УДК 539.3

Общее представление для волны Блюштейна – Гуляева

© Д.А. Приказчиков[1], Б. Эрбаш[2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2]Анатолийский университет Эскишехир, Турция

Рассмотрена задача о распространении волны Блюштейна – Гуляева вдоль границы пьезоэлектрического полупространства. Получено общее представление для поля волны в терминах одной гармонической функции для двух основных типов однородных граничных условий.

Ключевые слова: *волна Блюштейна – Гуляева, плоская гармоническая функция.*

Введение. Исследования пьезоэлектрических или электроупругих поверхностных волн являются актуальной задачей, результаты которых широко применяются в науке и технике [1]. В настоящей работе рассматриваются пьезоупругая волна Блюштейна – Гуляева [2, 3], распространяющаяся вдоль поверхности трансверсально-изотропного электроупругого полупространства, а также типа однородных граничных условий: случай покрытия поверхности с помощью тонкого, идеально проводящего электрода с заземлением, и свободный контакт поверхности с вакуумом. В рамках аналитического подхода к задаче представляет интерес обобщение известного решения синусоидальной формы [2] для случая произвольных гармонических функций, по аналогии с известными результатами для упругих поверхностных волн [4–6]. Также следует выделить работу [7], расширяющую методологию [4] для случая анизотропных упругих сред. Целью данной работы является построение поля волны Блюштейна – Гуляева в терминах одной гармонической функции. Как и в случае линейной упругости, использование анзаца в форме распространяющейся плоской волны позволяет переформулировать уравнения движения в псевдостатической форме и получить с использованием граничных условий представление для поля волны в терминах одной гармонической функции.

Постановка задачи. Рассмотрим трансверсально-изотропное пьезоупругое полупространство $0 \le y < \infty$ (класс симметрии C_{6mm}). Уравнения движения имеют вид [2, 8]

$$\Delta u - c_0^{-2} u_{tt} = 0, \qquad \Delta\psi = 0, \tag{1}$$

где $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ – двумерный оператор Лапласа; $u = u(x, y, t)$ – антиплоское перемещение; $c_0 = \sqrt{\dfrac{\overline{c}_{44}}{\rho}}$ – скорость поперечной волны в среде; ρ – объемная плотность; $\bar{c}_{44}=c_{44}+\dfrac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}}$ – усиленный пьезоэлектрический модуль упругости; c_{44} и e_{15} упругий и пьезоэлектрический модули, соответственно, ε_{11} – поперечная диэлектрическая проницаемость кристалла, а вспомогательная функция $\psi=\psi(x,y,t)$ выражается через электрический потенциал $\varphi=\varphi(x,y,t)$ как

$$\psi=\varphi-\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}u. \tag{2}$$

В работе рассматриваются два вида граничных условий на поверхности $y=0$:

– поверхность покрыта тонким слоем заземленного проводника

$$\bar{c}_{44}u_y+e_{15}\psi_y=0, \qquad \psi+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}u=0; \tag{3}$$

– свободный контакт поверхности с вакуумом

$$\bar{c}_{44}u_y+e_{15}\psi_y=0, \qquad \psi+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}u-\hat{\varphi}=0, \qquad \varepsilon_{11}\psi_y+\hat{\varphi}_y=0. \tag{4}$$

Здесь $\hat{\varphi}$ – электрический потенциал в вакууме, удовлетворяющий уравнению Лапласа $\Delta\hat{\varphi}=0$ $\left(y\le 0\right)$. Решения также должны удовлетворять условиям затухания $u,\psi\to 0,$ $\left(y\to\infty\right),$ $\hat{\varphi}\to 0,$ $\left(y\to-\infty\right).$

Общее представление для собственных функций. *Поверхность с покрытием в виде электрода с заземлением.*

