УДК 378.147

Проблемы и перспективы развития курса численных методов

© А.А. Федотов, П.В. Храпов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Работа обосновывает важность математики в современном мире. Численный анализ математических моделей является в настоящее время наиболее эффективным аппаратом исследования прикладных проблем. В статье подчеркивается важность внедрения серьезного двухсеместрового курса «Численные методы» в программу всех факультетов технического Университета. Предлагается программа чтения первой части «Общие численные методы» по схеме 2 + 1 + 1 для студентов третьего или четвертого семестра. Приводится подробная структура курса. Рассмотрена схема проведения лабораторных работ на примере лабораторной работы «Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений» в среде MATLAB. Предлагается вариант второй части курса «Численные методы решения уравнений математической физики», подробно рассмотрена его структура. Указаны темы всех лабораторных работ.

Ключевые слова: *численные методы, лабораторные работы, точность расчетов, приближение функций, численное интегрирование, метод конечных элементов.*

В США в 2000 г. была создана специальная комиссия по проблемам школьного образования. В нее вошли сенаторы, ученые, бизнесмены и учителя, возглавил комиссию астронавт Джон Глен. Комиссия составила доклад президенту Соединенных Штатов под названием «Пока не поздно» (Before It Is Too Late, John Glenn’s National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century, September 27, 2000). В докладе, в частности, говорится: «Комиссия убеждена, что на заре нового столетия и тысячелетия будущее благосостояние нашего государства зависит не только от того, насколько мы хорошо обучаем детей в целом, но и от того, насколько мы хорошо обучаем естественным, фундаментальным наукам и, в частности, *математике*. Эти науки дают нам продукты, уровень жизни, экономическую и военную безопасность, которые будут поддерживать нас как дома, так и во всем мире». Красной нитью через весь доклад проходит убеждение комиссии в том, что американцы со школьной скамьи должны хорошо учить математику.

Учитывая важность математики в современном мире, Президент России В.В. Путин в своем Указе «О мерах по реализации государственной политики в области образования и науки» от 7 мая 2012 г. постановил: «… обеспечить реализацию следующих мероприятий в области образования: … разработку и утверждение в декабре 2013 г. Концепции развития математического образования в Российской

Федерации на основе аналитических данных о состоянии математического образования на различных уровнях образования». И действительно, для освоения современных технологий требуется серьезный математический аппарат. Более того, и сама математика под действием научно-технического прогресса меняет свои очертания, способствует развитию вычислительной техники и таким новым раздела математики, как численные методы.

