УДК 512.643

Генерирование матриц специального вида: аналитический подход

© С.К. Соболев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В статье рассматриваются аналитические методы генерирования квадратных матриц специального вида произвольного порядка: ортогональных с рациональными элементами, имеющих простую структуру, и целочисленных симметричных матриц с целыми собственными числами любых наперед заданных знаков и кратностей. Получены явные формулы, зависящие от нескольких параметров, при подстановке вместо которых произвольных целых чисел получаются требуемые матрицы любого размера. Результаты статьи могут быть использованы для автоматического составления задач по линейной алгебре.

Ключевые слова: *ортогональная матрица, циклическая матрица, латинская матрица, симметричная матрица, собственные числа.*

Введение. Современные средства хранения и передачи информации за последнее десятилетие стали настолько совершенны, что проблема оперативного обновления комплектов контрольных работ по математике (да и по другим предметам) в вузах стала более чем актуальной. Возникает необходимость автоматического генерирования неограниченного количества задач на заданные темы с «хорошими» ответами. В частности, при автоматическом генерировании задач по линейной алгебре очень часто требуется иметь в своем распоряжении достаточное количество «несложных» матриц специального вида (хотя бы 3–6 порядка), например, ортогональных, состоящих из рациональных чисел с небольшим знаменателем, или симметричных целочисленных матриц с целыми собственными числами. Некоторые такие алгоритмы приведены в работе [1]. В данной работе мы предлагаем чисто аналитический подход к созданию таких матриц. Это значит, что путем теоретического анализа получается некоторая матрица, зависящая от нескольких целочисленных параметров, компьютеру «поручается» только лишь подставлять в нее различные значения этих параметров и отбрасывать заведомо неподходящие получающиеся матрицы, например, с очень большими числами.

1. Аналитическое генерирование ортогональных матриц.

1.1. Общие понятия. Будем строить целочисленные квадратные матрицы с попарно ортогональными строками. Если для таких матриц сумма квадратов элементов любой строки равна одному и тому же числу σ, то такую матрицу будем называть ***полуортогональной***, а число $\mu = \sqrt{\sigma}$ — ее ***нормой***. Для такой матрицы A выполняется условие $AA^T = \mu^2 E$. Отметим некоторые простые факты.

Лемма 1. *Если A — полуортогональная матрица с нормой μ, то матрица A ортогональна и по столбцам: $A^T A=\mu^2 E$ и матрица $Q=\frac{1}{\mu}A$ ортогональна в обычном смысле.*

Лемма 2. *Если матрица A ортогональна по строкам (или по столбцам или полуортогональна), то она останется таковой, если в ней переставить произвольным образом строки, столбцы и/или изменить знак у некоторых строк и столбцов.*

Пусть $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0$, A — произвольная антисимметричная целочисленная матрица, т. е. $A^T=-A$, и $B=\lambda E+A$, тогда $B^T+B=2\lambda E$.

Лемма 3. *Матрица B не вырождена и поэтому обратима*.

В самом деле, равенство $\det B=\det\left(A+\lambda E\right)=0$ возможно только при $\lambda=0$, так как антисимметричная матрица не имеет собственных чисел, отличных от нуля.

Лемма 4. *Справедливо равенство* $B^T B^{-1}=B^{-1}B^T$.

Доказательство. Умножим равенство $B^T=2\lambda E-B$ сначала слева, а затем справа на матрицу B^{-1}, в обоих случаях получим $B^T B^{-1}=B^{-1}B^T=2\lambda B^{-1}-E$.

Следствие. $B\cdot\left(B^T\right)^{-1}=\left(B^T\right)^{-1}\cdot B$.

Лемма 5. *Матрица $Q=B^T B^{-1}=B^{-1}B^T$ ортогональна.*

Доказательство [2, стр. 247]. В самом деле,

$$Q^T=\left(B^T B^{-1}\right)^T=\left(B^T\right)^{-1}B,$$
$$Q^{-1}=\left(B^{-1}B^T\right)^{-1}=\left(B^T\right)^{-1}B.$$

Замечание 1. Если $\lambda\in\mathbb{Z}$, кососимметрическая матрица A (а значит, и матрица B) целочисленна, и $\tilde{B}$ – матрица, присоединенная к матрице B, то матрица $Q=B^T B^{-1}$ состоит из рациональных чисел, а матрица $P=B^T\tilde{B}$ также целочисленна, полуортогональна, и ее норма $\|P\|=|\det B|$.

