

**Аппроксимационная зависимость  
для расчета степени усиления интенсивности  
конвективного теплообмена и трения  
за счет учета эффекта завихренности  
в окрестности критической точки сферы  
в гиперзвуковом потоке**

© М.А. Пугач<sup>1</sup>, В.В. Горский<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт

(государственный университет), Москва, 117303, Россия

<sup>2</sup>ОАО «ВПК «НПО машиностроения», Московская область,  
г. Реутов, 143966, Россия

*Исследовано усиление интенсивности конвективного теплообмена и трения в окрестности критической точки сферы за счет эффекта завихренности при разных значениях числа Маха в набегающем потоке, числа Рейнольдса и энтальпийного фактора. Приведены аппроксимационные формулы для расчета степени усиления интенсивности конвективного теплообмена и трения за счет эффекта завихренности, построенные на базе результатов численного решения автомодельных уравнений ламинарного пограничного слоя (ПС).*

**Ключевые слова:** аппроксимационная зависимость, конвективный теплообмен, эффект завихренности, критическая точка, энтальпийный фактор, автомодельные уравнения.

**Введение.** На затупленных телах при обтекании их потоком возникает один из элементов вязко-невязкого взаимодействия – эффект завихренности невязкого течения газа.

Цель данной работы – исследование влияния эффекта завихренности на коэффициент теплообмена и коэффициент трения и выявление аппроксимационной зависимости этого явления от определяющих параметров.

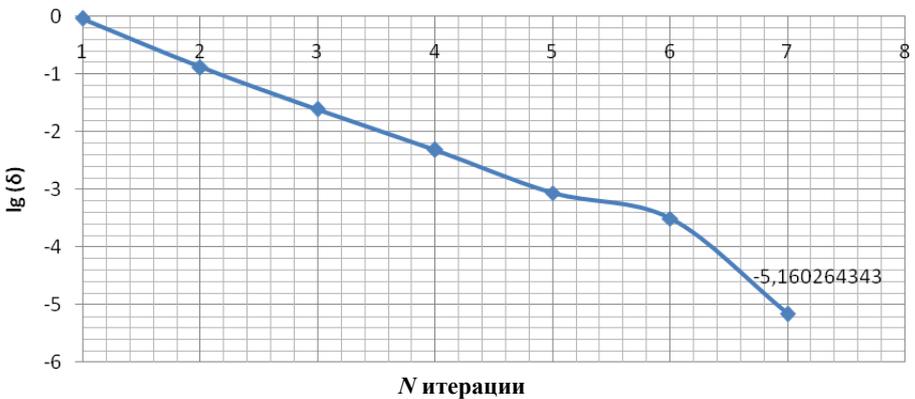
**Методика расчета.** При расчете использовалась криволинейная система координат  $(s, y)$ , где ось  $s$  направлена вдоль поверхности тела, а ось  $y$  – перпендикулярно ей.

Пограничный слой рассматривается в приближении термохимического равновесия. При этом:

- уравнение сохранения энергии записывается через полную энтальпию;
- расчет многокомпонентной диффузии проводится в рамках системы уравнений Стефана – Максвелла;
- расчет концентраций химических элементов в пограничном слое выполняется в рамках метода, предложенного в работе [1];

- сходимость итерационного процесса между расчетом диффузионного тепломассопереноса и уравнением сохранения энергии обеспечивается в рамках метода, изложенного в работе [2];
- расчет переносных свойств газовой смеси проводится по методу Гиршфельдера [3];
- расчет констант межмолекулярного взаимодействия компонент газовой смеси, образованной в общем случае из химических элементов O, N, выполняется по методу работы [4], основанному на анализе современных расчетных данных по вязкости воздуха [5];
- перенесение результатов невязкого газодинамического расчета в расчет конвективного теплообмена проводится с использованием метода сплайновой аппроксимации [6].

Эффект завихренности учитывается в соответствии с методом среднемассовых величин В.В. Лунева [7], в котором в качестве граничных условий используются параметры невязкого течения, осредненные по расходу газа через пограничный слой. Так как толщина этого слоя зависит от граничных условий, то задача решается итерационно. Типичный характер сходимости наблюдаемого при этом итерационного процесса показан на рис. 1, учитывая что  $M = 25$  (число Маха в набегающем газовом потоке);  $Re = 1109$  ( $\rho_\infty v_\infty R_{Sph} / \mu_\infty$  – число Рейнольдса);  $H_f = 0,2$  ( $h_w / h_{00}$  – энтальпийный фактор);  $\rho_\infty$ ,  $v_\infty$ ,  $\mu_\infty$ ,  $h_{00}$  – плотность, скорость, коэффициент динамической вязкости и энтальпия торможения набегающего газового потока соответственно;  $r_{Sph}$  – радиус сферы;  $h_w$  – энтальпия газа при температуре стенки.



