

## Методы расчета и исследование первичной хроматической аберрации RGRIN-линз

© А.Л. Сушков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Представлены формулы расчета хроматической аберрации положения градана интегральным и дифференциальным методами. Показано, что математический аппарат интегрального метода можно использовать при определении хроматизма не только граданов с плоскими торцами, но и градана со сферическими торцевыми поверхностями, являющегося при малой толщине градана RGRIN-линзой. Предложен графический способ оценки влияния кривизны торцевых поверхностей, дисперсий градиента и базового стекла на хроматическую аберрацию положения градиентного элемента.*

**Ключевые слова:** *хроматическая аберрация положения, градан, градиентная линза, дифференциальный метод расчета, интегральный метод расчета, хроматизм граданов, RGRIN-линзы.*

Граданы — цилиндрические стержневидные оптические элементы, как правило, с плоскими торцами и убывающим вдоль светового радиуса градана показателем преломления (ПП) по зависимости, близкой к параболической. Приводимые в [1] данные о параметрах граданов свидетельствуют о наличии у некоторых из них достаточно большого осевого хроматизма (до 0,6...0,7 мм).

В градиентной оптической среде дисперсией обладают как ПП базового стекла, так и градиент ПП. Изучение влияния на хроматизм линзового элемента совместного влияния двух дисперсий представляется актуальной задачей при разработке оптической системы, включающей градиентные компоненты.

Цель работы состоит в проведении сравнительного анализа двух методов расчета хроматической аберрации положения граданов, расположенных в воздухе, и исследовании влияния сферизации торцевых поверхностей на минимизацию первичной хроматической аберрации положения.

Радиальное распределение показателя преломления в градане обычно представляют полиномами  $n$  первой или второй степени:

$$\begin{aligned} n(r) &= n_{00} + n_{10}r^2 + n_{20}r^4 + \dots; \\ n^2(r) &= n_{00}^2 \left( 1 - g^2r^2 + h_4g^4r^4 + \dots \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $n_{00}$  — показатель преломления на оси;  $n_{10}$  — градиент показателя преломления, определяющий парааксиальные характеристики града-на,  $\text{мм}^{-2}$ ;  $n_{20}$ ,  $h_4$  — абберационные коэффициенты;  $g$  — константа распределения (КР) градиентной оптической среды,  $\text{мм}^{-1}$ .

Для полинома  $n(r)$  константу распределения обычно обозначают  $t$  и вычисляют по формуле

$$t = \sqrt{\frac{2|n_{10}|}{n_{00}}}. \quad (2)$$

Для обоих типов полиномов (1)  $t = g$ . Первичные монохроматические абберации граданов рассмотрены в работе [2].

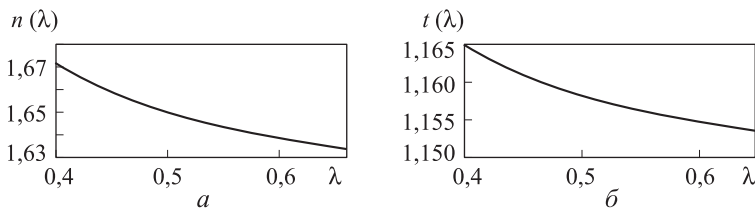
Градан с плоскими поверхностями — линза Вуда — является исходной заготовкой для производства толстых и тонких RGRIN-линз со сферическими поверхностями. Подобные линзовые элементы могут иметь улучшенные абберационные характеристики по сравнению с однородными конструкциями. Дисперсией в GRIN-среде обладают два параметра: показатель преломления базового стекла и градиент ПП, дисперсию которого принято описывать через дисперсию константы распределения среды  $t$ . Хроматические значения этой среды устанавливаются в процессе измерения функции распределения ПП [1].

**Дисперсионные зависимости показателя преломления и константы распределения градиентной среды.** Дисперсионную зависимость показателя преломления  $n(\lambda)$  градиентной среды и константы распределения  $t(\lambda)$  обычно представляют полиномами [1]

$$\begin{aligned} n(\lambda) &= B + \frac{C}{\lambda^2}; \\ t(\lambda) &= K_0 + \frac{K_1}{\lambda^2} + \frac{K_2}{\lambda^4}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $B, C, K_0, K_1, K_2$  — коэффициенты.

