УДК 539.3

Определение контактного давления в задаче о взаимодействии тел с покрытиями при износе, тепловыделении и учете зависимости коэффициента трения от температуры

© Е.А. Губарева
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Показана максимально упрощенная схема контакта тел с упругими мягкими покрытиями, дающая возможность учитывать больше явлений, протекающих в области контакта. С учетом предложенной формулы для описания нелинейного трения в [1] найдено контактное давление. Определены ресурс трибосопряжения и условие отсутствия катастрофического износа.

Ключевые слова: *покрытие, трение, тепловыделение, контактное давление.*

Введение. В схожей постановке задача рассматривалась в [2–6]. В работе [1] была предложена нелинейная зависимость коэффициента трения от температуры и определена контактная температура. Особый практический интерес представляет определение контактного давления. В настоящей работе определяется контактное давление при заданной зависимости коэффициента трения.

Постановка задачи о контактном взаимодействии двух тел с тонкими мягкими покрытиями. Пусть на одно тело нанесено покрытие *1* начальной толщины h_{10}, а на другое – покрытие *2* начальной толщины h_{20}; механические и теплофизические характеристики покрытий различны; механические характеристики тел значительно превосходят характеристики покрытий, так что тела по сравнению с их покрытиями можно считать абсолютно жесткими; область контакта тел с покрытиями намного превосходит толщины покрытий h_{10} и h_{20}, поэтому покрытия можно считать относительно тонкими.

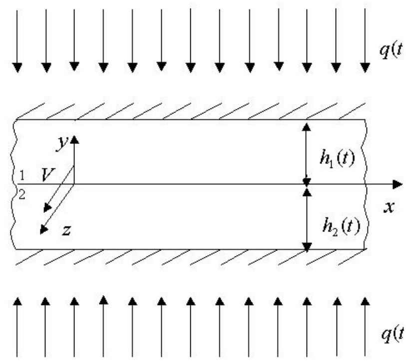

Рис. 1. Схема контакта тел с покрытиями

Используя «принцип микроскопа» [7], представим схему контакта тел с покрытиями, как показано на рис. 1.

Пусть в момент времени $t = 0$ одно тело, находясь в контакте с другим, начинает двигаться относительно него с постоянной скоростью v в направлении оси z. Динамическими эффектами будем пренебрегать. Обозначим через $q(t)$ контактное давление в момент времени t, в силу «принципа микроскопа» его можно считать не зависящим от координат x и z.

Допустим, что в области контакта возникают силы трения $\tau(t)$, связанные с давлением $q(t)$ нелинейной зависимостью

$$\tau = k(q, T). \tag{1}$$

В качестве функции примем $k(q,T)$ [1]

$$k(q,\, T) = \tau_* \left\{ \left[1 - \exp(-\frac{k_1 q}{\tau_*}) \right] + \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) T^* \left[1 - \exp(-\frac{k_2 q}{\tau_*}) \right] \right\}, \tag{2}$$

где τ_* – минимальное из касательных напряжений текучести материалов покрытий; k_1, k_2 – коэффициенты трения материалов покрытий; T^* – контактная температура, коэффициенты $\beta_1 = (1+\nu_1)(1-\nu_1)^{-1}\alpha_1$, $\beta_2 = (1+\nu_2)(1-\nu_2)^{-1}\alpha_2$, ν_1, ν_2 – коэффициенты Пуассона материалов покрытий; α_1, α_2 – коэффициенты линейного расширения материалов покрытий.

Вследствие трения в области контакта возникает износ поверхностей покрытий. Происходит изменение толщин покрытий за счет износа и термоупругих деформаций. Обозначим текущие значения толщин покрытий через $h_1(t)$ и $h_2(t)$. Износ будем считать абразивным, тогда уменьшение толщин вследствие износа произойдет соответственно на величины [8]:

$$\begin{gathered} v_{1*}(t) = -l_1 \int_0^t V\tau\, d\zeta = -l_1 V \int_0^t k(q,T)\, d\zeta, \;\; v_{2*}(t) = \\ = l_2 \int_0^t V\tau\, d\zeta = l_2 V \int_0^t k(q,T)\, d\zeta, \end{gathered} \tag{3}$$

где $l_1,\, l_2$ – коэффициенты износостойкости материалов покрытий.

