УДК 519.248

Перколяция в конечной полосе для гиббсовских решеточных моделей

© П.В. Храпов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

С помощью кластерных разложений решается задача о перколяции случайного поля в конечной полосе для решеточной перколяционной модели и ферромагнитной модели Изинга. Вероятность непротекания с верхнего основания цилиндра на нижнее по случайным дефектам представлена в экспоненциальной форме с аналитической функцией в показателе. Описана кластерная структура показателя экспоненты, найдены в явном виде первые несколько членов степенного разложения показателя по перколяционному параметру. Доказаны предельные теоремы пуассоновского типа. Показано, что при некоторых воздействиях мультипликативного характера на форму цилиндра и перколяционный параметр распределение вероятностей количества дефектных контуров сходится к пуассоновскому распределению. И обратно, для любого пуассоновского параметра λ при фиксированном перколяционном параметре существует последовательность объемов такая, в которой распределение количества контуров стремится к пуассоновскому распределению с этим параметром λ. Показано, что расчеты без изменений переносятся на значительно более широкий класс решеточных моделей, для которых возможны кластерные разложения.

Ключевые слова: *перколяция, решеточная модель, модель Изинга, гиббсовское поле, контур протекания, предельные теоремы пуассоновского типа.*

Перколяция привлекает к себе внимание благодаря возможным приложениям в области наноструктурных материалов. Перколяционную природу имеют процессы прохождения жидкостей через пористую неподвижную фазу, распределения жидкой фазы по межзеренным границам поликристалла, образования полимерных гелей, а также ферромагнетизм и электропроводность примесных полупроводников. Перколяция возникает при некоторой критической концентрации наполнителя или пор (пороге перколяции) в результате образования от одной стороны образца материала до противоположной непрерывной сетки (канала) из частиц (кластеров) наполнителя [1, 2].

В работе рассматривается задача о протекании случайного поля в конечной полосе, которая решается с помощью кластерных разложений. Пусть $\Lambda_{S,h} \subset \mathbb{Z}^{\nu}$ — цилиндр (все полученные в работе результаты без изменений переносятся на регулярные решетки произвольного вида),

$$\Lambda_{S,h} = \{t = (y^1, y^2, ..., y^\nu) \mid (y^1, y^2, ..., y^{\nu-1}) \in S, y^\nu \in [1, h]\},$$

где h — фиксированное число; S — конечное множество точек решетки $\mathbb{Z}^{\nu-1}$.

В $\Lambda_{S,h}$ определим случайное поле со значениями в $X = \{+1,-1\}$ и вероятностной мерой μ. Множество точек $\Gamma\subset\Lambda_{S,h}$ назовем односвязным, если для любых t', $t''\in\Gamma$ существует последовательность точек $t_i\in\Gamma$, таких, что

$$\rho(t_i, t_{i+1}) = \left|t_i - t_{i+1}\right| = 1,\ i = 1, ..., m-1,\ t_1 = t',\ t_m = t''.$$

Назовем дефектным контуром одонсвязное множество Γ такое, что $x_t = -1$ для $t\in\Gamma$ и $x_t = 1$ для всех $t \in \partial\Gamma$, $\partial_d\Gamma = \{t \in \Lambda_{S,h} \mid t \notin \Gamma,$ $\exists t_1 \in \Gamma : \rho(t, t_1) < d\}$, $\partial_{1,1}\Gamma \equiv \partial\Gamma$, $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$.

Скажем, что дефектный контур является контуром протекания конфигурации, если в нем есть точка $t_1 = (y_1, h)$ верхнего основания и $t_2 = (y_2, 1)$ нижнего основания цилиндра $\Lambda_{S,h}$. Обозначим через R множество всех контуров протекания, через $H(S, h, \mu)$ — вероятность непротекания в $\Lambda_{S,h}$ (т.е. вероятность того, что в конфигурации случайного поля нет контуров протекания) и назовем ее надежностью объема $\Lambda_{S,h}$.

