УДК 517.373

Методические аспекты вычисления поверхностных интегралов

© Е.Б. Павельева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В работе рассмотрены методические аспекты вычисления поверхностных интегралов первого и второго рода. В учебной литературе по математическому анализу приведены формулы для вычисления поверхностных интегралов по поверхности, заданной параметрическими уравнениями, в громоздком и неудобном для использования виде. Большинство студентов используют только частные случаи этих формул, которые не всегда позволяют оперативно решать задачи. В работе приведены те же формулы для вычисления поверхностных интегралов, что и в учебной литературе, но записанные в простом легко запоминающемся виде. Показано, что частные варианты этих формул непосредственно получаются в процессе решения конкретных задач. Такой подход дает возможность эффективно вычислять поверхностные интегралы. Разобраны примеры вычисления поверхностных интегралов первого и второго рода с использованием различных способов параметризации поверхностей, которые подтверждают полезность предложенной методики.

Ключевые слова: *параметрические уравнения поверхности, главная нормаль, поверхностный интеграл первого рода, поверхностный интеграл второго рода.*

Введение. В учебной литературе [1–6] по математическому анализу приведена следующая информация о способах вычисления поверхностных интегралов первого и второго рода.

1. Пусть S — кусочно-гладкая двухсторонняя поверхность, заданная параметрическими уравнениями:

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v),\ \ z = z(u,v),\ \ (u,v) \in D \subset R^2, \tag{1}$$

в которых функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка в ограниченной замкнутой области D и ранг матрицы $\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$ равен двум. Тогда поверхностный интеграл первого рода от непрерывной во всех точках поверхности S функции $f(x,y,z)$ вычисляется по формуле

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_D f\big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big)\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv, \tag{2}$$

где $E = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u$, $G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v$, $F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$.

Формула (2) упрощается, если поверхность S можно однозначно спроектировать на одну из координатных плоскостей. Пусть поверхность задана уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, где D_{xy} — проекция S на плоскость XOY. Пусть частные производные $z'_x(x, y)$ и $z'_y(x, y)$ непрерывны в области D_{xy}. Тогда формула (2) принимает вид

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{D_{xy}} f\big(x, y, z(x, y)\big)\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dx\, dy. \tag{3}$$

В работе [4] приведена следующая формула для вычисления поверхностного интеграла первого рода. Пусть поверхность определяется уравнением $\mathbf{r} = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$, $(u, v) \in D \subset R^2$. Тогда

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_D f\big(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)\big)\big|[\dot{\mathbf{r}}_u, \dot{\mathbf{r}}_v]\big|\, du\, dv. \tag{4}$$

2. Пусть S — кусочно-гладкая двухсторонняя поверхность, заданная параметрическими уравнениями (1), и в каждой точке ориентированной поверхности S направление нормали задано единичным вектором $\mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$. Поверхностный интеграл второго рода от непрерывного во всех точках поверхности векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$ по ориентированной по-верхности S (поток векторного поля $\mathbf{F}$ через поверхность S) вычисляется по формуле

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = \iint\limits_S (\mathbf{Fn})\, dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS, \tag{5}$$

где

$$\iint\limits_S P\cos\alpha\, dS = \pm\iint\limits_D P\big(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)\big) A(u, v)\, du dv, \tag{6}$$

$$\iint\limits_S Q\cos\beta\, dS = \pm\iint\limits_D Q\big(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)\big) B(u, v)\, du dv, \tag{7}$$

$$\iint\limits_S R\cos\gamma dS = \pm\iint\limits_D R\Big(\big(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)\big) C(u, v)\Big)\, du dv,, \tag{8}$$

$A(u, v) = y'_u z'_v - y'_v z'_u$, $B(u, v) = z'_u x'_v - z'_v x'_u$, $C(u, v) = x'_u y'_v - x'_v y'_u$; знаки перед интегралами определяются заданной стороной поверхности.