Замечание 2. Лемма 5 верна для любой невырожденной матрицы B, удовлетворяющей условию $B^T=p(B)$, где $p(x)$ — некоторый многочлен.

Из леммы 5 при $n=3$ и $\lambda=1$ получаем следующий общий вид полуортогональных матриц третьего порядка, зависящих от четырех произвольных целых параметров $k,l,m,n\in\mathbb{Z}$:

$$A=\begin{pmatrix} m^2+n^2-k^2-l^2 & -2(kn+lm) & 2(kn-nl) \\ 2(kn-lm) & n^2+l^2-k^2-m^2 & -2(kl+mn) \\ 2(km+nl) & 2(mn-kl) & k^2+n^2-m^2-l^2 \end{pmatrix}.$$

Все эти матрицы имеют целую норму: $\mu = k^2 + l^2 + m^2 + n^2$.

Общий вид ортогональной матрицы (с рациональными элементами) порядка *n*, построенной таким образом, будет зависеть от $2 + \frac{1}{2}n(n-1)$ произвольных целых параметров.

Определение. Квадратная матрица *A* порядка *n* называется ***латинской***, построенной на базе чисел $\{a_1; ...; a_n\}$, если в каждой строке и в каждом столбце этой матрицы встречается каждое из этих чисел ровно по одному разу. Матрицу *A* назовем ***полулатинской***, если она отличается от латинской разве что знаком некоторых своих элементов. Если полулатинская матрица на базе чисел $\{a_1; ...; a_n\}$ ортогональна по строкам, то она, очевидно, полуортогональна с нормой $\mu = \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}$. Частным случаем полулатинских матриц являются квадратные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \pm a_n & \pm a_1 & \pm a_2 & \cdots & \pm a_{n-1} \\ \pm a_{n-1} & \pm a_n & \pm a_1 & \cdots & \pm a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pm a_2 & \pm a_3 & \pm a_4 & \cdots & \pm a_1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \pm a_2 & \pm a_3 & \pm a_4 & \cdots & \pm a_1 \\ \pm a_3 & \pm a_4 & \pm a_5 & \cdots & \pm a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pm a_n & \pm a_1 & \pm a_2 & \cdots & \pm a_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Такие матрицы мы назовем ***полуциклическими***, каждая следующая строка в них получается из предыдущей строки циклической перестановкой на один элемент и возможным изменением знака у некоторых элементов, например,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -c & a & b \\ -b & -c & a \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Квадратную матрицу *A* порядка *n* назовем ***ортолатинской*** (на базе чисел $a_1, ..., a_n$), если она полуортогональная и полулатинская, т. е. если в каждой строке и в каждом столбце этой матрицы встречается ровно по одному разу все числа, равные по модулю числам $a_1, ..., a_n$, и матрица AA^T диагональная. В этом случае $AA^T = A^T A = \mu^2 E_n$, где число $\mu = \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} = \|A\|$. Полуциклическую и одновременно полуортогональную матрицы назовем ***ортоциклической***. Перестановкой строк и столбцов и умножением их на минус один из ортоциклической матрицы получается ортолатинская.

Ортолатинские матрицы на базе чисел $\{1; 1; ...; 1\}$ называются ***матрицами Адамара***.

1.2. Целочисленные ортолатинские матрицы 2-го и 3-го порядка. Все полуортогональные матрицы второго порядка имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Полуциклическая матрица вида (2) является ортоциклической тогда и только тогда, когда выполняется условие $ac = ab + bc$. Общий вид целочисленных матриц такого вида

$$a = n(n+k),\ b = nk,\ c = k(n+k),\ \mu = n^2 + nk + k^2,\ n, k \in \mathbb{Z}.$$

Эти матрицы имеют **целую** норму $\mu = n^2 + nk + k^2$.