Введем независимое поле, для которого распределение является произведением независимых мер ν^0 в точках $t\in\Lambda_{S,h}$, $\nu_0 = (\{x_t = -1\}) = p$, $0 < p < 1$. В этом случае доказана следующая теорема.

Теорема 1. При достаточно малых $p < p_0$, фиксированном h и любом S верно равенство:

$$H(S, h, p) = \exp\{-\left|S\right| \tilde{p}^h (1 + \tilde{p}\psi(\tilde{p}, S, h))\}, \left|\psi(\tilde{p}, S, h)\right| < K_\nu^{h+1}, \qquad (1)$$

где $\tilde{p} = p/q$, $q = 1 - p$, $\psi(\tilde{p}, S, h)$ — аналитическая функция в круге радиуса $\tilde{p}_0 = p_0/q_0$; K_ν — константа, зависящая лишь от размерности ν.

Рассмотрим теперь случайное гиббсовское поле, определяемое в $\Lambda_{S,h}$ ν-мерной моделью Изинга с гамильтонианом

$$H_\Lambda = -\beta \sum \sigma_t \sigma_{t'}\ t, t' \in \Lambda, \left|t - t'\right| = 1, \sigma_t, \sigma_{t'} \in \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\} = X$$

в низкотемпературной области (большие β) и плюсовыми граничными условиями. Определим дефектный контур, контур протекания и вероятность непротекания, как и прежде.

Теорема 2. При достаточно больших $\beta > \beta_0$

$$H(S,h,\beta) = \exp\{-|S|(\beta^*)^{2\nu h+2-2h}[1+(\beta^*)^{2(\nu-1)}\varphi(S,h,\beta^*)]\},$$

$$|\varphi(S,h,\beta^*)| < Q_\nu^{h+1}, \qquad (2)$$

где $\beta^* = e^{-2\beta}$, $\varphi(S, h, \beta^*)$ — аналитическая функция при $|\beta^*| < \beta_0^*$; Q_v — константа, зависящая лишь от размерности v.

В формулах (1–2) легко вычислить следующие коэффициенты при $\tilde{p}^{h+1}$, $(\beta^*)2^{(v-1)h+2v}$ и т. д., но они уже будут зависеть от вида основания S.

Пусть, например, $\Lambda = L \times h$, $L \subset \mathbb{Z}^1$, тогда

$$\ln H(S,h,p) = -L\tilde{p}^h - [4(L-1)(h-1)-(3Lh-2h)]\tilde{p}^{h+1} + LO(\tilde{p}^{h+2})$$

в случае независимого поля и

$$\ln H(S,h,\beta) = -L(\beta^*)^{2h+2} - 4(L-1)(h-1)(\beta^*)^{2h+4} + LO((\beta^*)^{2h+6})$$

в случае модели Изинга.

Рассмотрим теперь $v = 3$ (для простоты) и последовательность объемов $\Lambda_n = L_n \times M_n \times h$ такую, что при $n \to \infty$ Λ_n заполняет бесконечную полоску $\mathbb{Z}^2 \times h$. Определим в каждом объеме случайные поля — независимые с параметром p_n и гиббсовские (изинговские) с параметром β_n — и через ζ_n обозначим число контуров протекания в конфигурации Λ_n. Предположим теперь, что предельный переход такой, что $M_n L_n p_n^h \to \lambda$ (в случае независимого поля) и $M_n L_n (\beta^*)_n^{4h+2} \to \lambda$ (в случае гиббсовского поля).

Тогда верны следующие теоремы.