Численные методы — это раздел математики, содержащий методы решения математических задач в численном виде: разработка, обоснование и реализация (на базе вычислительной техники) методов приближенного решения разнообразных задач на уровне математических моделей. В основе численных методов лежат алгоритмические схемы переработки информации с целью нахождения приближенного решения рассматриваемой задачи в числовой форме. Численные методы являются основным инструментом решения современных прикладных задач. Аналитическое решение задачи можно найти далеко не всегда в силу сложного, как правило, нелинейного, вида систем уравнений, описывающих задачу. Поэтому численный анализ математических моделей — метод решения, алгоритм, программа, вычислительный эксперимент — является в настоящее время наиболее эффективным аппаратом исследования прикладных проблем. Однако актуальными стали другие проблемы: оценка погрешности вычислений, численные методы решения задач с учетом архитектуры компьютера, возможности распараллеливать вычисления, визуализация результатов вычислений. Пакеты типа WOLFRAM MATHEMATICA, MATLAB, MAPLE и другие, позволяющие проводить символьные вычисления, упрощают работу, связанную с громоздкими аналитическими выкладками, дают возможность аналитически решить широкий круг задач, многие из которых входят в курс математики, читаемый в техническом университете на младших курсах. Грань интеллектуального различия между человеком и современным компьютером (главное — с соответствующим программным обеспечением) начинает стираться. В некоторых интеллектуальных областях (например, в шахматах), компьютеры уже успешно выигрывают даже у гроссмейстеров. Если сейчас считаются с мировыми державами, владеющими атомным оружием, то на следующем этапе развития цивилизации будут доминировать страны, разработавшие и внедрившие в повседневную жизнь искусственный интеллект. Люди, IQ которых больше 150, как правило, успешны в жизни. История помнит мудрых правителей с древних времен, и она показывает важность принимаемых руководством страны решений. А представьте себе, что в качестве эксперта выступает искусственный интеллект с IQ 1 500? Или 15 000? Как только IQ компьютеров преодолеет хотя бы 30 по стандартной шкале, далее его увеличение будет делом техники. Развитие страны прогнозировалось бы не на месяцы вперед, а на годы и десятилетия, прогресс определяли бы уже машины. Это ставит перед нами и новые этические проблемы, которые лучше увидеть сейчас, а не тогда, когда будет поздно их решать. Технический университет должен быть на острие научно-технического прогресса. Но даже если не заглядывать на десятки лет вперед в ожидании создания полноценного искусственного интеллекта, в настоящее время наблюдается большое отставание программ курса математики, которые не учитывают стремительные изменения в области компьютерной техники. Широкое внедрение кластерных вычислительных систем и многоядерных компьютеров снова поставило вопрос о пересмотре подхода к численным методам. Возможности использования параллельных вычислений, нейронных сетей, генетических алгоритмов при реализации традиционных задач численных методов изменяют проблематику их представления и критерий оценки качества вычислений. Известно, что перспективы развития информационных технологий связывают с развитием нанотехнологий и переходом на квантовый уровень записи и преобразования информации, т. е. с созданием квантового компьютера. Внедрение этих технологий внесет в численные методы еще более революционные изменения. В МГТУ им. Н.Э. Баумана создание большого количества компьютерных залов, оснащенных современными ПЭВМ, началось в 1987 г. по инициативе ректора А.С. Елисеева. В учебные программы третьего семестра были введены семестровые курсы «Численные методы» по схеме 1 + 1 + 1 (один час лекций в неделю, один час семинаров и один час лабораторных работ), и эта схема успешно работала многие годы. Затем семинары убрали, потом и лекции, и с 2012 г. на численные методы выделено всего 2 лекции (!) в семестре и сохранились лабораторные работы, что явно недостаточно. Для преодоления отставания МГТУ им. Н.Э. Баумана от развития современных информационных технологий могут быть предложены следующие изменения в структуре преподавания этой дисциплины. Бакалаврская составляющая для всех факультетов (кроме ФН, там этого недостаточно) должна состоять из двух семестровых курсов: курса «Численные методы», который следует читать по схеме 2+1+1 (два часа лекций, один час семинаров и один час лабораторных работ) в третьем или четвертом семестре. Второй семестровый курс «Численные методы решения уравнений математической физики» по схеме 1 + 1 + 1 должен читаться в пятом или шестом семестре. Оба эти курсы должны поддерживаться современным лабораторным практикумом с использованием современного программного обеспечения. Сейчас преподавание математического анализа и линейной алгебры строится на арифметических представлениях человека XIX в., который выполняет вычисления вручную. Ни в коем случае не подвергая сомнениям важность умения делать аналитические вычисления на бумаге, обращаем внимание на то, что прогресс не стоит на месте, и, не добавляя современных численных методов, мы скатываемся на позиции стран третьего мира.

Предлагаем следующую программу чтения семестрового курса «Численные методы» по схеме 2 + 1 + 1 для студентов третьего или четвертого семестра (рассмотрим идеальную для МГТУ им. Н.Э. Баумана схему, методическая литература по этому курсу [1–9] . Реальный курс будет урезанием идеального). Весь курс разбивается на четыре модуля.

