

## К вопросу о формировании граничных условий на внешней границе пограничного слоя

© В.В. Горский<sup>1</sup>, Н.А. Горская<sup>2</sup>, А.А. Оленичева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ОАО «ВПК «НПО машиностроения»,  
Московская область, г. Реутов, 143966, Россия

<sup>2</sup> МГУПИ, Москва, 107966, Россия

*Приведены результаты анализа погрешностей, вносимых в формирование граничных условий на внешней границе пограничного слоя, полученные использованием широко применяемого на практике приближенного подхода к решению данной проблемы. Предложена модификация этого приближенного подхода, которая позволяет существенно снизить уровень соответствующих погрешностей счета.*

**Ключевые слова:** пограничный слой, граничные условия.

**Введение.** Как известно, предложенный Л. Прандтлем классический подход к расчету теплообмена и трения на поверхности тела, обтекаемого маловязким газом, заключается в разбиении решения данной задачи на два этапа [1].

На первом рассматривается задача обтекания тела идеальным газом, а на втором – решаются уравнения пограничного слоя с граничными условиями на внешней границе, сформированными на базе решений, найденных на первом этапе.

Однако при изучении данной проблемы для окрестности критической точки затупленного тела на практике обычно используют упрощенный подход – свободный от необходимости численного расчета обтекания тела идеальным газом. При проведении систематических исследований использование упрощенного подхода получило широкое распространение на практике, так как его применение сопряжено с резким сокращением трудовых и временных затрат.

Вследствие того, что подробный анализ погрешностей не нашел должного освещения в литературе, данная работа посвящена детальному изучению этого вопроса.

Исходные данные по параметрам газового потока для исследований, результаты которых отражены в данной работе, приведены в табл. 1.

Здесь  $p_0$  – давление торможения набегающего воздушного потока, МПа;  $\rho_\infty$  – плотность набегающего воздушного потока, кг/м<sup>3</sup>;  $T_\infty$  – температура набегающего воздушного потока, К.

## Исходные данные по параметрам набегающего потока

$M_\infty$	$p_0$				
	0,001	0,01	0,1	1	10
2	$2,40569 \cdot 10^{-3}$	$2,79610 \cdot 10^{-2}$	$2,40569 \cdot 10^{-1}$	–	–
	260,16	223,83	216,65	–	–
2,5	$1,53644 \cdot 10^{-3}$	$1,82725 \cdot 10^{-2}$	$1,91121 \cdot 10^{-1}$	–	–
	269,15	226,56	216,65	–	–
3	$1,07874 \cdot 10^{-3}$	$1,27476 \cdot 10^{-2}$	$1,34955 \cdot 10^{-1}$	$1,05034 \cdot 10^0$	–
	270,65	229,29	216,65	277,69	–
4	$6,32932 \cdot 10^{-4}$	$6,94753 \cdot 10^{-3}$	$7,67536 \cdot 10^{-2}$	$6,67388 \cdot 10^{-1}$	–
	263,30	240,07	217,50	249,83	–
6	$3,02526 \cdot 10^{-4}$	$2,90640 \cdot 10^{-3}$	$3,35309 \cdot 10^{-2}$	$3,44752 \cdot 10^{-1}$	–
	246,51	256,46	222,68	216,65	–
8	$1,77156 \cdot 10^{-4}$	$1,54482 \cdot 10^{-3}$	$1,84803 \cdot 10^{-2}$	$1,93630 \cdot 10^{-1}$	–
	235,01	269,04	226,48	216,65	–
10	$1,16523 \cdot 10^{-4}$	$9,73403 \cdot 10^{-4}$	$1,14874 \cdot 10^{-2}$	$1,23087 \cdot 10^{-1}$	$9,74453 \cdot 10^{-1}$
	226,38	270,65	231,10	216,65	273,07
15	$5,48650 \cdot 10^{-5}$	$4,55998 \cdot 10^{-4}$	$4,73361 \cdot 10^{-3}$	$5,34220 \cdot 10^{-2}$	$5,03320 \cdot 10^{-1}$
	212,56	255,70	247,15	219,75	233,81
20	$3,16726 \cdot 10^{-5}$	$2,66949 \cdot 10^{-4}$	$2,51562 \cdot 10^{-3}$	$2,93496 \cdot 10^{-2}$	$3,04135 \cdot 10^{-1}$
	205,42	243,77	259,28	223,52	216,65
25	$2,07053 \cdot 10^{-5}$	$1,76530 \cdot 10^{-4}$	$1,54472 \cdot 10^{-3}$	$1,84358 \cdot 10^{-2}$	$1,93595 \cdot 10^{-1}$
	200,06	234,93	269,04	226,50	216,65