Формулы (5)–(8) упрощаются, если поверхность S можно однозначно спроектировать на одну из координатных плоскостей. Пусть поверхность задана уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, где D_{xy} — проекция S на плоскость XOY. Тогда формула (5) принимает вид

$$\iint_S \mathbf{F} d\,\mathbf{S} =$$

$$= \pm \iint_{D_{xy}} \Big(-P\big(x,\, y,\, z(x,\, y)\big) z'_x - Q\big(x,\, y,\, z(x, y)\big) z'_y + R\big(x, y, z(x, y)\big)\Big) dxdy. \tag{9}$$

Формулы (5)–(8) также упрощаются, если поверхностный интеграл второго рода вычислять методом проектирования поверхности на все три координатных плоскости. Предположим, что ориентированную поверхность S можно однозначно спроектировать на все три координатных плоскости. Тогда поверхность задается любым из следующих уравнений: $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$; $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$; $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, где D_{yz}, D_{xz}, D_{xy} — проекции S на плоскости YOZ, XOZ и XOY соответственно. В этом случае вычисление поверхностного интеграла второго рода может быть сведено к вычислению трех двойных интегралов:

$$\iint_S \mathbf{F} d\,\mathbf{S} = \operatorname{sgn}(\cos\alpha) \iint_{D_{yz}} P\big(x(y, z), y, z\big) dydz +$$
$$+ \operatorname{sgn}(\cos\beta) \iint_{D_{xz}} Q\big(x, y(x, z), z\big) dxdz +$$
$$+ \operatorname{sgn}(\cos\gamma) \iint_{D_{xy}} R\big(x, y, z(x, y)\big) dxdy, \tag{10}$$

где α, β, γ — углы между нормалью к поверхности S и осью OX, OY, OZ соответственно.

Вид формул (2), (5)–(8) приводит студентов в ужас. Студенты, как правило, даже не пытаются понять и тем более запомнить громоздкие формулы (2), (5)–(8), и поэтому они практически никогда не используют эти формулы и не параметризуют поверхности. Удобная для вычисления поверхностных интегралов первого рода формула (4) не приведена ни в учебниках [1–3, 5, 6], ни в задачниках [7–9], и студенты, как правило, не знают эту формулу. В задачниках [7–9] и даже в учебных пособиях [10–12] не приведена и удобная для вычисления поверхностных интегралов второго рода формула (9). Студенты обычно используют формулу (3) для вычисления поверхностных интегралов первого рода и формулу (10) для вычисления поверхностных интегралов второго рода. При этом большинство слабых студентов путают форму записи поверхностного интеграла второго рода

$$\iint_S \mathbf{F}d\,\mathbf{S} = \iint_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy \qquad (11)$$

с формулой (10) для вычисления поверхностного интеграла второго рода. Они воспринимают поверхностный интеграл, записанный в форме (11), как сумму трех двойных интегралов и поэтому не учитывают знаки двойных интегралов.

В учебных пособиях и руководствах к решению задач [7, 10–13] при вычислении поверхностных интегралов второго рода акцент делается на формулу (10). В руководствах к решению задач [7, 10, 12] авторы учат студентов искать поверхностные интегралы второго рода **только** методом проектирования поверхности на все три координатных плоскости**,** т. е. учат брать **три двойных интеграла вместо одного** во всех случаях, даже в простейшем случае, когда поверхность является частью плоскости [10, 13]. В итоге вычисление даже простейшего поверхностного интеграла второго рода превращается в громоздкую задачу, и студенты, как правило, считают тему «Поверхностные интегралы» одной из самых сложных в курсе «Кратные интегралы и ряды».

Если в задаче требуется вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_S P(x,y,z)\,dydz$, $\iint_S Q(x,y,z)\,dzdx$ или $\iint_S R(x,y,z)\,dxdy$, то студенты всегда проектируют поверхность на плоскость YOZ, XOZ или XOY соответственно, которую «диктует» форма записи интеграла, а затем используют формулу (10) для вычисления интеграла. Однако возможны такие задачи, в которых удобнее проектировать поверхность на другую плоскость и затем использовать формулу вида (9) или параметризовать поверхность (см. пример 6). Метод решения конкретной задачи определяется заданной поверхностью и подынтегральной функцией, а не формой записи интеграла.