На типичных графиках  $n(\lambda)$  и  $t(\lambda)$  с нормальным ходом дисперсии ПП и константы распределения (рис. 1) видно, что показатель преломления и константа распределения убывают с увеличением длины волны света  $\lambda$ .



**Рис. 1.** Нормальные дисперсионные зависимости  $n(\lambda)$  и  $t(\lambda)$  оптической RGRIN-среды

Если (2) продифференцировать по  $\lambda$ , то получим формулу связи дисперсии параметров градиентной среды  $dt$ ,  $dn_{10}$ ,  $dn_{00}$ :

$$dt = -\frac{1}{t} \frac{n_{00}dn_{10} - n_{10}dn_{00}}{n_{00}^2}. \quad (4)$$

Условием хроматической инвариантности константы распределения  $t$  является равенство отношений градиента ПП к показателю ПП и их дисперсий:

$$\frac{n_{10}}{n_{00}} = \frac{dn_{10}}{dn_{00}}. \quad (5)$$

Дисперсия градиента ПП  $dn_{10}$  связана с дисперсией базового ПП  $dn_{00}$  и дисперсией константы распределения  $dt$  зависимостью

$$dn_{10\lambda_1\lambda_2} = -\frac{1}{2}t^2dn_{00} - n_{00}tdt. \quad (6)$$

При расчете параметров реальных оптических сред дифференциалы  $dn_{00}$  и  $dt$  будут заменены конечными разностями  $\Delta n$  и  $\Delta t$ .

Расчет ПП и градиента ПП по формулам (3), (6) позволяет определить коэффициенты дисперсии градиентной среды  $v_{00}$ ,  $v_{10}$ :

$$v_{00} = \frac{n_{00\lambda_0} - 1}{n_{00\lambda_1} - n_{00\lambda_2}}; \quad v_{10} = \frac{n_{10\lambda_0}}{n_{10\lambda_1} - n_{10\lambda_2}}. \quad (7)$$

Для RGRIN-среды формулы углов и высот в системе координат, привязанной к первой поверхности, известны [2] в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{h}_2 = h(z) &= h(0) \cos(tz) - \frac{\alpha(0)}{t} \sin(tz); \\ \bar{\alpha}_2 = \alpha(z) &= \alpha(0) \cos(tz) + h(0)t \sin(tz). \end{aligned} \quad (8)$$

**Интегральный метод расчета хроматической аберрации положения.** Теоретической основой расчета хроматизма интегральным методом является формульный аппарат теории хроматических аберраций градиентных оптических элементов [3, 4]. Исходными данными для вычисления коэффициентов хроматических аберраций положения и увеличения RGRIN-элемента служат функциональные зависимости параксиальных высот  $h(z)$  и углов  $\alpha(z)$ , величины коэффициентов РПП  $n_{00}$ ,  $n_{10}$  и их дисперсии  $dn_{00}$ ,  $dn_{10}$ .

Выражения для коэффициентов хроматических аберраций положения и увеличения в общем случае осесимметричного РПП  $n(x, y, z)$  приведены в работах [3, 4], в которых показано, что величина коэффициента аберраций складывается из двух составляющих, обусловлен-

ных преломлением лучей на поверхности (поверхностный вклад) и прохождением луча через неоднородную среду (вклад переноса):

$$S_{i, \text{xp}} = \bar{S}_{i, k} + \tilde{S}_{i, k}, \quad (9)$$

где  $S_i$  — общий коэффициент хроматической аберрации положения оптической системы;  $\bar{S}_{i, k}$ ,  $\tilde{S}_{i, k}$  — поверхностный вклад и вклад переноса,  $i = \text{I}, \text{II}$ .

Коэффициенты хроматических аберраций положения  $S_{\text{I xp}}$  и увеличения  $S_{\text{II xp}}$  вычисляют по формулам [5]:

$$S_{\text{I xp}} = \sum_{k=1}^p \bar{S}_{\text{I xp}, k} + \sum_{k=1}^{p-1} \tilde{S}_{\text{I xp}, k}; \quad S_{\text{II xp}} = \sum_{k=1}^p \bar{S}_{\text{II xp}, k} + \sum_{k=1}^{p-1} \tilde{S}_{\text{II xp}, k}. \quad (10)$$

В общем случае РПП, заданного зависимостью (1), поверхностные вклады в коэффициенты аберраций имеют вид

$$\bar{S}_{\text{I xp}, k} = \frac{h_k \delta(\alpha_k) \delta\left(\frac{dn_{00, k}}{n_{00, k}}\right)}{\delta\left(\frac{1}{n_{00, k}}\right)}; \quad \bar{S}_{\text{II xp}, k} = \frac{h_k \delta(\beta_k) \delta\left(\frac{dn_{00, k}}{n_{00, k}}\right)}{\delta\left(\frac{1}{n_{00, k}}\right)}. \quad (11)$$

Здесь знак разности  $\delta$  относится к оптической поверхности.