**Физико-математическая постановка задачи.** При решении автотомельных уравнений пограничного слоя, относящихся к окрестности «критической» точки сферы, обтекаемой сверхзвуковым газовым потоком, исходными данными являются энтальпия  $h_{00}$  и давление  $p_0$  торможения этого потока, а также градиент  $u_{e,s}$  тангенциальной проекции вектора скорости.

Общепринятый на практике инженерный подход к решению указанной проблемы [2, 3] заключается в выполнении следующей последовательности операций:

• расчет энтальпии торможения газового потока, Дж/кг, по формуле

$$h_{00} = \left[ \frac{1}{(\chi_{\infty} - 1)M_{\infty}^2} + 0,5 \right] V_{\infty}^2;$$

• расчет параметров газа за ударной волной в соответствии с уравнениями адиабаты Ренкина – Гюгонио, записанных в следующем виде [19]:

$$p_1 = \left( \frac{1}{\chi_{\infty} M_{\infty}^2} + 1 - k_p \right) \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \text{ (Па)}, \quad (1)$$

$$h_1 = \left[ \frac{1}{(\chi_{\infty} - 1)M_{\infty}^2} + \frac{1}{2}(1 - k_p^2) \right] V_{\infty}^2, \quad (2)$$

$$k_p = \rho_{\infty} / \rho_1, \quad (3)$$

$$\rho_1 = F_p(h_1, p_1), \quad (4)$$

$$\chi_1 = \frac{\rho_1 h_1}{\rho_1 h_1 - p_1}; \quad (5)$$

• расчет безразмерного давления торможения с использованием формулы Рэля [4], полученной из уравнения Бернулли [4] в предположении, что в процессе движения газа от ударной волны до тела его эффективный показатель адиабаты сохраняет свое значение, соответствующее состоянию газа за ударной волной

$$p_0 = p_1 \left( 1 + \frac{\chi_1 - 1}{2} M_1^2 \right)^{\chi_1 / (\chi_1 - 1)},$$

$$M_1 = \frac{k_p}{\sqrt{(\chi_1 - 1)h_1}};$$

• расчет плотности  $\rho_0$  в точке торможения газового потока как функцию энтальпии и давления торможения;

• расчет градиента тангенциальной проекции вектора скорости с использованием уравнения Бернулли и распределения давления по поверхности сферы в соответствии с формулой Ньютона [4], т. е.

$$u_{e,s} = \frac{1}{R_{sph}} \sqrt{\frac{2}{\rho_0} (p_0 - p_\infty)}, \text{ с}^{-1}, \quad (6)$$

где  $\chi_\infty$  – показатель адиабаты в набегающем газовом потоке (для воздуха  $\chi_\infty = 1,4$ );  $p_\infty$  – давление в набегающем потоке;  $V_\infty$  – скорость в набегающем потоке;  $h_1$ ,  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $M_1$  – энтальпия, давление и плотность газа, а также число Маха за ударной волной;  $\chi_1$  – эффективный показатель адиабаты за ударной волной;  $F_p$  – функция, характеризующая зависимость плотности газа от энтальпии и давления;  $R_{sph}$  – радиус сферы.

Если расчеты проводятся в приближении нахождения воздуха в состоянии термодинамического равновесия, то для вычисления значений функции  $F_p$  обычно используют аппроксимационные формулы работы [5]. Эти формулы с высокой точностью аппроксимируют табличные значения этой функции, рассчитанные по данным работ [6–8].