В настоящей работе для вычисления поверхностных интегралов предлагается использовать формулу (4) и формулы (5)–(8), записанные в простом и легко запоминающемся виде. При этом частные случаи этих формул непосредственно получаются в процессе решения конкретных задач. Такой подход дает возможность быстро, легко и красиво вычислять поверхностные интегралы.

Основной результат. Пусть S — кусочно-гладкая двухсторонняя поверхность, заданная параметрическими уравнениями (1).

Главной нормалью к поверхности S называется вектор $\left[\dot{\mathbf{r}}_u,\,\dot{\mathbf{r}}_v\right]$, взятый со знаком «плюс» или «минус»:

$$\mathbf{n}(u,v)=\pm\left[\dot{\mathbf{r}}_u,\,\dot{\mathbf{r}}_v\right]=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}. \qquad (12)$$

1. Поверхностный интеграл первого рода от непрерывной во всех точках поверхности S функции $f(x,y,z)$ будем вычислять по формуле [4]

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS=\iint\limits_D f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\cdot\left|\mathbf{n}(u,v)\right|du\,dv, \quad (13)$$

где $\mathbf{n}(u,v)$ — главная нормаль к поверхности S.

Замечание 1. Если поверхность задана явно, например уравнением $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D_{xy}$, то будем считать, что поверхность задана следующими параметрическими уравнениями (с параметрами x, y): $x=x$, $y=y$, $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D_{xy}$. При этом главная нормаль имеет вид

$$\mathbf{n}(x,y)=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x'_x & y'_x & z'_x\\ x'_y & y'_y & z'_y\end{vmatrix}=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & z'_x\\ 0 & 1 & z'_y\end{vmatrix}=\pm\left(-z'_x,\,-z'_y,\,1\right)$$

и $\left|\mathbf{n}(x,y)\right|=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}$. Для вычисления поверхностного интеграла первого рода воспользуемся формулой (13), которая принимает вид (3).

Замечание 2. Если поверхность задана уравнением $z=z(x,y)$, то главная нормаль к поверхности совпадает с градиентом функции $z-z(x,y)$: $\mathbf{n}(x,y)=\pm\left(-z'_x,\,-z'_y,\,1\right)=\pm\operatorname{grad}\big(z-z(x,y)\big)$, если уравнением $x=x(y,z)$, то $\mathbf{n}(y,z)=\pm\operatorname{grad}\big(x-x(y,z)\big)$, а если уравнением $y=y(x,z)$, то $\mathbf{n}(x,z)=\pm\operatorname{grad}\big(y-y(x,z)\big)$.

2. Поверхностный интеграл второго рода от непрерывного во всех точках поверхности векторного поля $\mathbf{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+$ $+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$ по ориентированной поверхности S (поток векторного поля $\mathbf{F}$ через поверхность S) будем вычислять по формуле

$$\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_D \Big(\mathbf{F}\big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v) \big) \mathbf{n}(u,v) \Big) du\, dv, \qquad (14)$$

где $\mathbf{n}(u,v)$ — главная нормаль к поверхности S, соответствующая заданной стороне поверхности.

Замечание 1. Если поверхность задана явно, например, уравнением $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D_{xy}$, то будем считать, что поверхность задана параметрическими уравнениями (с параметрами x, y): $x = x$, $y = y$, $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D_{xy}$. При этом главная нормаль равна $\mathbf{n}(x,y) = \pm\left(-z'_x, -z'_y, 1\right)$, скалярное произведение

$$(\mathbf{Fn}) = \pm\Big(-P\big(x,y,z(x,y)\big) z'_x - Q\big(x,y,z(x,y)\big) z'_y + R\big(x,y,z(x,y)\big) \Big).$$

Для вычисления поверхностного интеграла второго рода воспользуемся формулой (14), которая принимает вид (9).