Теорема 3. Распределение вероятностей $P_n(\zeta_n = l)$ сходится к пуассоновскому распределению:

$$P_n(\zeta_n = l) \to \frac{e^{-\lambda}\lambda^l}{l!}.$$

Теорема 4. Пусть λ — произвольное положительное число. Тогда для рассматриваемых моделей существует при фиксированном $p < p_0$ (соответственно $\beta^* < \beta_0{}^*$) последовательность объемов $\Lambda_n = S_n \times h_n \subset \mathbb{Z}^\nu$, $|S_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, такая, что

$$P_n(\zeta_n = l) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{e^{-\lambda}\lambda^l}{l!}.$$

Доказательство теоремы 1. Вероятность непротекания $H(S,h,p)$ можно представить в следующем виде [3–5]:

$$H(S,h,p) = Z_1(S,h,p) / Z_2(S,h,p), \tag{3}$$

где

$$Z_j(S,h,p) = \sum k_{\Gamma_1}^j ... k_{\Gamma_m}^j, \ j = 1,2. \tag{4}$$

Суммирование идет по всем допустимым наборам контуров, при этом $k_\Gamma^2 = p^{|\Gamma|} q^{-|\Gamma|}$; $k_\Gamma^1 = 0$, если $\Gamma \in R$, и $k_\Gamma^1 = k_\Gamma^2$, если $\Gamma \notin R$.

При исследовании равенства (4) воспользуемся теорией кластерных разложений [6, 7]. Поскольку эта теория понадобится и при доказательстве аналогичной теоремы для модели Изинга, изложим нужные нам факты в общем виде.

Пусть T — счетное множество с метрикой $\rho(x, y)$, причем для некоторого $d > 0$ мощность d-окрестности любой точки $t \in T$ не превосходит v. Назовем разбиение $\gamma = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ множества $\Lambda \subset T$ допустимым, если для любых двух различных его блоков Γ_i, Γ_j имеет место неравенство $\rho(\Gamma_i, \Gamma_j) \geq d$. Поставим в соответствие любому конечному $A \subset T$ точку $t_A \in A$. Введем ориентированный граф [7], множеством вершин которого является множество $F = F(T)$ всех конечных подмножеств T. Из вершины $A \in F$ выходит ребро в вершину $B \in F$ тогда и только тогда, когда $B = A - \{t_A\}$. Вершина B лежит ниже вершины A, если существует путь по графу F, начинающийся в A и кончающийся в B. Самой нижней вершиной дерева F является $\varnothing$. Рассмотрим упорядоченные наборы $\gamma = \{B_1, A_1; \dots; B_i, A_i\}$, $l = l(\gamma) \geq 1$ непустых подмножеств, удовлетворяющие следующим условиям.

1. Для любых $i = 2, \dots, l$ либо $B_i = C_i$, либо B_i лежит ниже C_i, равного $B_{i-1} \cup A_{i-1}, m_i = \left|C_i - B_i\right|, \overline{A}_{i-1} = A_{i-1} \cup \partial A_{i-1}, \partial A_i = \{t \in T : t \notin A_i, \rho(t, A_i) < d\}$.

2. $A_i \cap B_i = \{t_{B_i}\}$, $\left|A_i\right| \geq 1$, $i = 1, \dots, l$.

Пусть для каждого набора контуров $\gamma = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{l(\gamma)}\}$, $k_\gamma = \prod_{i=1}^{l(\gamma)} k_{\Gamma_i}$.

Лемма 1. При достаточно малых $p < p_0$

$$Z_j(S,h,p)=\exp\{\sum_{\Gamma\subset\Lambda}\left|\Gamma\right|k_\Gamma^j(\frac{1}{\left|\Gamma\right|}+\sum_\gamma^{(\Lambda,\bar\Gamma)}\frac{(-1)^{l(\gamma)}}{\left|\Gamma\right|+\left|\gamma\right|}k_\gamma^j)\},$$

где $\Lambda=S\times h$, вторая сумма берется по всем γ, удовлетворяющим условиям, аналогичным условиям 1–2 § 1.4 в [6], таким, что либо $B_1=\bar\Gamma$, либо B_1 лежит ниже $\bar\Gamma$ [6–7].