Рассмотрим первый тип граничных условий (см. (3)). По аналогии с упругим случаем перемещение может быть записано в виде

$$u=U\left(x-ct,y\right), \qquad \psi=\Psi\left(x-ct,y\right), \tag{5}$$

что позволяет переформулировать уравнения движения (1) в псевдостатической форме:

$$U_{yy}+\lambda^2U_{xx}=0, \qquad \Psi_{yy}+\Psi_{xx}=0, \tag{6}$$

где $\lambda^2=1-\dfrac{c^2}{c_0^2}$. Решения (6) могут быть записаны в виде произвольных плоских гармонических функций:

$$U = U(\xi, \lambda y), \qquad \Psi = \Psi(\xi, y), \tag{7}$$

удовлетворяющих условиям затухания $U, \Psi \to 0, \quad (y \to \infty)$.

Подставляя (7) в граничные условия (3) и пользуясь свойствами гармонических функций, получим

$$\begin{aligned} &\lambda \overline{c}_{44} U_{\xi}(\xi, 0) + e_{15} \Psi_{\xi}(\xi, 0) = 0, \\ &\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} U(\xi, 0) + \Psi(\xi, 0) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

откуда из равенства нулю соответствующего определителя имеем

$$c_{BG}^2 = \frac{\overline{c}_{44}}{\rho}\left(1 - k^2\right), \tag{9}$$

где $k = \dfrac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}\overline{c}_{44}}$, что совпадает с уравнением для волны Блюштейна – Гуляева [2] для рассматриваемых граничных условий (3). По аналогии с рассуждениями в [4], функции U и Ψ связаны соотношением (см. (8))

$$U(\xi, \lambda y) = -\frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}} \Psi(\xi, \lambda y). \tag{10}$$

Таким образом, получено представление поля волны Блюштейна – Гуляева в терминах одной гармонической функции.

Свободный контакт поверхности с вакуумом. Аналогичные рассуждения справедливы для второго типа граничных условий (4). Полагая в дополнение к (5)

$$\hat{\varphi} = \hat{\Phi}(x - ct, y), \tag{11}$$

получим из (4)

$$\begin{aligned} &\overline{c}_{44} \lambda U_{\xi}(\xi, 0) + e_{15} \Psi_{\xi}(\xi, 0) = 0, \\ &\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} U(\xi, 0) + \Psi(\xi, 0) - \hat{\Phi}(\xi, 0) = 0, \\ &\varepsilon_{11} \Psi_{\xi}(\xi, 0) + \hat{\Phi}_{\xi}(\xi, 0) = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

откуда

$$c_{BG}^2 = \frac{\overline{c}_{44}}{\rho}\left[1-\left(\frac{k}{1+\varepsilon_{11}}\right)^2\right], \tag{13}$$

что совпадает с известным уравнением [2]. Таким образом, общее представление поля волны Блюштейна – Гуляева для граничных условий (4) имеет вид

$$\begin{aligned} U(\xi,\lambda y) &= -\frac{e_{15}}{\overline{c}_{44}\lambda}\Psi(\xi,\lambda y), \\ \hat{\Phi}(\xi,y) &= -\varepsilon_{11}\Psi(\xi,-y). \end{aligned} \tag{14}$$

Заключение. Построено общее представление для поля волны Блюштейна – Гуляева в терминах одной гармонической функции (см. (10), (14)), что расширяет результаты работ [4, 7] для случая пьезоэлектрических сред. С учетом природы волны Блюштейна – Гуляева, характеризующейся более медленным затуханием [3], полученные результаты представляют существенный интерес, так как описывают все виды затухающих гармонических функций (см. [5]). Результаты также позволяют упростить асимптотическую модель [8], переписав ее в виде скалярной задачи Дирихле для уравнения Лапласа по аналогии с моделью для волны Рэлея [9]. Так же, как и в [10], может быть рассмотрена задача о волне Блюштейна – Гуляева в случае пьезоэлектрического полупространства с покрытием, исследованы задачи о подвижной нагрузке.

В заключение отметим, что подобные представления могут быть построены для более общих типов поверхностных акустических волн [11–14], включая магнитоупругие поверхностные волны [15, 16], с учетом возможной анизотропии среды и наличия предварительных деформаций.