МОДУЛЬ 1. Численные методы алгебры

1. Численное решение математических задач и особенности вычислений на ЭВМ. Источники и классификация погрешностей. Погрешности чисел, векторов и функций, матриц. Погрешности при выполнении арифметических операций. Устойчивость вычислительных методов и обусловленность математической задачи. Характеристика вычислительных методов по объему вычислений.

2. Вычислительные задачи линейной алгебры. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Оценка точности полученного решения. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Прямой ход метода Гаусса. Обратный ход метода Гаусса. Метод Гаусса с выбором главного элемента. Вычисление определителя невырожденной матрицы. Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью LU-разложения.

3. Решение систем специального вида. Метод квадратного корня (метод Холецкого) решения систем линейных алгебраических уравнений с симметричной матрицей коэффициентов. Метод прогонки для решения трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений. Особенности алгоритма метода прогонки. Численный метод решения краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка с помощью метода прогонки.

4. Нормированные пространства, примеры. Норма матрицы. Устойчивость системы линейных алгебраических уравнений. Мера обусловленности матрицы. Матрица Гильберта. Степенной метод. Нахождение меры обусловленности симметричной матрицы А степенным методом.

5. Решение систем нелинейных уравнений. Метод простых итераций. Метод Ньютона, его реализации и модификации. Скорость сходимости метода Ньютона.

МОДУЛЬ 2. Приближение функций

1. Задача приближения функций. Интерполяция и аппроксимация функций. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Эрмита. Оценка погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа.

2. Интерполяция сплайнами. Линейная и кубическая сплайн-интерполяция. Метод наименьших квадратов. Метод наименьших квадратов в классе полиномиальных функций.

МОДУЛЬ 3. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Численное интегрирование. Квадратурные формулы. Порядок точности. Правило Рунге вычисления погрешности. Уточнение по Ричардсону. Формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона. Алгоритм вычисления интеграла с заданной точностью.

2. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Разностная аппроксимация производных. Явный метод Эйлера. Методы Рунге — Кутты решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений первого порядка. Алгоритм метода при решении задачи с заданной точностью.

3. Многошаговые методы решения дифференциальных уравнений. Методы Адамса. Явные и неявные схемы. Неявный метод Эйлера и метод трапеций. Проблема численной устойчивости. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами. Понятие о жестких уравнениях и системах. Устойчивость и неустойчивость некоторых простейших разностных схем.

МОДУЛЬ 4. Численные методы решения задач оптимизации

1. Численные методы решения задач оптимизации. Одномерная оптимизация. Унимодальные функции. Метод дихотомии. Метод золотого сечения. Многомерная оптимизация. Метод покоординатного и наискорейшего спуска.

2. Метод сопряженных градиентов. Метод Ньютона. Многомерная оптимизация при наличии ограничений. Метод проекций градиента.

По каждой теме проводится семинар и выполняются лабораторные работы.

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

1. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.
2. Сплайн-интерполяция.
3. Метод наименьших квадратов.
4. Численные методы решения систем нелинейных уравнений.
5. Численное интегрирование.
6. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.
7. Численные методы решения задач оптимизации.

Авторами подготовлены методические разработки для выполнения этих лабораторных работ [1–9].

Рассмотрим схему проведения лабораторных работ на примере лабораторной работы «Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений» в среде MATLAB. Каждый студент получает следующее индивидуальное задание.

1. Решить систему линейных алгебраических уравнений аналитически методом Гаусса с выбором главного элемента (в зависимости от варианта это может быть LU-разложение или метод квадратного корня).

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & -2 & 12 \\ -3 & 2 & 5 & 6 & 14 \\ 3 & 5 & -1 & 0 & -40 \\ -2 & 6 & 0 & 2 & -20 \end{pmatrix}.$$

2. Написать программу решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента. Решить с ее помощью систему линейных алгебраических уравнений.

3. Сравнить результаты программы с результатами, полученными с помощью встроенной в MATLAB функции решения систем линейных алгебраических уравнений.