**Рис. 1.** Зависимость относительной погрешности расчета конвективного теплового потока от номера итерации

**Расчетные соотношения.** В качестве значения статической энтальпии идеального газа на условной внешней границе пограничного слоя при текущем значении координаты  $s$  (вдоль поверхности тела) используется ее среднемассовая величина вида

$$h_{mm}(\text{exp}) = \frac{1}{\text{exp}} \int_0^{\text{exp}} h_{id}(\text{exp}') d\text{exp}', \quad (1)$$

а среднемассовое значение скорости идеального газа рассчитывается с использованием уравнения Бернулли:

$$\frac{1}{2} u_{mm}^2(\text{exp}) = h_{00} - h_{mm}(\text{exp}), \quad (2)$$

где  $h_{00}$  – энтальпия торможения набегающего газового потока, Дж/кг;  $h_{id}$  – статическая энтальпия идеального газа;  $\text{exp}$  – массовый расход реального газа через пограничный слой, кг/с, рассчитываемый по формуле

$$\text{exp} = 2\pi r \int_0^{y_e} \rho u dy = 2\pi r u_{mm} \int_0^{\eta_e} \rho \frac{1}{\eta_y} f_\eta d\eta = 2\pi f_e \sqrt{2\xi}, \quad (3)$$

так как  $\eta_y = \rho r u_{mm} / \sqrt{2\xi}$ .

Здесь  $\eta$  и  $\xi$  – переменные Лиза – Дородницына;  $y_e$ ,  $\eta_e$ ,  $f_e$  – значения координат  $y$ ,  $\eta$  и безразмерной функции тока  $f$  на внешней границе пограничного слоя (ниже будем принимать, что на этой границе  $f_\eta = 0,995$ ).

В окрестности «критической точки» (где поток полностью тормозится)

- вместо среднемассовой скорости используется ее производная по координате  $s$ , сохраняющая в этой окрестности постоянное значение;

- $r \approx s$ ;
- связь между координатами  $\xi$  и  $s$  имеет вид

$$\xi(s) = \int_0^s \rho_{mm}(s') \mu_{mm}(s') u_{mm}(s') r^2(s') ds' \approx \rho_{mm}(0) \mu_{mm}(0) u_{mm}(0) \frac{s^4}{4}. \quad (4)$$

Здесь  $\rho_{mm}$  и  $\mu_{mm}$  – значения плотности и коэффициента динамической вязкости газа, соответствующие среднемассовой энтальпии  $h_{mm}$ .

Подставляя это выражение в (3), получим, что в этой окрестности

$$\text{exp} = \pi f_e s^2 \sqrt{2\rho_{mm}(0) \mu_{mm}(0) u_{mm,s}(0)}.$$

Очевидно, что при стремлении координаты  $s$  к нулю

$$\begin{aligned} \exp \rightarrow 0, \quad \exp_s \rightarrow 0, \quad \exp_{ss} \rightarrow 2\pi f_e \sqrt{2\rho_{mm}(0)\mu_{mm}(0)u_{mm,s}(0)}, \\ h_{mm} \rightarrow h_{00}. \end{aligned} \quad (5)$$

Дважды дифференцируя уравнение (2) по  $s$ , получим однозначную связь между производными среднemasсовой скорости и среднemasсовой статической энтальпии вида

$$u_{mm,s} = \sqrt{-h_{mm,ss}}. \quad (6)$$

Известно, что в окрестности критической линии тока в ударном слое можно пренебречь изменением эффективного показателя адиабаты (т. е. здесь можно рассматривать течение квазисовершенного газа с эффективным показателем адиабаты  $\gamma$ , равным его значению за прямой ударной волной).

В этом случае на линиях тока, одна из которых проходит вдоль стенки и характеризуется нулевым расходом газа, а вторая – расходом газа  $\exp'$ , справедливы уравнения адиабатического течения вида

$$h_{id,w}(s) = h_{id,wa}(0) \left[ p_w(s) / p_{wa}(0) \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}; \quad (7)$$

$$h_{id}(\exp') = h_{id,wa}(\exp') \left[ p_w(s) / p_{wa}(\exp') \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (8)$$

Здесь  $h_{id,wa}$  – статическая энтальпия идеального газа на «стенке», а индекс  $wa$  относится к ударной волне.

Тогда, разделив (8) на (7), получим

$$h_{id}(\exp') = h_{id,w}(s) \left[ h_{id,wa}(\exp') / h_{id,wa}(0) \right] \left[ p_{wa}(0) / p_{wa}(\exp') \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Как следствие для расчета среднemasсовой статической энтальпии газа в окрестности «критической точки» тела будет формула вида

$$h_{mm}(\exp) = h_{id,w}(s) Wh(\exp), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} Wh(\exp) = \\ = \frac{1}{\exp} \int_0^{\exp} \left[ h_{id,wa}(\exp') / h_{id,wa}(0) \right] \left[ p_{wa}(0) / p_{wa}(\exp') \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} d\exp'. \end{aligned} \quad (10)$$

Для функции  $Wh(\exp)$  ниже будем использовать термин «функция завихренности».