Решение системы уравнений (1) – (5) в этом случае можно найти методом итераций по отношению плотностей  $k_p$  на ударной волне.

При проведении настоящих исследований использовались аналогичные формулы из работы [9], обладающие более широкой областью определения по энтальпии, в которой сохраняется высокая точность аппроксимации этой функциональной зависимости.

В свою очередь при использовании приближения совершенного газа принимается, что  $\chi_1 = \chi_\infty$ , а вместо уравнения (4) используется уравнение состояния, записанное в форме

$$p_1 = \rho_1 \frac{\chi_1 - 1}{\chi_1} h_1.$$

С использованием формул (1) – (3) это уравнение превращается в квадратное уравнение относительно  $k_p$ , решение которого имеет вид

$$k_p = \frac{1}{\chi_1 + 1} \left( \frac{2}{M_\infty^2} + \chi_1 - 1 \right).$$

Правомочность сделанных допущений контролировалась на базе строго численного расчета обтекания сферы сверхзвуковым газовым

потоком, полученного методом Мак-Кормака [10] с использованием программы, составленной по методике работы [11], которая предварительно тестировалась на аналогичных результатах расчетов, опубликованных в работе [12]. Результаты указанного тестирования приведены в табл. 2.

Таблица 2

**Результаты тестирования приближенного газодинамического расчета**

Условия в набегающем газовом потоке	Погрешность расчета, %	
	$p_0$	$u_{e,s}$
$M_\infty = 3, \chi_\infty = 1,4$	0	0,34
$M_\infty = 6, \chi_\infty = 1,4$	0,02	0,81
$M_\infty = 10, \chi_\infty = 1,4$	0	0,93
$M_\infty = 20, \chi_\infty = 1,4$	0	1,00
$M_\infty = 10, \rho_\infty = 0,41357 \text{ кг/м}^3, p_\infty = 26490 \text{ Па}$	–	–
$M_\infty = 10, \rho_\infty = 0,088870 \text{ кг/м}^3, p_\infty = 526,9 \text{ Па}$	–	–
$M_\infty = 10, \rho_\infty = 0,017901 \text{ кг/м}^3, p_\infty = 1183,6 \text{ Па}$	–	–
$M_\infty = 15, \rho_\infty = 0,41357 \text{ кг/м}^3, p_\infty = 26490 \text{ Па}$	0,03	2,13
$M_\infty = 15, \rho_\infty = 0,088870 \text{ кг/м}^3, p_\infty = 526,9 \text{ Па}$	0,03	2,05
$M_\infty = 15, \rho_\infty = 0,017901 \text{ кг/м}^3, p_\infty = 1183,6 \text{ Па}$	0,03	2,07
$M_\infty = 15, \rho_\infty = 0,0010754 \text{ кг/м}^3, p_\infty = 84,581 \text{ Па}$	0,03	2,25
$M_\infty = 20, \rho_\infty = 0,088870 \text{ кг/м}^3, p_\infty = 526,9 \text{ Па}$	0,04	2,13
$M_\infty = 20, \rho_\infty = 0,017901 \text{ кг/м}^3, p_\infty = 1183,6 \text{ Па}$	0,04	2,39
$M_\infty = 20, \rho_\infty = 0,0010754 \text{ кг/м}^3, p_\infty = 84,581 \text{ Па}$	0,04	2,87

Из представленных данных видно, что основные результаты расчета, полученные в рамках используемой программы численного расчета течения идеального газа, практически идентичны аналогичным результатам расчетов из работы [12] (различие в этих результатах соизмеримо с точностью газодинамического расчета).

В табл. 3 и 4 приведены данные погрешности вычисления давления торможения  $p_0$ , градиента тангенциальной проекции вектора скорости  $u_{e,s}$  и показателя адиабаты на «стенке»  $\chi_w$ , определенных по изложенной выше общепринятой приближенной методике, полученные на базе сопоставления их с аналогичными результатами строго численного расчета.