4. Найти меру обусловленности матрицы коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений с использованием степенного метода нахождения максимального по модулю собственного значения матрицы коэффициентов и с помощью встроенной в MATLAB функции сравнить их.

5. Проверить работу программы на примере системы линейных алгебраических уравнений с матрицей коэффициентов, заполненной случайными числами в диапазоне [0–10], вектором решений $x[i] = i$ и соответствующей правой частью для систем линейных алгебраических уравнений порядка n =1000.

Оформить отчет:

а) теоретическая часть;

б) аналитическое решение системы из четырех уравнений;

в) текст программы;

г) результаты для системы из четырех уравнений.

Выполнение лабораторной работы всегда начинается с того, что студент при подготовке к ней решает аналитически тестовый пример (способом, используемым в лабораторной работе). Примеры подобраны так, чтобы решения были несложными, ответы в этой лабораторной работе целочисленные. Упор делается на изучение численного метода, а не на виртуозность ручных вычислений. Такое решение простого тестового примера позволяет запомнить сам численный метод, прочувствовать его нюансы и поможет отладить программу при пошаговом выполнении (путем сравнения аналитических выкладок и результатов, полученных с помощью компьютера). Студент на практике видит важность проведения аналитических преобразований и связь их с современными численными методами. Нахождение меры обусловленности матрицы приобщает студента к современной математике, показывает, какие сложности могут возникнуть (и возникают!) при решении реальной системы линейных алгебраических уравнений, как правило, большой размерности на компьютере. Для того чтобы почувствовать уверенность в своих силах и мощь компьютера, студент должен решить и систему линейных уравнений с не менее чем 1000 неизвестных.

В лабораторных работах, использующих разбиение рассматриваемого интервала переменной на сетку с шагом h (например, сплайн-интерполяция, численное интегрирование, численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений), обязательно делается расчет на сетках с различным шагом, чтобы можно было сравнить или решения в одной и той же точке при различных шагах (например, при сплайн-интерполяции), или точность вычислений (например, с помощью практического правила Рунге при вычислении определенных интегралов или решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений). Современные математические пакеты, например MATLAB, позволяют на своем языке, близком по синтаксису к языкам программирования, изучаемым студентами в курсе информатики, написать программу для выполнения лабораторной работы. Но эти программные комплексы еще имеют встроенные функции, позволяющие получить результат буквально в несколько строчек. Студент должен найти решение с помощью встроенной функции и сравнить все три решения: аналитическое, полученное с помощью написанной им программы (с разными шагами выполнения) и с помощью встроенных функций. МГТУ им. Н.Э. Баумана имеет категорию «Национальный исследовательский университет», и студентам, в будущем элитным инженерам, определяющим развитие промышленности России, нельзя ограничиваться только встроенными функциями (что было бы достаточно для студентов обычного технического вуза), они должны уметь сами создавать аналогичные пакеты программ и развивать их далее. Неумение это делать автоматически влечет за собой технологическое отставание от передовых держав. Пакет MATLAB позволяет без особых усилий выполнять визуализацию результатов (построить графики функций при сплайн-интерполяции на сгущающихся сетках, графики функций в методе наименьших квадратов, графики аналитического и численного решений дифференциальных уравнений и т. д.). Естественно, студенты должны сделать визуализацию результатов лабораторной работы. Это позволяет вывести их на уровень современного развития информационных технологий и ликвидировать технологическое отставание.