Очевидно, что при стремлении расхода газа через пограничный слой к нулю

$$Wh \rightarrow 1. \quad (11)$$

Используя далее для расчета статической энтальпии идеального газа на «стенке», соответствующего текущему значению координаты  $s$ , уравнение адиабаты, записанного в форме

$$\frac{h_{id,w}(s)}{h_{00}} = \left[ \frac{p_w(s)}{p_0} \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad (12)$$

и дважды дифференцируя (9) по координате  $s$ , получим

$$\begin{aligned} h_{mm,ss} = h_{00} \left[ \frac{p_0}{p_w(s)} \right]^{1/\gamma} & \left\{ Wh \frac{\gamma-1}{\gamma} \left[ \frac{p_{w,ss}(s)}{p_0} - \frac{p_0}{\gamma p_w(s)} \left( \frac{p_{w,s}(s)}{p_0} \right)^2 \right] + \right. \\ & + \frac{2\gamma-1}{\gamma} \frac{p_{w,s}(s)}{p_0} Wh_{\text{exp}} \exp_s(s) + \\ & \left. + \frac{p_0}{p_w(s)} \left[ Wh_{\text{expexp}} \exp_s^2(s) + Wh_{\text{exp}} \exp_{ss}(s) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Под  $p_0$  здесь понимается давление в «критической точке» тела, а индекс  $\text{exp}$  означает производную по расходу газа через пограничный слой.

Как следует из (3) и (11), в «критической точке» затупленного тела  $Wh = 1$  и  $\text{exp}_s = 0$ . Кроме того,  $p_w = p_0$  и  $p_{w,s} = 0$ , а  $\text{exp}_{ss}$  рассчитывается по одной из формул (5). Вследствие этого соотношение (10) принимает вид

$$h_{mm,ss} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{h_{00}}{p_0} p_{w,ss} + h_{00} Wh_{\text{exp}} \text{exp}_{ss}.$$

Если воспользоваться уравнением состояния и уравнением Бернулли для окрестности «критической точки» тела в виде

$$p_0 = \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho_{id,0} h_{00}, \quad \rho_{id,0} u_{id,w} u_{id,w,s} = -p_{w,s}$$

и продифференцировать последнее из них в предположении постоянства в этой окрестности производной  $u_{id,w,s}$ , то получим следующую

окончательную формулу для расчета  $h_{mm,ss}$  в «критической точке» затупленного тела:

$$h_{mm,ss} = -u_{id,w,s}^2 + h_{00}Wh_{exp}exp_{ss}. \quad (14)$$

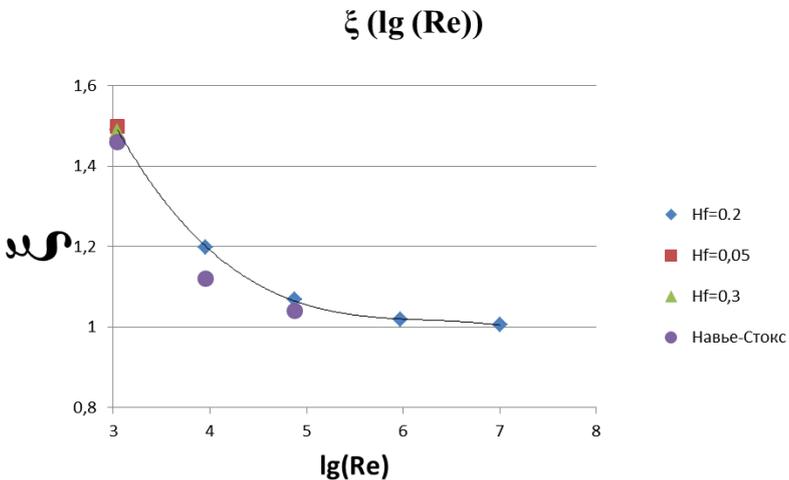
В свою очередь с учетом (14) формула (6) в этой точке примет вид

$$u_{mm,s} = \sqrt{u_{id,w,s}^2 - h_{00}Wh_{exp}exp_{ss}}. \quad (15)$$

Выписанных соотношений достаточно для учета усиления теплообмена, обусловленного переменностью скорости течения идеального газа поперек пограничного слоя, в рамках численного решения уравнений пограничного слоя. Это усиление теплообмена получило в литературе название «эффект завихренности».