Ввиду трения в области контакта происходит также тепловыделение. Если пренебречь малым силами трения, вызывающими износ покрытий и приращение мощности их упругой энергии, то количество теплоты, выделяемой в единицу времени на единицу площади контакта, можно представить формулой

$$Q = Vk(q,T). \tag{4}$$

Износ – медленно протекающий процесс, поэтому будем считать, что функции $q(t)$, $\tau(t)$ и $h_i(t)$ являются медленно меняющимися.

Определение ресурса трибосопряжения. Допустим сначала, что функция $q(t)$ задана и найдем ресурс работы пары тел с покрытиями. Для этого заметим, что должны иметь место следующие равенства:

$$v_1(h_1,t)+v_{1*}(t)=-h_{10}+h_1(t)\,, \tag{5а}$$

$$v_2(-h_2,t)+v_{2*}(t)=h_{20}-h_2(t)\,, \tag{5б}$$

где $v_i(y,t)$ - упругие перемещения точек покрытий по оси y, а $v_{i*}(t)$ определяются формулами (3). Относительно $v_1(h_1,t)$ и $v_2(-h_2,t)$ отметим, что с уменьшением $h_i(t)$ справедливы асимптотические соотношения

$$v_1(h_1,t)=O(h_1)\,,\ v_2(-h_2,t)=O(h_2) \tag{6}$$

(следствие (22), приведенных ниже).

Предположим, что износ достаточно развит, тогда в силу формул (5а), (5б) и (6) можно записать

$$h_{10}-l_1V\int_0^t k(q)d\varsigma=O(h_1)\,, \tag{7а}$$

$$h_{20}-l_2V\int_0^t k(q)d\varsigma=O(h_2)\,. \tag{7б}$$

Определим ресурс работы трибосопряжения как время, необходимое для полного истирания одного из покрытий. Из формулы (7а) при $h_1=0$ найдем некоторое время t_1, из формулы (7б) при $h_2=0$ определим некоторое время t_2. Тогда ресурс равен

$$t_*=\inf(t_1,t_2). \tag{8}$$

Например, при $q(t)\equiv q_*=\text{const}$ имеем

$$t_*=\inf\left[\frac{h_{10}}{l_1Vk(q,T)},\frac{h_{20}}{l_2Vk(q,T)}\right]. \tag{9}$$

Интегральное уравнение для определения контактного давления. Пусть теперь функции $h_i(t)$ заданы, тогда функция

$$\delta(t) = h_{10} + h_{20} - h_1(t) - h_2(t), \tag{10}$$

определяющая процесс сближения оснований $y = h_1(t)$ и $y = -h_2(t)$ покрытий, также задана. Найдем, как изменяется контактное давление $q(t)$, для чего вычтем (5а) из (5б), тогда в силу (10) получим

$$v_2(-h_2, t) - v_1(h_1, t) + v_{2*}(t) - v_{1*}(t) = \delta(t). \tag{11}$$

Для определения $v_2(-h_2, t)$ и $v_1(h_1, t)$, т. е. вертикальных упругих перемещений границ $y = h_1(t)$ и $y = -h_2(t)$ покрытий, пренебрегая инерционными членами, воспользуемся уравнениями линейной несвязанной термоупругости [9]. Принимая во внимание, что напряженно-деформированное состояние покрытий зависит только от координаты y и времени t (как параметра), получим

$$\frac{d^2 v_i}{dy^2} = \beta_i \frac{dT_i}{dy}, \ \sigma_{yi} = \gamma_i \left(\frac{dv_i}{dy} - \beta_i T_i \right), \tag{12}$$

$$\beta_i = \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}\alpha_i, \ \gamma_i = \frac{2(1-\nu_i)}{1-2\nu_i} G_i,$$

где σ_{yi} – нормальные напряжения; G_i – модули сдвига.

Учитывая найденные выражения для температур в покрытиях [1] и интегрируя дифференциальные уравнения (12), получим

$$v_i(y, t) = \frac{\beta_i T^*}{2h_i} y^2 + a_i y + b_i h_i, \ \sigma_{yi} = \gamma_i (a_i - \beta_i T^*), \tag{13}$$

где

$$T^* = \frac{h_1 h_2 V \tau_* \left(1 - \exp\left(-\frac{k_1 q}{\tau_*} \right) \right)}{\lambda_2 h_1 + \lambda_1 h_2 - \frac{1}{2} h_1 h_2 V (\beta_1 + \beta_2) \tau_* \left(1 - \exp\left(-\frac{k_2 q}{\tau_*} \right) \right)}.$$