В системе координат  $OXYZ$ , привязанной к первой поверхности линзового элемента, где ось  $OZ$  совпадает с оптической осью, составляющие вклада переноса вычисляют по интегральным формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\text{I xp}, k} &= \Delta(h\alpha(dn_{00})) + \int_0^d [2\bar{h}^2(dn_{10}) + \bar{\alpha}^2(dn_{00})] dz; \\ \tilde{S}_{\text{II xp}, k} &= \Delta(h\beta(dn_{00})) + \int_0^d [2\bar{h} \bar{H}(dn_{10}) + \bar{\alpha} \bar{\beta}(dn_{00})] dz, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $dn_{00} = n_{00, \lambda 1} - n_{00, \lambda 2}$ ; ,  $dn_{10} = n_{10, \lambda 1} - n_{10, \lambda 2}$ .

Функции углов и высот луча в градиентной среде

$$\bar{\alpha} = \alpha(z), \quad \bar{\beta} = \beta(z), \quad \bar{h} = h(z), \quad \bar{H} = H(z).$$

Хроматическую аберрацию положения  $ds'_{\lambda 1, \lambda 2}$  вычисляют по формуле

$$ds'_{\lambda 1, \lambda 2} = \frac{S_{\text{I xp}}}{n_{00, p} \alpha_p^2}, \quad (13)$$

где  $n_{00, p}$ ,  $\alpha_p^2$  — величины ПП и угла  $\alpha$  в пространстве изображений.

Относительный хроматизм увеличения  $\Delta y'_{\lambda_1, \lambda_2} / y'_{\lambda_0}$  рассчитывают по второму хроматическому коэффициенту:

$$\Delta y'_{\lambda_1, \lambda_2} / y'_{\lambda_0} = S_{\text{II xp}} / J,$$

где  $J$  — параксиальный инвариант Лагранжа — Гельмгольца.

Для поверхностного вклада  $\bar{S}_{\text{I xp}}$  в коэффициент хроматической aberrации линзового RGRIN-элемента из (11) получаем выражение

$$S_{\text{I0}} = -\frac{1}{v_{00}} [(\alpha_2 - \alpha_1)h_1 + (\alpha_3 - \bar{\alpha}_2)h_2]. \quad (14)$$

Интегралы (12) берем аналитически подстановкой функций (8). Полученное алгебраическое выражение для коэффициента хроматической aberrации положения  $S_{\text{I xp}}$  имеет вид

$$\begin{aligned} S_{\text{I xp}} = & -\frac{1}{v_{00}} [(\alpha_2 - \alpha_1)h_1 + (\alpha_3 - \bar{\alpha}_2)h_2] + \\ & + dn_{10} \left[ h_1^2 l + \frac{\alpha_2^2 l}{t^2} + \sin(2tl) \left( \frac{h_1^2}{2t} - \frac{\alpha_2^2}{2t^3} \right) - 2 \frac{\alpha_2 h_1}{t^2} \sin^2(tl) \right] + \\ & + dn_{00} \left[ \frac{1}{2} \alpha_2^2 l + \frac{1}{2} h_1^2 t^2 l + \sin(2tl) \left( \frac{\alpha_2^2}{4t} - \frac{1}{4} h_1^2 t \right) + h_1 \alpha_2 \sin^2(tl) \right] + \\ & + dn_{00} \left[ h_1 \cos(tl) - \frac{\alpha_2}{t} \sin(tl) (\alpha_2 \cos(tl) + h_1 t \sin(tl)) - h_1 \alpha_2 \right], \quad (15) \end{aligned}$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_2, \alpha_3$  — углы луча с оптической осью в пространстве предметов, линзе (на входе и выходе из градиентной среды) и пространстве изображений соответственно;  $l$  — длина градана;  $h_1, h_2$  — высоты луча на первой и второй поверхностях градана.