Это полный аналог кластерного разложения логарифма статистической суммы в [7] для нашего ансамбля множеств. Из леммы 1

$$H(S,h,p)=\exp\{-\sum_{\Gamma\subset\Lambda}k_\Gamma^2-\sum_{\Gamma\subset\Lambda}\ \sum_{\gamma\subset\Lambda}^{(\Lambda,\bar\Gamma)}\frac{\left|\Gamma\right|(-1)^{l(\gamma)}}{\left|\Gamma\right|+\left|\gamma\right|}k_\Gamma^2k_\gamma^2\}.$$

Суммирование в экспоненте идет по всем наборам Γ и (Γ,γ), в каждом из которых есть по крайней мере один контур протекания $\Gamma'\in R$. Отсюда легко следует доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Проведем единичный гиперкуб через середину отрезка, соединяющего соседние спины $\sigma_t,\sigma_{t'}$, $\left|t-t'\right|=1,\ t,t'\in\bar\Lambda,$ перпендикулярно этому отрезку, если спины имеют разные знаки. Множество полученных гиперкубов можно однозначно разбить в объединение связных непересекающихся (пересечение по кубам размерности меньше v не берем во внимание) компонент, являющихся связными замкнутыми без самопересечений гиперповерхностями, — будем называть их дуальными контурами, и разделяющих «моря» плюсов и «острова» минусов так, что «острова» минусов образуют односвязные множества. Дуальный контур, соединяющий оба основания $\Lambda_{S,\,h}$, назовем дуальным контуром протекания, и множество таких контуров обозначим, как и прежде, через R. Легко видеть, что в терминах дуальной контурной модели $H(S,h,\beta)$ выражается формулами (3) и (4), где суммирование идет по всем допустимым дуальным конфигурациям с весами $k_\Gamma^{(2)}=e^{-2\beta|\Gamma|}$, $k_\Gamma^{(1)}=k_\Gamma^{(2)}$, если $\Gamma\notin R$, и $k_\Gamma^{(1)}=0$, если $\Gamma\in R$, $\left|\Gamma\right|$ — число единичных гиперкубов в Γ. Дальнейшие оценки проводятся так же, как и для независимого поля. Совершенно аналогично решаются в конечной полосе при малых значениях p и β^*:

а) задача нахождения вероятности непротекания, если контур протекания имеет во всяком сечении, параллельном основанию, односвязную область площадью не менее r.

В этом случае, например, для $v=1$, $\Lambda=L\times h$:

$$H(L,h,p,r) = \exp\{-(L-r+1)\tilde{p}^{rh} + LO(\tilde{p}^{rh+1})\},$$

$$H(L,h,\beta,r) = \exp\{-(L-r+1)(\beta^*)^{2(h+r)} + LO((\beta^*)^{2(h+r+1)})\};$$

б) задача нахождения вероятности непротекания в решеточной задаче связи [2];

в) без изменений все расчеты проходят для произвольной решеточной модели, для которой имеет место разложение вида, описанного в лемме 1 [7].

Замечание. В статье [8] рассматривается протекание в конечной полосе для независимого поля на решетке $\mathbb{Z}^2$ при малых p. Методы [8] не представляется возможным обобщить на решетки более высокой размерности и зависимые поля.

Доказательство теоремы 3. Будем считать, что

$$L_n = k_n^{(1)} L_n^{(1)} + L_n^{(2)},\ \ L_n^{(2)} < L_n^{(1)}, \qquad M_n = k_n^{(2)} M_n^{(1)} + M_n^{(2)},\ \ M_n^{(2)} < M_n^{(1)},$$

где $k_n^{(1)}, k_n^{(2)}, L_n^{(1)}, M_n^{(1)} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Поле независимое, случай зависимого поля исследуется совершенно аналогично.

Рассмотрим последовательность объемов Λ_n, $L_n' = k_n^{(1)} L_n^{(1)}$, $M_n' = k_n^{(2)} M_n^{(1)}$, $\Lambda_n' = \bigcup_{i=1}^{k} \Lambda_{n,i}$, $k = k_n = k_n^{(1)} k_n^{(2)}$, $\zeta_{n,i}$ — количество контуров протекания в $\Lambda_{n,i}$, $i = 1, \ldots, k$.