Численные методы позволяют быстро приобщить студентов к научно-исследовательской работе. Авторы данной работы регулярно в курсе «Численные методы» ставили перед хорошо успевающими студентами задачи, имеющие научное значение, и студенты даже младших курсов успешно их решали на компьютерах (под контролем авторов). Результаты этих совместных научных работ регулярно публикуются в научных журналах [10–23]. Студенты при освоении курса «Численные методы» выступают с научными докладами на ежегодных студенческих научно-технических конференциях «Весна» кафедры «Высшая математика», секция «Актуальные направления развития прикладной математики в энергетике, энергоэффективности и информационно-коммуникационных технологиях» с публикацией докладов в «Студенческом научном вестнике», электронном издании «Молодежный научно-технический вестник» МГТУ им. Н.Э. Баумана и других изданиях, на международных конференциях [18–23]. Один из авторов настоящей статьи является с 1987 г. председателем Оргкомитета студенческой научно-технической конференции «Весна» кафедры «Высшая математика». Заведующий кафедрой «Высшая математика» профессор Н.И. Сидняев уделяет большое внимание научно-исследовательской работе студентов, их участию в научных конференциях и является научным руководителем студенческой научно-технической конференции «Весна» кафедры «Высшая математика».

Заметим, что аналитические результаты в отличие от полученных численными методами получить гораздо сложнее. Перефразируя известное высказывание, можно сказать, что численные методы — это царский путь в математике.

Вторая семестровая часть курса «Численные методы решения уравнений математической физики» по схеме 1+1+1 должна читаться в пятом или шестом семестре. Рассмотрим ее на примере программы для одной из кафедр факультета СМ. Курс содержит следующие темы.

Модуль 1. Основы теории разностных схем. Уравнения параболического типа

1.1. Основные понятия теории разностных схем

Уравнение переноса. Постановка смешанной задачи. Численный метод решения задачи. Сетки, сеточные функции и нормы. Разностная схема. Основные понятия теории разностных схем: аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теорема сходимости.

1.2. Исследование устойчивости разностной схемы. Классификация уравнений в частных производных второго порядка

Исследование разностной схемы. Метод Фурье исследования устойчивости разностных схем. Пример аппроксимирующей, но неустойчивой разностной схемы. Алгоритм численного метода. Классификация уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными. Характеристики уравнений. Канонические виды гиперболического, эллиптического и параболического типов уравнений. Постановки краевых задач для различных типов уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными.

1.3. Разностные методы решения уравнений параболического типа

Методы решения параболических уравнений. Смешанная задача для нестационарного одномерного уравнения теплопроводности. Метод разделения переменных решения краевых задач. Задача Штурма — Лиувилля. Область зависимости решения. Численные методы решения нестационарного одномерного уравнения теплопроводности. Простой явный метод. Простой неявный метод. Метод Кранка — Николсона. Метод Дюфорта — Франкеля. Метод Ричардсона. Численные методы решения нестационарного двумерного уравнения теплопроводности. Неявные методы переменных направлений (продольно-поперечная схема). Методы расщепления (метод дробных шагов).

Модуль 2. Уравнения эллиптического типа. Решение уравнений математической физики методом конечных элементов

2.1. Разностные методы решения уравнений эллиптического типа. Основы метода конечных элементов

Методы решения эллиптических уравнений. Метод установления. Пятиточечная схема решения уравнения Лапласа (Пуассона). Прямые и итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (метод Гаусса, метод Гаусса с выбором главного элемента, метод прогонки; метод Якоби, метод Гаусса — Зейделя, метод переменных направлений).

Основы метода конечных элементов. Дискретизация задачи. Конечные элементы. Базисные функции. Сведение задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений.

2.2. Решение краевой задачи для стационарного одномерного уравнения теплопроводности методом конечных элементов

Постановка задачи в дифференциальной форме. Элементы вариационного исчисления. Функционалы. Экстремум функционала. Уравнение Эйлера. Вариационная постановка задачи. Метод Ритца. Проекционная постановка задачи. Метод Галеркина. Конечные элементы и базисные функции. Свойства базисных функций. Составление системы линейных алгебраических уравнений. Вычисление интегралов.