Величины углов  $\alpha_2$  на входе и выходе из градиентной среды позволяют рассчитать кривизны первой и второй поверхностей линзы по известной из теории aberrаций однородных сред формуле

$$r_k = \frac{\Delta n_k}{\Delta(\alpha n)_k} h_k.$$

Анализ выражения (15) на минимум функции  $S_{\text{I xp}}(\alpha_2)$  по аргументу  $\alpha_2$  можно провести путем построения графиков входящих в него функций, являющихся множителями дисперсий градиента ПП и дисперсии базового стекла с применением пакета прикладных программ MATHCAD:

$$f_0(\alpha_2) = -\frac{1}{v_{00}} [A\alpha_2^2 + B\alpha_2 + C], \quad (16)$$

где  $A = \frac{\sin(2tl)}{2t}$ ;  $B = 2h_1 \sin^2(tl) - \frac{\alpha_3}{t} \sin(tl)$ ;

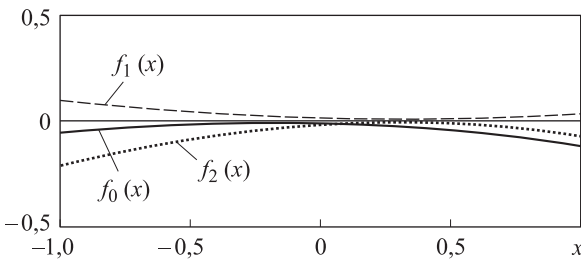
$$C = h_1 \left[ -\alpha_1 + \alpha_3 \cos(tl) - \frac{h_1 t}{2} \sin(2tl) \right];$$

$$f_1(\alpha_2) = dn_{10} \left[ h_1^2 l + \frac{\alpha_2^2}{t^2} l + \sin(2tl) \left( \frac{h_1^2}{2t} - \frac{\alpha_2^2}{2t^3} \right) - \frac{2\alpha_2 h_1}{t^2} \sin^2(tl) \right]; \quad (17)$$

$$f_2(\alpha_2) = dn_{00} \left[ \frac{1}{2} \alpha_2^2 l + \frac{1}{2} h_1^2 t^2 l + \sin(2tl) \left( \frac{\alpha_2^2}{4t} - \frac{1}{4} h_1^2 t \right) + h_1 \alpha_2 \sin^2(tl) - \alpha_2^2 \frac{1}{2t} \sin(2tl) + \alpha_2 h_1 (1 - 2 \sin^2(tl)) + \frac{1}{2} h_1^2 t \sin(2tl) - h_1 \alpha_2 \right]. \quad (18)$$

**Пример.** Для элемента selfoc SLW-4,0 с характеристиками  $n_{00} = 1,64357$ ;  $g = 0,14814 \text{ мм}^{-1}$ , диаметром 4 мм в спектральном диапазоне  $\lambda_1 - \lambda_2 = 0,4800 \dots 0,6438 \text{ мкм}$  имеем  $\Delta n_{00} = 0,01976$ ;  $\Delta t = 1,06733 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^{-2}$ ;  $dn_{10} = -4,76694 \cdot 10^{-4} \text{ мм}^{-2}$ . Толщина (длина) элемента  $l = 8,0 \text{ мм}$ , линейное увеличение  $\beta = -0,532$  при расстоянии до предмета  $s = -10 \text{ мм}$ .

Графики функций  $f_0(\alpha_2)$ ,  $f_1(\alpha_2)$ ,  $f_2(\alpha_2)$  приведены на рис. 2 (для удобства построения графиков в пакете MathCAD применен переход в обозначениях:  $\alpha_2 = x$ ). Согласно анализу графиков  $f_0(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , элемент selfoc SLW-4.0 имеет минимальные значения функций  $f_0(\alpha_2)$ ,  $f_1(\alpha_2)$ ,  $f_2(\alpha_2)$  в диапазоне значений угла  $\alpha_2 0 \dots \sim 0,2$ . На рис. 2 видно, что минимизация хроматизма для элемента selfoc SLW-4.0 при сохранении линейного увеличения линзового элемента возможна за счет придания кривизны входной и выходной поверхностям элемента.