Для доказательства теоремы нам достаточно проверить выполнение следующих условий:

а) $P\{\zeta_{n,i} = 0\} = e^{-\lambda/k + \overline{o}(\lambda/k)}$;

б) $P\{\zeta_{n,i} \geq 2\} = \overline{o}(\lambda/k)$, $i = 1, \ldots, k$;

в) $P\{\zeta_n - (\zeta_{n,1} + \ldots + \zeta_{n,k}) \neq 0\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Покажем выполнение этих условий:

а) $P\{\zeta_{n,i} = 0\} = \exp\{-L_n^{(1)} M_n^{(1)} p_n^k (1 + \underline{O}(p_n))\} =$

$$= \exp\{(1 + \underline{O}(p_n)) \frac{-(L_n - L_n^{(2)})(M_n - M_n^{(2)})}{k_n^{(1)} k_n^{(2)}} p_n^h\} =$$

$$= \exp\{(-\frac{\lambda}{k} + \frac{\lambda}{k_n^{(1)} k_n^{(2)}} \frac{L_n^{(2)}}{L_n} + \frac{\lambda}{k_n^{(1)} k_n^{(2)}} \frac{M_n^{(2)}}{M_n} - \frac{\lambda}{k_n^{(1)} k_n^{(2)}} \frac{L_n^{(2)} M_n^{(2)}}{L_n M_n})(1 + \underline{O}(p_n))\} =$$

$$= \exp\{-\lambda/k + \overline{o}(\lambda/k)\};$$

б) $\zeta_{n,i} = \sum_{\Gamma\in\tilde{R},\Gamma\subset\Lambda_{n,i}} \chi_\Gamma$, $i = 1,\dots,k(n)$, где χ_Γ — характеристическая функция контура Г.

$$P\{\zeta_{n,i}=1\} = \sum_{\Gamma\in R,\Gamma\subset\Lambda_{n,i}} p_n^{|\Gamma|} q_n^{|\partial\Gamma|} H(\Lambda_{n,i}-\overline{\Gamma}, p_n).$$

Здесь $H(\Lambda_{n,i}-\overline{\Gamma}, p_n)$ — вероятность непротекания в объеме $\Lambda_{n,i}-\overline{\Gamma}$ (т. е. в $\Lambda_{n,i}-\overline{\Gamma}$ отсутствуют контуры $\Gamma\in R_{\Lambda_{n,i}}$), $\overline{\Gamma}$ — замыкание в $\Lambda_{n,i}$.

Ясно, что $M\zeta_{n,i} = \sum_{\Gamma\in R,\Gamma\subset\Lambda_{n,i}} p_n^{|\Gamma|} q_n^{|\partial\Gamma|}$. Но $H(\Lambda_{n,i}, p_n) \le H(\Lambda_{n,i} - -\overline{\Gamma}, p_n) H(\overline{\Gamma}, p_n)$, так как всякой конфигурации непротекания в Λ соответствуют конфигурации непротекания в $\Lambda-\overline{\Gamma}$ и $\overline{\Gamma}$ (но не всякой паре конфигураций непротекания в $\Lambda-\overline{\Gamma}$ и $\overline{\Gamma}$ соответствует конфигурация непротекания в Λ).

Из пункта а) $H(\Lambda_{n,i}, p_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, $i = 1,\dots,k(n)$, $H(\Lambda_{n,i}-\overline{\Gamma}, p_n) \ge H(\Lambda_{n,i}, p_n)$ для любого $\overline{\Gamma}\subset\Lambda_{n,i}$. Таким образом, $H(\Lambda_{n,i}-\overline{\Gamma}, p_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ равномерно по Г, отсюда $\dfrac{M\zeta_{n,i}}{P\{\zeta_{n,i}=1\}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, $i = 1,\dots,k(n)$;

в) $P\{\zeta_n - (\zeta_{n,1}+\dots+\zeta_{n,k}) \ne 0\} \le hL_n^{(2)} M_n (Cp_n)^h + hM_n^{(2)} L_n (Cp_n)^h + +hM_n^{(2)} L_n (Cp_n)^h + hk_n^{(1)} M_n (Cp_n)^h + hk_n^{(2)} L_n (Cp_n)^h$. Выражение в правой части стремится к нулю при $n\to\infty$.