Соответствующая ортогональная матрица имеет вид

$$Q = \frac{1}{n^2 + nk + k^2} \begin{pmatrix} n(n+k) & nk & k(n+k) \\ -k(n+k) & n(n+k) & nk \\ -nk & -k(n+k) & n(n+k) \end{pmatrix}.$$

Например, при $n = 1$ и $k = 2$ получаем такую ортогональную матрицу:

$$Q = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.3. Ортолатинские целочисленные матрицы 4-го порядка. Такие матрицы можно строить несколькими способами.

Способ 1. Из полуциклических матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -d & a & b & c \\ -c & -d & a & b \\ -b & -c & -d & a \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Строки такой матрицы попарно ортогональны, если выполняется условие

$$a(d-b) = c(b+d) \Leftrightarrow d(a-c) = b(a+c).$$

Одно из целых решений имеет вид

$$a = km,\ b = m - n,\ c = kn,\ d = m + n,\ m, n, k \in \mathbb{Z}.$$

При этом норма матрицы (4) $\mu = \sqrt{(k^2+2)(m^2+n^2)}$; она будет целой, например, при $k=4$ и $m=n$. Другое возможное целое решение:

$$a = k(n+1),\ b = m,\ c = kn,\ d = m(2n+1),\ m, n, k \in \mathbb{Z}.$$

В этом случае норма ортоциклической матрицы

$$\mu = \sqrt{(k^2+2m^2)(2n^2+2n+1)}.$$

Способ 2. Из полуциклических матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -d & -a & b & c \\ -c & d & -a & b \\ -b & c & d & -a \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Эта матрица будет ортоциклической, если $(a-c)(b+d)=0$ и $ac = bd$. Одно из возможных целых решений $a = nk, b = n^2$, $c = nk$, $d = k^2$. Соответствующая ортоциклическая матрица имеет **целую** норму $\mu = n^2 + k^2$. Например, при $n=1$ и $k=2$ получается следующая ортогональная матрица:

$$Q = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Способ 3. В виде блочных матриц $C = \left(\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right)$, где A и B — квадратные ортолатинские матрицы. Собственно, так можно строить ортолатинские матрицы любого четного порядка.

Лемма 5. *Если матрицы A и B ортолатинские одного порядка с нормами λ и μ, а матрица $C = AB^T$ симметрична, то матрица $D = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ также ортолатинская с нормой $\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$.*

Доказательство. В самом деле, по условию,

$$AA^T = \lambda^2 E_n,\ BB^T = \mu^2 E_n,\ C^T = C \Leftrightarrow BA^T = AB^T,$$

тогда

$$DD^T = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T & B^T \\ -B^T & A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^T + BB^T & AB^T - BA^T \\ BA^T - AB^T & BB^T + AA^T \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda^2 + \mu^2)E_n & 0 \\ 0 & (\lambda^2 + \mu^2)E_n \end{pmatrix} = (\lambda^2 + \mu^2)E_{2n}.$$

Замечание. Симметричности матрицы $C = AB^T$ не так уж трудно достичь. Например, если

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}$$

или

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & -a_1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_3 & b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_3 & b_1 \end{pmatrix},$$

то, как легко проверить, матрица AB^T симметрична. Это условие, очевидно, также выполняется, если $A = B$.

Следствие. *При любых числах* a, b, c и d *матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ b & -a & d & c \\ -c & d & a & b \\ d & -c & b & -a \end{pmatrix}$$

ортолатинская, ее норма $\mu = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. *При* $a = b = c = d = 1$ *получается матрица Адамара четвертого порядка*:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.4. Целочисленные ортолатинские матрицы 5-го порядка. Такие матрицы можно строить, исходя, например, из циклической симметричной матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & a & b & c & d \\ d & e & a & b & c \\ c & d & e & a & b \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix}.$$

Ее строки будут попарно ортогональны, если одновременно

$$\begin{cases} ab+bc+cd+de+ae=0, \\ ad+be+ac+bd+ce=0. \end{cases} \qquad (6)$$

Эти условия выполняются, например, если $a=-3,\ b=c=d=e=2$. Норма полученной ортолатинской матрицы равна 5. Соответствующая ортогональная матрица имеет вид

$$Q=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Другие ортогональные матрицы, построенные из ортолатинских матриц, получаются из нее перестановкой строк, столбцов и умножением их на минус один. Приведем еще некоторые решения системы (6), полученные компьютером путем перебора однозначных чисел:

$$a=2,\ b=3,\ c=-6,\ d=e=6;$$

$$a=2,\ b=6,\ c=-4,\ d=-1,\ e=8.^{*}$$

Нормы соответствующих ортолатинских матриц также целые и равны 11.