2.3. Решение краевой задачи для стационарного двумерного уравнения теплопроводности методом конечных элементов

Постановка задачи в дифференциальной форме. Вариационная постановка задачи в глобальной системе координат. Решение задачи методом конечных элементов. Разбиение расчетной области на конечные элементы. Трехузловой треугольный конечный элемент. Выбор базисных функций. Матрица базисных функций элемента. Вектор узловых значений неизвестной функции на конечном элементе. Элементная матрица жесткости. Составление системы линейных алгебраических уравнений при объединении элементных вкладов в уравнения системы по узлам для стационарного двумерного уравнения теплопроводности.

По этим же темам проводятся семинарские занятия и следующие лабораторные работы.

Модуль 1. Основы теории разностных схем. Уравнения параболического типа

Лабораторная работа № 1. Численное решение уравнения переноса методом конечных разностей.

Лабораторная работа № 2. Решение системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей методом прогонки.

Лабораторная работа № 3. Численное решение краевой задачи для нестационарного одномерного уравнения теплопроводности методом Кранка — Николсона.

Модуль 2. Уравнения эллиптического типа. Решение уравнений математической физики методом конечных элементов

Лабораторная работа № 4. Численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона разностным методом.

Лабораторная работа № 5. Численное решение краевой задачи для стационарного одномерного уравнения теплопроводности методом конечных элементов.

Заключение. В работе изложена острая необходимость внедрения серьезного курса «Численные методы» в программу всех факультетов МГТУ им. Н.Э. Баумана. К сожалению, должны констатировать, что пока вместо расширения этого курса зачастую происходит его исчезновение. Надеемся, что эта работа даст толчок к изменению в лучшую сторону состояния дел в этой области.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Федотов А.А., Храпов П.В. *Численные методы.* [Электрон. ресурс]. 2012. № гос. регистрации 0321202494. http://wwwcdl.bmstu.ru/fn1/

[2] Кокотушкин Г.А., Федотов А.А., Храпов П.В. *Численные методы алгебры и приближения функций*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011 г.

[3] Блюмин А.Г., Федотов А.А., Храпов П.В. *Численные методы вычисления интегралов и решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.* [Электрон. ресурс]. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, № гос. регистрации 0320800709. http://rk6.bmstu.ru/electronic_book/ mathematic/fedotov_HM.pdf .

[4] Блюмин А.Г., Гусев Е.В., Федотов А.А. *Численные методы*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.

[5] Кокотушкин Г.А., Храпов П.В. *Методические указания к решению задач по курсу «Методы вычислений»*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.

[6] Кокотушкин Г.А., Храпов П.В. *Методические указания к решению задач по курсу «Численные методы»*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999 г.

[7] Голосов А.О., Федотов А.А., Храпов П.В. *Численные методы вычисления интегралов и решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.* Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1992, 52 с.

[8] Барсов С.С., Храпов П.В., Чуев В.Ю. *Численные методы поиска экстремума*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990, 35 с.

[9] Голосов А.О., Нарайкин О.С., Храпов П.В. *Прикладной функциональный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990, 74 с.

[10] Буренков Д.С., Храпов П.В. *Физическая модель гладкой трансформации контуров*. Тр. 11-й Междунар. конф. по компьютерной графике и машинному зрению «ГрафиКон'2001». Нижний Новгород, 2001, с. 199–202.

[11] Солдатенков А.О., Храпов П.В. Численное исследование свободной энергии модели Изинга. *Мат. III Всерос. конф. «Инновационные технологии в обучении и производстве»*, 2005, т. 2, с. 205–209.

[12] Кирьянов Д.А., Храпов П.В. Математическое моделирование эволюции звездных систем. *Альманах современной науки и образования*. Тамбов, Грамота, 2008, №7 (14), с. 81–84.

[13] Храпов Н.П., Храпов П.В., Шумилина А.О. Математическая модель и прогноз развития эпидемии СПИДа. *Альманах современной науки и образования*. Тамбов, Грамота, 2008, № 12(19), с. 218–221.

[14] Матвеева К.О, Храпов П.В., Шмакова Н.А. Математическая модель динамики популяции трех видов животных. *Альманах современной науки и образования*. Тамбов: Грамота, 2009, № 6(25), с. 117–121.