Функции времени a_i и b_i определим из следующих граничных условий:

$$v_1(0, t) = v_2(0, t) = 0, \ \sigma_{y1}(0, t) = \sigma_{y2}(0, t) = 0. \tag{14}$$

В итоге получим

$$v_1(h_1,t) = -qh_1/\gamma_1 + \beta_1 h_1 T^*/2\,,\ v_2(-h_2,t) = qh_2/\gamma_2 - \beta_2 h_2 T^*/2\,. \qquad (15)$$

Подставив соотношения (3) и (15) в (11) и исключив T^*, в результате получим для определения $q(t)$ при известных $h_i(t)$ (а следовательно, и при известном $\delta(t)$) нелинейное интегральное уравнение Вольтерра

$$\left(\frac{h_2}{\gamma_2}+\frac{h_1}{\gamma_1}\right)q - \frac{\beta_2 h_2^2 h_1 + \beta_1 h_1^2 h_2}{2S} V\tau_* \times$$
$$\times\left(1-\exp\left(-\frac{k_1 q}{\tau_*}\right)\right) + 2lV\int_0^t m(q)d\varsigma = \delta(t), \qquad (16)$$

где

$$S = \lambda_2 h_1 + \lambda_1 h_2 - \frac{1}{2}h_1 h_2 V(\beta_1+\beta_2)\tau_*\left(1-\exp\left(-\frac{k_2 q}{\tau_*}\right)\right);$$

$$m(q) = \left(1-\exp\left(-\frac{k_1 q}{\tau_*}\right)\right) + \frac{h_1 h_2\left(1-\exp\left(-\frac{k_1 q}{\tau_*}\right)\right)\left(1-\exp\left(-\frac{k_2 q}{\tau_*}\right)\right)}{S}.$$

Случай относительно малого времени износа. Пусть $\delta(t)$ имеет порядок упругого перемещения, это будет очевидно, если рассмотрим относительно малый отрезок времени $0 \le t \le t_* < \infty$. В этом случае в уравнении (16) можно приближенно заменить $h_i(t)$ на h_{i0}. Положим также, что $k(q,T)$ имеет соответственно вид (2), а скорость износа постоянна, т. е.

$$\delta(t) = \delta_0 + \delta_1 t\,, \qquad (17)$$

где δ_0 и δ_1 – некоторые заданные постоянные. Тогда интегральное уравнение (16) после перехода к безразмерным величинам

$$q' = kq/\tau_*,\quad t' = Vt/(h_{20}+h_{10}),\quad \delta_0' = \delta_0/(h_{10}+h_{20}),\quad \delta_1' = \delta_1/V \qquad (18)$$

(штрихи далее опускаем) и комплексам

$$a = \frac{\tau_*(h_{20}\gamma_1 + h_{10}\gamma_2)}{k\gamma_1\gamma_2(h_{10}+h_{20})}\,,\ b = V\tau_*\left(\beta_2 h_{20}^2 h_{10} + \beta_1 h_{10}^2 h_{20}\right), \qquad (19)$$

$$c = -V\tau_*\left(\beta_2 h_{20}^2 h_{10} + \beta_1 h_{10}^2 h_{20}\right), \quad d = 2(\lambda_2 h_{10} + \lambda_1 h_{20})(h_{10} + h_{20}),$$
$$h = (l_1 + l_2)\tau_*$$

примет вид

$$qa - \frac{b}{d + c\left(1 - \exp\left(-\frac{k_2 q}{\tau_*}\right)\right)}\left(1 - \exp\left(-\frac{k_1 q}{\tau_*}\right)\right) + \\ + h\int_0^t m(q)d\varsigma = \delta_0 + \delta_1 t. \tag{20}$$

Отметим, что интегральное уравнение (20) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$aq' - \frac{bk_1(d+c)e^{-k_1 q} - bck_2 e^{-k_2 q} + bc(k_2 - k_1)e^{-(k_1+k_2)q}}{(d + c(1 - e^{-k_2 q}))^2}q' + hm(q) = \delta_1 \tag{21}$$

при начальном условии

$$q_0 a - \frac{b}{d + c\left[1 - \exp\left(-\frac{k_2 q_0}{\tau_*}\right)\right]}\left[1 - \exp\left(-\frac{k_1 q}{\tau_*}\right)\right] = \delta_0, \tag{22}$$

где q_0 – начальное безразмерное контактное давление.