На первой пятерке чисел $(a=-3,\ b=c=d=e=2)$ остановимся подробно в п. 1.6, так как она допускает обобщение на любое $n \geq 3$.

1.5. Ортолатинские матрицы 6-го порядка. Такие матрицы и вообще матрицы любого четного порядка $2n$ проще всего строить из двух ортолатинских матриц третьего порядка (порядка n) по Лемме 5. В частности, матрица

$$D=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & -b_2 & -b_3 \\ a_3 & a_1 & -a_2 & b_3 & b_1 & -b_2 \\ a_2 & -a_3 & -a_1 & b_2 & b_3 & b_1 \\ -b_1 & b_2 & b_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -b_3 & -b_1 & b_2 & a_3 & a_1 & -a_2 \\ -b_2 & -b_3 & -b_1 & a_2 & -a_3 & -a_1 \end{pmatrix},$$

где $a_1=m(m+n),\ a_2=mn,\ a_3=n(m+n),\ b_1=k(k+l),\ b_2=kl,\ b_3=$

[*] Эти два решения системы (6) мне любезно сообщил Я.Ю. Коновалов.

$=l(k+l),$ при любых $m,n,k,l\in\mathbb{Z}$ является целочисленной ортолатинской матрицей с нормой $\mu=\sqrt{\left(m^2+mn+n^2\right)^2+\left(k^2+kl+l^2\right)^2}$.

1.6. Целочисленные ортолатинские матрицы произвольного порядка. Очевидна следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$. 1. *Циклическая симметричная матрица четного порядка* $n=2m$ $(m\geq 2)$ *вида*

$$F=\begin{pmatrix} 1-m & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & \cdots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-m \end{pmatrix} \qquad (7)$$

полуортогональна, ее норма равна m.

2. *Циклическая симметричная матрица нечетного порядка* $n=2m+1$ $(m\geq 1)$ *вида*

$$G=\begin{pmatrix} 1-2m & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 1-2m & \cdots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & \cdots & 1-2m & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 1-2m \end{pmatrix} \qquad (8)$$

полуортогональна, ее норма равна $2m+1=n$.

3. *Любая матрица, полученная из матриц (7) или (8) перестановкой каких-то строк, столбцов или умножением некоторых из них на минус 1, также будет полуортогональной с такой же нормой.*

2. Аналитическое генерирование симметричных целочисленных матриц с целыми собственными значениями. Такие задачи возникают, если надо составить задачи на приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Желательно, чтобы матрица данной квадратичной формы была целочисленна и имела целые собственные числа.

2.1. Генерирование целочисленных симметричных матриц 3-го порядка с целыми собственными числами. Возьмем матрицу 3-го порядка с попарно ортогональными строками, например,

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Нормируя ее по строкам, получаем ортогональную матрицу Q:

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix},$$

являющуюся матрицей перехода от нового ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, к старому. Понятно, что искомая в задаче матрица перехода от старого базиса к новому есть Q^T.

Возьмем каноническую квадратичную форму от новых переменных X, Y и Z с неопределенными коэффициентами $\Phi(X,Y,Z)=$ $=\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+\lambda_3 Z^2$ и выполним в ней замену переменных:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X=\frac{1}{\sqrt{6}}(x+2y+z), \\ Y=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x-y), \\ Z=\frac{1}{\sqrt{30}}(x+2y-5z). \end{cases}$$