Таблица 3

**Погрешности приближенного расчета газодинамических параметров  
для случая обтекания сферы совершенным газом**

$M_\infty$	$\Delta p_0, \%$	$\Delta u_{e,s}, \%$	$M_\infty$	$\Delta p_0, \%$	$\Delta u_{e,s}, \%$
2	-0,0493	5,8128	8	-0,0249	10,0824
2,5	-0,0320	6,5790	10	-0,7022	10,0750
3	-0,0298	7,4167	15	-0,0623	10,4929
4	-0,2975	8,5934	20	0,0269	10,4134
6	-0,1635	9,6942	25	-0,1836	8,6175

Таблица 4

**Погрешности приближенного расчета газодинамических параметров  
для случая обтекания сферы воздухом в состоянии  
термохимического равновесия**

$M_\infty$	$p_0, \text{ МПа}$	0,001	0,01	0,1	1	10
2	$\Delta p_0, \%$	0,0131	0,0131	0,0131	–	–
	$\Delta u_{e,s}, \%$	6,8263	6,8263	6,8263	–	–
	$\Delta \chi_w, \%$	0	0	0	–	–
2,5	$\Delta p_0, \%$	0,0102	0,0068	0,0068	–	–
	$\Delta u_{e,s}, \%$	7,5157	7,1897	7,1897	–	–
	$\Delta \chi_w, \%$	0	0	0	–	–
3	$\Delta p_0, \%$	0,0068	0,0068	0,0068	0,0068	–
	$\Delta u_{e,s}, \%$	7,1897	7,1897	7,1897	7,1897	–
	$\Delta \chi_w, \%$	<0,0087	<0,0087	<0,0087	<0,0087	–
4	$\Delta p_0, \%$	0,0102	0,0087	0,0078	0,0098	–
	$\Delta u_{e,s}, \%$	8,1526	8,1643	8,1872	8,1594	–
	$\Delta \chi_w, \%$	<0,0095	<0,0095	<0,0095	<0,0095	–
6	$\Delta p_0, \%$	0,0125	0,0092	0,0111	0,0099	–
	$\Delta u_{e,s}, \%$	8,7595	8,7599	8,7668	8,7670	–
	$\Delta \chi_w, \%$	<0,1000	<0,1000	<0,1000	<0,1000	–
8	$\Delta p_0, \%$	0,0208	0,0157	0,0163	0,0159	–
	$\Delta u_{e,s}, \%$	8,1019	8,5282	8,5088	8,9601	–
	$\Delta \chi_w, \%$	<0,1600	<0,1600	<0,1600	<0,1600	–
10	$\Delta p_0, \%$	0,0098	0,0048	0,0090	0,0113	0,0088
	$\Delta u_{e,s}, \%$	9,4014	9,6743	9,2843	9,2453	9,6525
	$\Delta \chi_w, \%$	<0,0900	<0,0900	<0,0900	<0,0900	<0,0900

$M_\infty$	$p_0$ , МПа	0,001	0,01	0,1	1	10
15	$\Delta p_0$ , %	0,0037	0,0065	0,0044	0,0022	0,0030
	$\Delta u_{e,s}$ , %	12,0620	11,5919	11,6388	11,9373	11,8091
	$\Delta \chi_w$ , %	<0,0900	<0,0900	<0,0900	<0,0900	<0,0900
20	$\Delta p_0$ , %	0,0053	0,0045	0,0048	0,0060	0,0045
	$\Delta u_{e,s}$ , %	12,7238	12,8900	12,6204	11,8017	11,4051
	$\Delta \chi_w$ , %	<0,0900	<0,0900	<0,0900	<0,0900	<0,0900
25	$\Delta p_0$ , %	0,0055	0,0046	0,0013	0,0039	0,0040
	$\Delta u_{e,s}$ , %	14,2554	14,2185	14,1126	13,0286	12,4287
	$\Delta \chi_w$ , %	<0,0900	<0,0900	<0,0900	<0,0900	<0,0900

Как следует из приведенных данных, погрешности, вносимые в расчет допущениями о постоянстве показателя адиабаты вдоль критической линии тока, крайне невелики, что и обуславливает высокую точность расчета давления торможения по формуле Рэлея. На ряду с этим использование формулы Ньютона приводит к заметным ошибкам в расчете градиента тангенциальной составляющей вектора скорости, которая имеет тенденцию к возрастанию с ростом числа Маха.