[15] Крылов Д.А., Храпов П.В., Сидняев Н.И., Федотов А.А. Расчет температурных полей в двухфазных грунтовых средах. *Сб. трудов Междунар. науч. конф. «Актуальные направления развития прикладной математики в энер-*

гетике, энергоэффективности и информационно-коммуникационных технологиях». Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, с. 29–34.

[16] Мельникова С.Ю., Сидняев Н.И., Храпов П.В. Вариационная постановка задачи управления температурными полями в двухфазных средах. *Сб. тр. Междунар. науч. конф. «Актуальные направления развития прикладной математики в энергетике, энергоэффективности и информационно-коммуникационных технологиях».* Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, с. 50–53.

[17] Федотов А.А., Григорьев В.Ю., Лонкин П.В., Храпов П.В. Прогнозирование температурных полей грунтов вокруг промышленных объектов в криолитозоне в условиях глобального потепления. *Сб. тр. Междунар. науч. конф. «Актуальные направления развития прикладной математики в энергетике, энергоэффективности и информационно-коммуникационных технологиях».* Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, с. 53–56.

[18] Лонкин П.В., Григорьев В.Ю., Храпов П.В., Федотов А.А. Влияние потепления климата на температурные поля грунтов вокруг промышленных объектов в криолитозоне. *Тр. 53-й науч. конф. МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». Часть III. Аэрофизика и космические исследования.* Москва, МФТИ, 2010, с. 124–128.

[19] Сидняев Н.И., Храпов П.В., Разгуляев С.В. Обзор и анализ устройств и систем для охлаждения и замораживания грунтов. *Мат. Междунар. науч.-прак. конф. по инженерному мерзлотоведению, посвященной XX-летию создания ООО НПО «Фундаментстройаркос».* Тюмень, Сити-Пресс, 2011, с. 156–183.

[20] Сидняев Н.И. Мельникова Ю.С., Храпов П.В., Гласко А.В. Влияние температурного режима вечномерзлых грунтов на надежность оснований. *Мат. Междунар. науч.-прак. конф. по инженерному мерзлотоведению, посвященной XX-летию создания ООО НПО «Фундаментстройаркос».* Тюмень, Сити-Пресс, 2011, с. 247–257.

[21] Гласко А.В., Федотов А.А., Сидняев Н.И., Храпов П.В., Мельникова Ю.С. *«Моделирование динамики температурного поля грунтов основания здания в криолитозоне».* [Электрон. ресурс]. 2011. Наука и образование. № 12. URL: http://technomag.edu.ru/doc/274059.html

[22] Федотов А.А., Храпов П.В., Сидняев Н.И., Гласко А.В. Метод прогноза изменения температурного режима вечномерзлых грунтов, оснований зданий и сооружений в криолитозоне. МГУ им. М.В. Ломоносова, 7–9 июня 2011 г. *Мат. 4-й конф. геокриологов России*. Т. 2. Ч. 5. Региональная и историческая геокриология. Ч. 6. Динамическая геокриология. М.: Университетская книга, 2011, с. 341–348.

[23] Сидняев Н.И., Мельникова Ю.С., Храпов П.В., Гласко А.В. Влияние температурного режима криолитозоны на надежность оснований. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2012, № 3, с. 81–88.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Федотов А.А., Храпов П.В. Проблемы и перспективы развития курса численных методов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 5. URL: http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/747.html

Федотов Анатолий Александрович родился в 1954 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1977 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 55 научных работ в области прикладной математики и механики. Сфера научных интересов: численные методы, уравнения математической физики. e-tail@list.ru

Храпов Павел Васильевич родился в 1959 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1981 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных работ в области прикладной математики и механики. Сфера научных интересов: модели статистической физики и квантовой теории поля, численные методы, функциональный анализ, анализ временных рядов, распознавание образов, финансовая математика. e-mail: khrapov@bmstu.ru