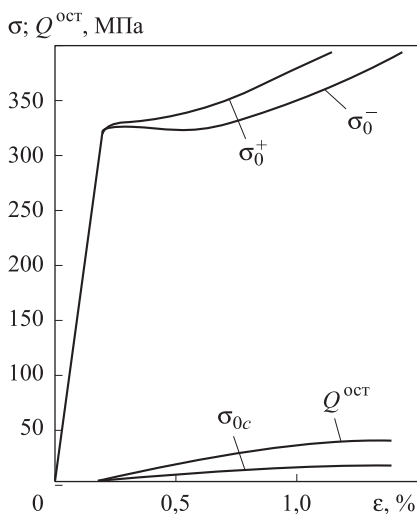


Рис. 4. Кривые  $\sigma_0^+$ ,  $\sigma_0^-$ ,  $\sigma_{0c}$  и  $Q^{\text{ост}}$  для стали 30

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Малинин Н.Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. Москва, Машиностроение, 1975, 400 с.
- [2] Комков К.Ф. Неподобие параметров Лодэ при обработке испытаний. *Изв. РАН, МТТ*, 2005, № 2, с. 126–135.
- [3] Жуков А.М. Сложное нагружение и теория пластичности изотропных металлов. *Изв. АН СССР. Отд. техн. наук*, 1955, № 8, с. 81–92.
- [4] Писаренко Г.С., Лебедев А.А. *Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии*, Киев: Наукова думка, 1976, 415 с.
- [5] Рыбакина О.Г. Феноменологическая теория малоциклового усталости. *Актуальные проблемы нелинейной механики сплошных сред*. Ленинград, 1977, вып. 1. с. 104–131.
- [6] Давиденков Н.Н., Васильев Д.М. О коэффициенте поперечной деформации. *Заводская лаборатория*. Москва, 1952, № 5, с. 596–599.
- [7] Тюнеева И.М. Об изменении объема при пластическом деформировании. *НДВШ, Физ.-мат. науки*, 1959, № 3, с. 111–115.
- [8] Бриджмен П.В. *Исследования больших пластических деформаций и разрыва*. Москва, Иностран. лит., 1955, 444 с.
- [9] Огибалов П.М., Кийко И.А. *Очерки по механике высоких параметров*. Москва, Изд-во МГУ, 1966, 272 с.

- [10] Бриджмен П.В. *Новейшие работы в области высоких давлений*. Москва, Иностр. лит., 1948, 299 с.
- [11] Толоконников О.Л. Условие пластичности с учетом гидростатического напряжения. *МДТТ*, 1983, с. 130–135.
- [12] Пэжина П. *Основные вопросы вязкопластичности*. Москва, Мир, 1968, 176 с.
- [13] Жуков А.М. О коэффициенте Пуассона в пластической области. *Изв. АН СССР. Отд. техн. наук*, 1954, № 12, с. 86–91.
- [14] Гультяев В.И. *Закономерности пластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении*. Автореф. дис.. д-ра техн. наук. Тверь, Изд-во ТГТУ, 2012, 43 с.
- [15] Губкин С.И. *Пластическая деформация металлов*. Т. 1: *Физико-механические основы пластической деформации*. Москва, Металлургиздат, 1960, 376 с.

Статья поступила в редакцию 06.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Пахомов Б.М. Применение теории собственных напряжений к описанию нелинейного деформирования металлов и сплавов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/854.html>

**Пахомов Борис Максимович** окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1976 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 10 научных работ в области механики нелинейного деформирования материалов. e-mail: [pahomovb@sm.bmstu.ru](mailto:pahomovb@sm.bmstu.ru)