**Результаты исследований.** Ниже приведены результаты исследований, отражающие влияние эффекта завихренности на интенсивность конвективного теплообмена и трения, которые получены в широком диапазоне чисел Рейнольдса ( $Re = 10^3 \dots 10^7$ ), Маха ( $M = 6 \dots 25$ ) и энтальпийного фактора ( $H_f = 0,05 \dots 0,3$ ).

Результаты расчета показали, что существенное влияние эффект завихренности на коэффициенты теплообмена и трения оказывает при больших числах Маха и маленьких числах Рейнольдса, в то же время влияние энтальпийного фактора несущественно. Пример результатов расчета показан на рис. 2, где  $\xi$  – степень увеличения удельного теплового потока за счет эффекта завихренности.



**Рис. 2.** Зависимость степени увеличения удельного теплового потока за счет эффекта завихренности от числа Рейнольдса при  $M = 25$

На рис. 2 также видны результаты аналогичного расчета, приведенные в [8] и полученные в рамках уравнений Навье – Стокса.

Проанализировав результаты расчета, можно сделать вывод, что влияние эффекта завихренности на градиент трения на стенке такое же, как и на конвективный теплообмен. При этом зависимость  $\xi(\text{Re}, M)$  может быть аппроксимирована с погрешностью не выше 0,1 % формулой вида

$$\xi = \sum_{i=1}^4 \varphi_{4-i}(M) \lg^{4-i}(\text{Re}).$$

Здесь функции числа Маха рассчитываются по следующим формулам:

$$\varphi_0 = 0,156M + 0,437,$$

$$\varphi_1 = -0,073M + 0,261,$$

$$\varphi_2 = 0,011M - 0,041,$$

$$\varphi_3 = -0,0005M + 0,02.$$

**Выводы.** Полученные результаты подтвердили, что эффект завихренности может оказывать существенное влияние на интенсивность теплообмена и трения (в рассмотренных условиях он достигает полутора раз) и, таким образом, должен быть учтен при расчете соответствующих режимов обтекания.

Предложены высокоточные простые аппроксимационные зависимости, которые могут успешно применяться на практике.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Горский В.В., Сысенко В.А. Эффективный метод численного интегрирования уравнений, описывающих течение многокомпонентных высокотемпературных газовых смесей, находящихся в состоянии термохимического равновесия. *Журнал вычислительной математики и математической физики РАН*, 2009, т. 49, № 7, с. 1319–1326.
- [2] Горский В.В., Забарко Д.А., Оленичева А.А. Исследование процесса уноса массы углеродного материала в рамках полной термохимической модели его разрушения для случая равновесного протекания химических реакций в пограничном слое. *Теплофизика высоких температур РАН*, 2012, т. 50, № 2, с. 307–312.
- [3] Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. *Молекулярная теория газов и жидкостей*. Москва, Издательство Иностранной литературы, 1961, 928.
- [4] Горский В.В., Федоров С.Н. Об одном подходе к расчету вязкости диссоциированных газовых смесей, образованных из кислорода, азота и углерода. *Инженерно-физический журнал*, 2007, т. 80, № 5, с. 97–101.
- [5] Соколова И.А. Коэффициенты переноса и интегралы столкновений воздуха и его компонент. *Физическая кинетика, аэрофизические исследования*.

Сб. трудов. Новосибирск, Институт теоретической и прикладной механики СО АН СССР, 1974, № 4, с. 39 – 104.

- [6] Горский В.В. Метод сплайновой аппроксимации. *Журнал вычислительной математики и вычислительной физики РАН*, 2007, т. 47, № 6, с. 939 – 943.
- [7] Лунев В.В. Метод среднemasовых величин для пограничного слоя во внешнем потоке с поперечной неоднородностью. *Известия АН СССР, Механика жидкости и газа*, 1967. № 1.
- [8] Землянский Б.А., Лунев В.В., Власов В.И. и др. *Руководство для конструкторов. Конвективный теплообмен изделий РКТ*. Королев, ЦНИИмаш, 2010, 397 с.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Пугач М.А., Горский В.В. Аппроксимационная зависимость для расчета степени усиления интенсивности конвективного теплообмена и трения за счет учета эффекта завихренности в окрестности критической точки сферы в гиперзвуковом потоке. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/838.html>

**Пугач Михаил Александрович** – студент 4-го курса Московского физико-технического института. Область научных интересов: абляционная тепловая защита, высокотемпературный тепломассоперенос, численные методы решения уравнений математической физики. e-mail: [mip-91@mail.ru](mailto:mip-91@mail.ru)

**Горский Валерий Владимирович** – главный научный сотрудник ОАО «ВПК «НПО машиностроения», д-р техн. наук, профессор. Область научных интересов: абляционная тепловая защита, высокотемпературный тепломассоперенос, численные методы решения уравнений математической физики. e-mail: [gorskknat@yandex.ru](mailto:gorskknat@yandex.ru).