Авторы выражают искреннюю признательность д-ру физ.-мат. наук, проф. Ю.Д. Каплунову за ценные замечания.

Исследования выполнены при поддержке грантов Президента РФ МК-3150.2012.8, Turkish Research Council 03.220.01-16415.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Campbell C.K. *Surface Acoustic Wave Devices*, Academic Press, Boston, 1998.

[2] Bleustein J.L. A New Surface Wave in Piezoelectric Materials. *Appl. Phys. Let.*, 1968, vol. 13, pp. 412, 413.

[3] Гуляев Ю.В., Поверхностные электрозвуковые волны в упругих телах. *Письма в ЖЭТФ*. 1969. № 9, pp. 63–65.

[4] Chadwick P. Surface and Interfacial Waves of Arbitrary form in isotropic Elastic Media. *Journal of Elasticity*, 1976, vol. 6, pp. 73–80.
[5] Friedlander F. On the Total Reflection of Plane Waves. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1948, vol. 1, pp. 376–384.
[6] Kiselev A.P. Rayleigh Wave with a Transverse Structure. *Proceedings of the Royal Society London, Ser. A*, 2004, vol. 460, pp. 3059–3064.
[7] Prikazchikov D.A. Rayleigh Waves of Arbitrary Profile in Anisotropic Media. *Mechanics Research Communications*, 2013, vol. 50, pp. 83–86.
[8] Kaplunov J., Kossovich L., Zakharov A. An Explicit Asymptotic Model for the Bleustein – Gulyaev Wave. *Comptes Rendus Mecanique*, 2004, vol. 332(7), pp. 487–492.
[9] Kaplunov J., Zakharov A., Prikazchikov D.A. Explicit Models for Elastic and Piezoelastic Surface Waves. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2006, vol. 71, pp. 768–782.
[10] Dai H.-H., Kaplunov J., Prikazchikov D.A. A Long Wave Model for the Surface Elastic Wave in a Coated Half Space. *Proceedings of the Royal Society London, Ser. A*, 2010, vol. 466, pp. 3097–3116.
[11] Alshits V.I., Darinskii A.N., Lothe J., Lyubimov V.I. Surface Acoustic Waves in Piezocrystals: an Example of Surface Wave Existence with Clamped Boundary. *Wave Motion*, 1994, vol. 19, pp. 113–123.
[12] Тарасенко С.В., Обменный механизм локализации фононов вблизи поверхности магнитоупорядоченного кристалла. *Физика твердого тела*, 1998, № 40 (2), с. 299–304.
[13] Liu H., Kuang Z.B., Cai Z.M., Propagation of Bleustein-Gulyaev Waves in a Pre-Stressed Layered Piezoelectric Structure. *Ultrasonics*, 2003, vol. 41, pp. 397–405.
[14] Jin F., Wang Z., Kishimoto K. The Propagation Behavior of Bleustein – Gulyaev Waves in a Pre-Stressed Piezoelectric Layered Structure. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2003, vol. 4, pp. 125–138.
[15] M.S. Ruderman Soliton Propagation on Multiple-Interface Magnetic Structures. *Journal of Geophysical Research*, 1992, vol. 97, pp. 16843–16853.
[16] Saxena P, Ogden R.W. On Surface Waves in a Finitely Deformed Magnetolastic Half-Space. *International Journal of Applied Mechanics*, 2011, vol. 3(4), pp. 633–665.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Приказчиков Д.А., Эрбаш Б. Общее представление для волны Блюштейна – Гуляева. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/848.html

Приказчиков Данила Александрович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 35 научных работ и 7 учебно-методических пособий. Область научных интересов: динамическая теория упругости, распространение волн, асимптотические методы. e-mail: prikazchikovda@yandex.ru

Эрбаш Барыш – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математика» Анатолийского университета в Эскишехире, Турция. Автор 14 научных работ и одного учебно-методического пособия. Область научных интересов: теория упругости, распространение волн, смешанные задачи.