В то же время, если преобразовать формулу (6) к виду

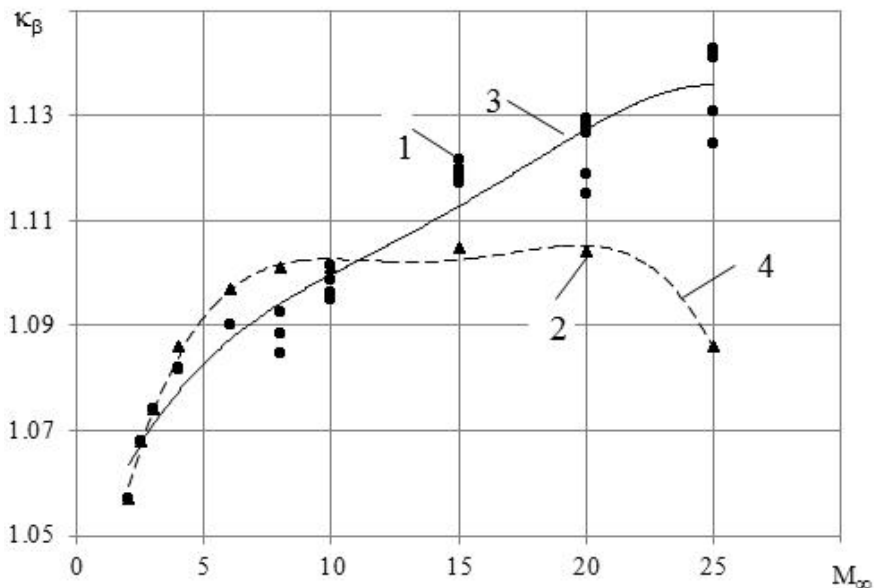
$$u_{e,s} = (1 + 0,01\Delta u_{e,s}) \frac{1}{R_{sph}} \sqrt{\frac{2}{\rho_0}(p_0 - p_\infty)},$$

то все необходимые для решения уравнений пограничного слоя параметры течения идеального газа практически не будут отличаться от результатов соответствующего строгого численного расчета. Этот подход и применялся при проведении исследований, результаты которых помещены в данной работе. При этом использовались значения  $\Delta u_{e,s}$ , показанные в табл. 3 и 4.

Для расчета поправочного коэффициента к формуле (6) может быть рекомендована аппроксимационная формула вида

$$\begin{aligned} \kappa_\beta = 1 + \Delta u_{e,s} = & -0,0000009 \cdot M_\infty^4 + 0,00005 \cdot M_\infty^3 - \\ & - 0,0011 \cdot M_\infty^2 + 0,0123 \cdot M_\infty + 1,0429, \end{aligned}$$

применение которой обеспечивает расчет  $u_{e,s}$  с погрешностью не выше 1 % при рассмотрении течения газа в приближении термодинамического равновесия (см. кривую 3 на рис. 1).



Зависимость поправочных коэффициентов от числа Маха набегающего потока:

1, 3 – численный расчет и аппроксимационная зависимость для течения газа в приближении термохимического равновесия соответственно; 2, 4 – численный расчет и аппроксимационная зависимость для течения газа в приближении совершенного газа соответственно

Аналогично решается задача и для совершенного газа, для него использование аппроксимационной формулы

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta} = 1 + \Delta u_{e,s} = & -0,000003 \cdot M_{\infty}^4 + 0,0001 \cdot M_{\infty}^3 - \\ & - 0,0031 \cdot M_{\infty}^2 + 0,0269 \cdot M_{\infty} + 1,0167 \end{aligned}$$

обеспечивает еще более высокую точность расчета  $u_{e,s}$  (см. кривую 4 на рисунке).