Доказательство теоремы 4. Будем считать, что объем Λ_n составлен из одинаковых по размерам подобъемов $\Lambda_{n,I}$, $\nu = 1$, $\Lambda_n = \bigcup_{i=1}^{k} \Lambda_{n,i}$, $i = 1, \dots, k(n)$, и поле независимое, случай $\nu > 1$ и зависимого поля может быть исследован аналогично. $\zeta_{n,i}$ — количество контуров протекания в объеме $\Lambda_{n,i}$, $i = 1, \dots, k(n)$. Очевидно, количество контуров независимо, и они одинаково распределены. Для доказательства нам достаточно найти последовательность объемов $\Lambda_{n,i}^k$, $n = 1,2,\dots,k = = k(n)$, $i = 1,\dots,k$, $k = k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, такую, что выполнены условия а), б), в), определенные при доказательстве теоремы 3.

Лемма 2. Для любого $\kappa \ge 0$ существует последовательность объемов $\Lambda_l = S_l \times h_l$, $l = 1,2,\dots$, $h_l \xrightarrow[l\to\infty]{} \infty$, $S_l \xrightarrow[l\to\infty]{} \infty$, такая, что $H(S_l, h_l, p) \to e^{-\kappa}$ при $1\to\infty$.

Доказательство. Запишем вероятность $H(S_l, h_l, p)$ в следующем виде:

$$H(S_l, h_l, p) = \exp\{-g(S_l, h_l, p)\}.$$

Пусть $g(S_l, h_l, p) < \kappa$. Тогда увеличиваем S_l на единицу. Ясно, что при этом g возрастает не более чем на $h_l(Cp)^{h_l}$, где C — некоторая абсолютная константа. Увеличиваем S_l до тех пор, пока g не станет больше κ. Затем увеличиваем h до тех пор, пока g не станет меньше κ, и т. д. Ясно, что теперь из этой последовательности объемов можно выбрать подпоследовательность, удовлетворяющую лемме. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь для любого $k = 1, 2, \ldots$ последовательность объемов $\Lambda^k_{m,i} \nearrow \mathbb{Z}^2_+$ при $m \to \infty$, $\Lambda^k_{m,i} = \Lambda^k_{m,j}$, $i, j = 1, \ldots, k$, такую, что $P\{\zeta^k_{m,i} = 0\} \xrightarrow[m\to\infty]{} e^{-\lambda/k}$, где $\zeta^k_{m,i}$ — случайная величина, равная числу контуров протекания в $\Lambda^k_{m,i}$, $i = 1, \ldots, k$; $\mathbb{Z}^2_+$ — верхняя полуплоскость решетки. Это непосредственное следствие из леммы.

Выберем отсюда подпоследовательность объемов $\Lambda^{k_j}_{m_j,i}$, $j = 1, 2, \ldots$; $i = 1, \ldots, k_j$, такую, что $k_j h_{m_j}(Cp)^{h_{m_j}} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, где h_{m_j} — высота объема $\Lambda^{k_j}_{m_j,i}$. Значения h_{m_j} выбираем строго монотонно возрастающие, k_j берем монотонно (не обязательно строго) возрастающим. Выбор константы C станет ясен из дальнейших рассуждений. Легко видеть, что после перенумерации ($j \to n$) получаем последовательность объемов $\Lambda_{n,i}$, $n = 1, 2, \ldots$, $i = 1, \ldots, k(n)$, удовлетворяющих пункту а).

Пункт б) следует из того, что $P\{\zeta_n - (\zeta_{n,1} + \ldots + \zeta_{n,k}) \neq$ $\neq 0\} \le h_n k(n)(Cp)^{h_n}$.