Решения для частных случаев. Рассмотрим случай, когда q_0 мало, и будем считать, что в рассматриваемом диапазоне времени давление $q(t)$ также мало. Линеаризуя соотношения (21), (22), имеем

$$q'(a - bk_1 / d) + qhk_1 = \delta_1, \; q_0 a - bk_1 / ck_2 = \delta_0. \tag{23}$$

Отсюда при $a > bk_1 / d$

$$q = \frac{\delta_1}{hk_1} + \left(\frac{\delta_0 + bk_1 / ck_2}{a - bk_1 / d} - \frac{\delta_1}{hk_1}\right)\exp\left(-\frac{hk_1 t}{a - bk_1 / d}\right). \tag{24}$$

Следовательно, $q(t)$ меняется в пределах от $\dfrac{\delta_0 + bk_1 / ck_2}{a - bk_1 / d}$ при $t = 0$ до δ_1 / hk_1 при $t \to \infty$.

Пусть теперь q_0 велико, и будем считать, что в рассматриваемом диапазоне времени давление $q(t)$ также велико. Упрощая соотношения (21), (22), имеем

$$q' = -\frac{h\left(1+\dfrac{h_{10}h_{20}V\tau_*}{S_0}\right)-\delta_1}{a}, \quad q_0 = \frac{b/(d+c)+\delta_0}{a}, \tag{25}$$

где

$$S_0 = \lambda_2 h_{10} + \lambda_1 h_{20} - \frac{1}{2}h_{10}h_{20}V(\beta_1+\beta_2)\tau_*.$$

Отсюда получим

$$q = -\frac{h\left(1+\dfrac{h_{10}h_{20}V\tau_*}{S_0}\right)-\delta_1}{a}t + \frac{b/(d+c)+\delta_0}{a}. \tag{26}$$

Условие $h\left(1+\dfrac{h_{10}h_{20}V\tau_*}{S_0}\right) > \delta_1$ является условием катастрофического износа, поскольку в ином случае давление линейно растет с течением времени.

Выводы. В задаче о взаимодействии тел с покрытиями при износе, тепловыделении, учитывая зависимость коэффициента трения от температуры, получено дифференциальное уравнение для нахождения контактного давления. Рассмотрены два частных случая – когда давление мало и когда давление велико, – для которых получены выражения для контактного давления. Определен ресурс трибосопряжения. Найдено условие катастрофического износа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Губарева Е.А., Мозжорина Т.Ю., Щетинин А.Н. Моделирование взаимодействия тел с покрытиями при износе, тепловыделении и учете зависимости коэффициента трения от температуры. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, спец. вып № 3 «Математическое моделирование», с. 122–126.

[2] Alexandrov V., Gavdzinski V. Contact Interaction of Deformed Coverings of Solids with Regard for Wear and Friction Heating. *Proc. of the Second Intern. Symp. on Thermal Stresses and Related Topics*, 1997, New York, Rochester, 1997, pp. 371–373.

[3] Александров В.М., Губарева Е.А. Задача о взаимодействии тел с покрытиями при износе, тепловыделении и учете зависимости коэффициента трения от температуры. *Экологический вестник научных центров ЧЭС*, 2006, № 2, с. 10–15.

[4] Александров В.М. О термосиловом взаимодействии деформируемых покрытий тел с учетом износа. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 1995, № 5, с. 70–75.

[5] Александров В.М. Абразивный износ тонкого мягкого покрытия при нелинейном законе трения с учетом тепловыделения. *Известия вузов Сев.-Кавказ. регион. Техн. науки*, 2001, Спец. вып., с. 11–13.

[6] Александров В.М. Контактная задача для тел с покрытиями с учетом нелинейного трения, износа и тепловыделения от трения. *Известия РАН. МТТ*, 2003, № 4, с. 128–135.

[7] Черепанов Г.П. *Механика хрупкого разрушения*. Москва, Наука, 1974, 640 с.

[8] Хрущов М.М., Бабичев М.А. *Абразивное изнашивание*. Москва, Наука, 1970, 251 с.

[9] Подстригач Я.С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя. *Инженерно-физический журнал*, 1963, т. 6, № 10, с. 129–136.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Губарева Е.А. Определение контактного давления в задаче о взаимодействии тел с покрытиями при износе, тепловыделении и учете зависимости коэффициента трения от температуры. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/845.html

Губарева Елена Александровна родилась в 1982 г., окончила МГУ им. М.В. Ломоносова в 2004 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 8 научных работ в области механике контактных взаимодействий. e-mail: gubareva_ea@pochta.ru