**Выводы.** Применение широко используемого на практике инженерного подхода к формированию граничных условий на внешней границе пограничного слоя приводит к внесению в расчет градиента скорости на внешней границе пограничного слоя в окрестности «критической» точки сферы ошибок, достигающих примерно 15 %.

Предложены простые расчетные соотношения, применение которых позволяет на порядок уменьшить погрешность расчета указанного градиента скорости практически без усложнения алгоритма приближенного газодинамического расчета.



## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя*. Москва, Иностранная литература, 1956.
- [2] Авдуевский В.С., Галицейский Б.М., Глебов Г.А. Кошкина В.К., ред. *Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике*. Москва, Машиностроение, 1975, 624 с.
- [3] *Методы расчета теплообмена на поверхности летательных аппаратов при двумерном и пространственном обтекании. Справочные материалы*. Авдуевский В.С. и Землянский Б.А., ред. Калининград Московской области, ЦНИИмаш, 1992.
- [4] Лунев В.В. *Гиперзвуковая аэродинамика*. Москва, Машиностроение, 1975, 327 с.
- [5] Синченко С.Г. Аппроксимация термодинамических функций воздуха. *Журнал вычислительной математики и вычислительной физики*, 1968, т. 8, № 4, с. 917.
- [6] Предводителев А.С., Ступоченко Е.В., Плешанов А.С. *Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 200 до 6000° К и давлений от 0,00001 до 100 атмосфер)*. Предводителев А.С., ред. Москва, Вычислительный центр АН СССР, 1962, 268 с.
- [7] Предводителев А.С., Ступоченко Е.В., Самуйлов Е.В. *Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 6000 до 12000° К и давлений от 0,001 до 1000 атмосфер)*. Предводителев А.С., ред. Москва, Изд-во АН СССР. 1957, 300 с.
- [8] Предводителев А.С., Ступоченко Е.В., Плешанов А.С. *Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 1200 до 20000° К и давлений от 0,00001 атмосфер)*. Предводителев А.С., ред. Москва, Изд-во АН СССР, 1959, 230 с.
- [9] Горский В.В., Ватолина Е.Г. *Математическое моделирование тепловых и газодинамических процессов при проектировании летательных аппаратов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, с. 55.
- [10] MacCormack R.W. The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering. *AIAA paper*, 1969, vol. 69, p. 354.
- [11] Котенев В.П., Сахаров В.И., Тирский Г.А. О расчете сверхзвукового обтекания пространственных тел химически неравновесным потоком газа. *ЖВММФ*, 1987, № 3, с. 411.
- [12] Любимов А.Н., Русанов В.В. *Течение газа около тупых тел*. Т. 2. Москва, Наука, 1970.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Горский В.В., Горская Н.А., Оленичева А.А. К вопросу о формировании граничных условий на внешней границе пограничного слоя. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/846.html>

**Горский Валерий Владимирович** родился в 1939 г., окончил Московский авиационный институт им. С. Орджоникидзе в 1963 г. Д-р техн. наук, профессор, главный научный сотрудник ОАО «ВПК «НПО машиностроения». Автор 133 работ. Область научных интересов: тепломассообмен и тепловая защита. e-mail: [gorskna@yandex.ru](mailto:gorskna@yandex.ru).

**Горская Наталья Александровна** родилась в 1940 г., окончила Московский авиационный институт им. С. Орджоникидзе в 1964 г. Канд. техн. наук, доцент МГУПИ. Автор 35 работ. Область научных интересов: тепломассообмен. e-mail: gorskknat@yandex.ru.

**Оленичева Анна Александровна** родилась в 1979 г., окончила Московский энергетический институт в 2002 г. Инженер 1 категории ОАО «ВПК «НПО машиностроения». Автор 10 работ. Область научных интересов: тепломассообмен. e-mail: guilanna@rambler.ru