Тогда эта же квадратичная форма от старых переменных x, y и z будет такой:

$$\varphi(x,y,z)=\frac{\lambda_1}{6}(x+2y+z)^2+\frac{\lambda_2}{5}(2x-y)^2+\frac{\lambda_1}{30}(x+2y-5z)^2=$$

$$=\frac{1}{30}\Big[x^2(5\lambda_1+24\lambda_2+\lambda_3)+y^2(20\lambda_1+6\lambda_2+4\lambda_3)+z^2(5\lambda_1+25\lambda_3)+$$

$$+2xy(10\lambda_1-12\lambda_2+2\lambda_3)+2xz(5\lambda_1-5\lambda_3)+2yz(10\lambda_1-10\lambda_3)\Big].$$

Чтобы все коэффициенты матрицы квадратичной формы $\varphi(x,y,z)$ были целыми, выражения во всех квадратных скобках должны быть кратны 30. В итоге получаем систему сравнений по модулю 30 (т. е. в кольце $\mathbb{Z}_{30}$):

$$\left.\begin{aligned} 5\lambda_1+24\lambda_2+\lambda_3 &\equiv 0 \\ 20\lambda_1+6\lambda_2+4\lambda_3 &\equiv 0 \\ 5\lambda_1+25\lambda_3 &\equiv 0 \\ 10\lambda_1-12\lambda_2+2\lambda_3 &\equiv 0 \\ 5\lambda_1-5\lambda_3 &\equiv 0 \\ 10\lambda_1-10\lambda_3 &\equiv 0 \end{aligned}\right\}(\mathrm{mod}\ 30) \Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda_1-6\lambda_2+\lambda_3\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 30) \\ -5\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 15) \\ \lambda_2+5\lambda_3\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 6) \\ \lambda_1-\lambda_3\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 6) \end{cases} \Leftrightarrow$$

Общее решение этой системы зависит от трех независимых целочисленных параметров m, n и k:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1 = 6m + k \\ \lambda_2 = 5n + k \\ \lambda_3 = k\end{array}\right\} m, n, k \in \mathbb{Z}.$$

При этом матрица исходной квадратичной формы такова:

$$A(m, n, k) = \begin{pmatrix} m + 4n + k & 2(m-n) & m \\ 2(m-n) & 4m + n + k & 2m \\ m & 2m & m + k \end{pmatrix}.$$

Варьируя целые m, n, k, можно получить любую комбинацию знаков собственных чисел для одного определенного набора собственных векторов $\mathbf{b}_1 = (1;2;1)^T$, $\mathbf{b}_2 = (2;-1;0)^T$, $\mathbf{b}_3 = (1;2;-5)^T$. Так, если $m = 1$, $n = 2$, $k = -1$, то

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \ \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = 9, \ \lambda = -1,$$

$$\varphi(x, y, z) = 8x^2 + 5y^2 - 4xy + 2xz - 2yz.$$

Следует отметить, что если какие-либо два собственных числа равны между собой (например, если $n = 0$), то при решении задачи (студентом) выбор соответствующих взаимно ортогональных векторов не однозначен, и ответ студента может не совпадать с заготовленным ответом преподавателя. Недостатком этого подхода является то, что для каждой новой ортогональной матрицы надо заново решать систему сравнений. Некоторой компенсацией будет рассмотрение ортогональных матриц, полученных из матриц F или G леммы 6.

2.2. Генерирование целочисленных симметричных матриц произвольного порядка с целыми собственными числами. Ограничимся рассмотрением ортогональных матриц четного порядка $n = 2m$ вида

$$Q = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} 1-m & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-m \end{pmatrix} = Q^T, \qquad (10)$$

или нечетного порядка $n = 2m + 1$ вида

$$Q = \frac{1}{2m+1} \begin{pmatrix} 1-2m & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 1-2m & \cdots & 2 & 2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 2 & 2 & \cdots & 1-2m & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 1-2m \end{pmatrix} = Q^T. \qquad (11)$$

Пусть симметричная матрица A имеет набор целых собственных чисел $\lambda_1, ..., \lambda_n$ и $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Тогда $A = QDQ^T$. Возникает вопрос: при каких целых $\lambda_1, ..., \lambda_n$ симметричная матрица A будет целочисленной? Ответ дают две теоремы:

1. *Для того чтобы матрица $A = QDQ^T$ порядка $n = 2m$, где Q имеет вид* (10)*, была целочисленной, необходимо и достаточно, чтобы для некоторых целых параметров $k_1, k_2, ..., k_{2m} \in \mathbb{Z}$ выполнялось $\lambda_1 = k_1,\ \lambda_2 = k_1 + mk_2,\ \lambda_3 = k_1 + mk_3, ..., \lambda_{2m} = k_1 + mk_{2m}$ и $(k_2 + k_3 + ... + {}$ ${}+ k_{2m})$ было кратно m.*

2. *Для того чтобы матрица $A = QDQ^T$ порядка $n = 2m + 1$, где Q имеет вид* (11)*, была целочисленной, необходимо и достаточно, чтобы для некоторых целых параметров $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{Z}$ выполнялось $\lambda_1 = k_1, \lambda_2 = k_1 + nk_2, \lambda_3 = k_1 + nk_3, ..., \lambda_n = k_1 + nk_n$ и $(k_2 + k_3 + ... + k_n)$ было кратно n.*

Примеры. 1. Пусть $n = 4,\ m = 2.$ Примем $k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_3 = 0,$ $k_4 = -2,$ тогда $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = -3.$ В итоге имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Пусть $n = 5,\ m = 2.$ Примем, например, $k_1 = 2,\ k_2 = 1, k_3 = 0,$ $k_4 = -2$, $k_5 = 1$, тогда $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 7,\ \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = -8,\ \lambda_5 = 7.$ Таким образом, получаем

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Предложенные формулы можно обобщить для случая, когда ортогональная матрица Q получается из матрицы (10) или (11) перестановкой некоторых строк и/или столбцов или умножением их на минус 1.

Заключение. Итак, нами предложен ряд формул с несколькими параметрами, при подстановке вместо которых произвольных целых чисел получается ортогональная матрица произвольного порядка простого вида $\frac{1}{m}P$, где $m \in \mathbb{N}$, P — целочисленная матрица. Кроме того, показано, как строить целочисленные симметричные матрицы любого порядка с данным набором собственных векторов так, чтобы все собственные числа были целыми и имели любые наперед заданные знаки и кратности. Полученные формулы могут быть использованы для генерирования задач по линейной алгебре.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Коновалов Я.Ю., Соболев С.К., Ермолаева М.А. Методические аспекты автоматической генерации задач по линейной алгебре. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 5, URL: http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/ hidden/740.html

[2] Мальцев А.И. *Основы линейной алгебры*. Сер. Учебники для вузов. Москва, Лань, 2009, 480 с.

[3] Гельфанд И.М. *Лекции по линейной алгебре*. Москва, Добросвет-2000, МЦНМО, 2007, 320 с.

[4] Курош А.Г. *Курс высшей алгебры*. Сер. Учебники для вузов. Москва, Лань, 2007, 432 с.

[5] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра*. Сер. Классический университетский учебник. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2010, 280 с.

[6] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2010, 560 с.

[7] Соболев С.К. *Сборник задач по линейной алгебре*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1991, 145 с.

[8] Карнаухов В.М., Русаков А.А. Компьютерный способ подготовки раздаточного материала контрольных работ по математике. *Материалы Междунар. науч.-практ. конф. «Информатизация образования — 2012»*. Орел, ООО «Картуш», 2012, 368 с., с. 99–103.

[9] Карнаухов В.М. *Приложение LATEX. Генератор вариантов контрольных работ*. Saarbrücken, Germany, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012 г.

[10] Кручинин В.В., Морозова Ю.В. *Модели и алгоритмы генерации задач в компьютерном тестировании*. http://www.lib.tpu.ru/fulltext/v/Bulletin_TPU/2004/v307/i5/29.pdf

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Соболев С.К.. Генерирование матриц специального вида: аналитический подход. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 5.
URL: http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/745.html

Соболев Сергей Константинович окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1968 г., аспирантуру в МИАН им. В.А. Стеклова. Канд. физ.-мат. наук, доцент, с 1976 г. работает на кафедре «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда статей по математической логике, методике преподавания математики, методических пособий для студентов и старших школьников. Председатель методической комиссии кафедре «Высшая математика».
e-mail: sergesobolev@mail.ru