Докажем пункт б):

$$\zeta_{n,i} = \sum_{\Gamma \in R, \Gamma \subset \Lambda_{n,i}} \chi_\Gamma, \ \ i = 1, \ldots, k(n),$$

где χ_Γ — характеристическая функция контура Γ. Ясно, что $P\{\zeta_{n,i} = 1\} = \sum_{\Gamma \in \tilde{R}, \Gamma \subset \Lambda_{n,i}} p_n^{|\Gamma|} q_n^{|\partial\Gamma|} H(\Lambda_{n,i} - \overline{\Gamma}, p)$, где $H(\Lambda_{n,i} - \overline{\Gamma}, p)$ — вероятность непротекания в объеме $\Lambda_{n,i} - \overline{\Gamma}$ (т. е. в $\Lambda_{n,i} - \overline{\Gamma}$ отсутствуют контуры $\Gamma' \in R_{\Lambda_{n,i}}$, $\overline{\Gamma}$ — замыкание в $\Lambda_{n,i}$. В то же время $M\zeta_{n,i} = \sum_{\Gamma \in R, \Gamma \subset \Lambda_{n,i}} p^{|\Gamma|} q^{|\partial\Gamma|}$. Но $H(\Lambda_{n,i}, p) \le H(\Lambda_{n,i} - \overline{\Gamma}, p) H(\overline{\Gamma}, p)$, так как всякой конфигурации непротекания в Λ соответствуют конфигурации непротекания в $\Lambda-\overline{\Gamma}$ и $\overline{\Gamma}$ (но не всякой паре конфигураций непротекания в $\Lambda-\overline{\Gamma}$ и $\overline{\Gamma}$ соответствует конфигурация непротекания в Λ). Мы выбрали последовательность объемов так, что $H(\Lambda_{n,i}, p)\to 1$ при $n\to\infty$, $i = 1, \ldots, k(n)$. $H(\Lambda_{n,i}-\overline{\Gamma}, p) \ge H(\Lambda_{n,i}, p)$ для любого $\overline{\Gamma}\subset\Lambda_{n,i}$.

Отсюда $\dfrac{M\zeta_{n,i}}{P\{\zeta_{n,i}=1\}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, $i=1,\ldots,k(n)$. Пункт б) доказан.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Брагинский Р.П., Гнеденко Б.В., Молчанов С.А. Математические модели старения полимерных изоляционных материалов. Докл. АН СССР, 1983, т. 286, № 2, с. 281–284.

[2] Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. Москва, Едиториал УРСС, 2002, 112 с.

[3] Минлос Р.А., Храпов П.В. О протекании в конечной полосе для непрерывных систем. Вестник МГУ, 1985, № 1, с. 56–60.

[4] Храпов П.В. О протекании в конечной полосе для дискретных и непрерывных систем. Рукопись деп. в ВИНИТИ, 13.07.84, № 5061–84.

[5] Храпов П.В. О протекании в конечной полосе. *Вестник МГУ. Мат. Мех*, 1985, № 4, с. 10–13.

[6] Малышев В.А. Кластерные разложения в решетчатых моделях статистической физики и квантовой теории поля. Усп. Математических наук, 1980, т. 35(2), с. 3–53.

[7] Малышев В.А., Минлос Р.А. Гиббсовские случайные поля. Москва, Наука, 1985.

[8] Цареградский И.П. Просачивание через конечный слой. *Теоретическая и математическая физика*, 1983, т. 57, № 1, с. 105–114.

Статья поступила в редакцию 16.07.2013.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Храпов П.В. Перколяция в конечной полосе для гиббсовских решеточных моделей. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 6. URL: http://engjournal.ru/catalog/nano/hidden/796.html

Храпов Павел Васильевич окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1981 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Области деятельности и научных интересов: функциональный анализ, распознавание образов, теория перколяции, численные методы. e-mail: khrapov@bmstu.ru