**Рис. 2.** Графики функций  $f_0(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$

**Дифференциальный метод расчета хроматизма положения.** Этот метод расчета хроматической aberrации положения града основан на дифференцировании формулы для расчета величины заднего отрезка по длине волны света  $\lambda$ :

$$s' = \frac{s_1 - f_0' \operatorname{tg}(td)}{\frac{s_1}{f_0'} \operatorname{tg}(td)}, \quad (19)$$

где  $f_0' = \frac{1}{n_{00}t}$ .

В результате дифференцирования (19) по  $\lambda$  получено выражение

$$ds_{xp} = \frac{A1 + B1 + C1}{(1 + s_1 n_{00}t \operatorname{tg}(tl))^2}, \quad (20)$$

где  $A1 = -\frac{dt}{\cos(tl)^2} \left( \frac{1}{n_{00}t} + s_1^2 n_{00}tl \right)$ ;

$$B1 = (dn_{00} t + dt n_{00}) \left[ \frac{\operatorname{tg}(tl)}{(n_{00}t)^2} + \frac{s_1}{n_{00}t} \operatorname{tg}^2(tl) - s_1^2 \operatorname{tg}(tl) \right];$$

$$C1 = s_1 \operatorname{tg}^2(tl) \left( \frac{dn_{00}}{n_{00}} + \frac{dt}{t} \right).$$

Сравнительные расчеты хроматизма положения элемента selfoc SLW-4.0 с плоскими торцами интегральным (формулы (11), (12)) и дифференциальным (формула (20)) методами, а также с помощью программы OPAL при расстоянии от первой поверхности selfoc до предмета  $s_1 = -10$  мм дали практически одинаковые результаты  $ds'_{\lambda_1, \lambda_2} = -0,2$  мм.

Минимизация хроматической aberrации положения линзового элемента с использованием пакета прикладных программ OPAL при сохранении значения линейного увеличения  $\beta_0 = -0,532$  изменила конфигурацию поверхностей линзы:  $r_1 = 5,142$ ;  $r_2 = 3,835$ ;  $d = 8$  мм. Хроматизм положения уменьшился до величины  $ds'_{\lambda_1, \lambda_2} = -0,179$  мм, что в процентном выражении составляет 10,75 %. Угол осевого луча на входе в градиентную среду имеет значение  $\alpha_2 = 0,0283$ , что согласуется с значением угла  $\alpha_2$ , определяющим минимальное значение коэффициента хроматической aberrации положения (см. рис. 2).

**Заключение.** Рассмотренные методы расчета первичного осевого хроматизма дополняют один другого при анализе aberrаций града с плоскими или сферическими поверхностями. Исследование

дисперсионных функций базового ПП и градиента ПП по параметру  $\alpha_2$  показали их полезность при анализе осевого хроматизма градана, а также при определении влияния кривизны поверхностей линзы на минимум хроматической аберрации положения при заданных параметрах градиентной оптической среды. Проведенное аналитическое исследование подтвердило перспективность применения численных методов оптимизации хроматизма при использовании в качестве параметров кривизн поверхностей линзового элемента.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] URL: [http:// www.gofoton.com](http://www.gofoton.com) (дата доступа 12.02.2013)
- [2] Сушков А.Л. *Монохроматические аберрации граданов как базовых элементов жестких эндоскопов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, 44 с.
- [3] Sands P.J. Inhomogeneous Lenses, II. Chromatic Paraxial Aberrations. *JOSA*, 1971, vol. 61, pp.777–783.
- [4] Поспехов В.Г., Ровенская Т.С., Сушков А.Л. Параксиальные характеристики цилиндрических граданов. *Известия вузов. Сер. Приборостроение*, 1988, № 12, с. 57–69.
- [5] Ровенская Т.С. *Методы проектирования оптических систем с градиентными элементами*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994, 39 с.

Статья поступила в редакцию 24.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сушков А.Л. Методы расчета и исследование первичной хроматической аберрации RGRIN-линз. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7.

URL: <http://engjournal.ru/catalog/pribor/optica/827.html>

**Сушков Александр Леонидович** родился в 1950 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1973 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Оптико-электронные приборы научных исследований» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор шести публикаций. Область научных интересов: аналитическое изучение свойств линзовых элементов с неоднородным показателем преломления.