Замечание 2. Интегралы вида $\iint_S P\cos\alpha dS$, $\iint_S Q\cos\beta dS$, $\iint_S R\cos\gamma dS$ будем трактовать как поток $\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S}$ векторного поля $\mathbf{F}$ через ориентированную поверхность S, где $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i}$, $\mathbf{F}(x,y,z) = Q(x,y,z)\mathbf{j}$, $\mathbf{F}(x,y,z) = R(x,y,z)\mathbf{k}$ соответственно. В частности, если векторное поле имеет вид $\mathbf{F}(x,y,z) = R(x,y,z)\mathbf{k} = (0, 0, R(x,y,z))$ и если поверхность S задана уравнением $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D_{xy}$, то главная нормаль $\mathbf{n}(x,y) = \pm\left(-z'_x, -z'_y, 1\right)$, скалярное произведение $(\mathbf{Fn}) = \pm R\big(x,y,z(x,y)\big)$ и интеграл

$$\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_S R\cos\gamma dS = \pm \iint_{D_{xy}} R\big(x,y,z(x,y)\big) dx\, dy.$$

При таком подходе достаточно понять и запомнить только три формулы (12)–(14), а все частные варианты этих формул непосредственно получаются в процессе решения конкретных задач.

Рассмотрим примеры вычисления поверхностных интегралов первого и второго рода с использованием формул (12)–(14).

Пример 1. Вычислить интеграл $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$, где S — боковая поверхность конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \in [0, 1]$.

Первый способ. Поверхность задана явно уравнением $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Учитывая, что проекцией поверхности на плоскость XOY является круг с центром в точке O и радиусом $R=1$, зададим поверхность следующими параметрическими уравнениями (с параметрами x, y): $x=x$, $y=y$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in D_{xy}$, где D_{xy} — круг с центром в точке O и радиусом $R=1$. При этом $\mathbf{n}(x,y)=$ $=\pm\operatorname{grad}\left(z-\sqrt{x^2+y^2}\right)=\pm\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$ и $\left|\mathbf{n}(x,y)\right|=$ $=\sqrt{2}$. Тогда интеграл $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}\,dx\,dy$. Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам ρ, φ. Искомый интеграл $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{2}\rho^2 d\rho=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$.

Второй способ. С учетом того, что сечением поверхности плоскостью $z=C$, $C\in[0,1]$, является окружность радиусом z, зададим поверхность следующими параметрическими уравнениями (с параметрами z, φ): $x(z,\varphi)=z\cos\varphi$, $y(z,\varphi)=z\sin\varphi$, $z=z$; $z\in[0,1]$, $\varphi\in[0,2\pi]$. При этом

$$\mathbf{n}(z,\varphi)=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x'_z & y'_z & z'_z\\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi\end{vmatrix}=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1\\ -z\sin\varphi & z\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\pm\left(-z\cos\varphi, -z\sin\varphi, z\right)$$

и $\left|\mathbf{n}(z,\varphi)\right|=\sqrt{2}z$. Тогда, учитывая, что $\sqrt{x^2(z,\varphi)+y^2(z,\varphi)}=z$, получим искомый интеграл:

$$\iint\limits_S\sqrt{x^2+y^2}\,dS=\iint\limits_{\substack{0\le z\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} z\sqrt{2}z\,dz\,d\varphi=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 z^2dz=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

Пример 2. Вычислить $\iint\limits_S\left(y+z+\sqrt{a^2-x^2}\right)dS$, где S — боковая поверхность цилиндра $x^2+y^2=a^2$, заключенная между плоскостями $z=0$ и $z=H$.

Решение. Можно решить эту задачу, разбив поверхность S на две поверхности S_1 и S_2, симметричные относительно плоскости XOZ. При этом поверхность S_1 задается уравнением $y=-\sqrt{a^2-x^2}$, а поверхность S_2 — уравнением $y=\sqrt{a^2-x^2}$. Тогда интеграл по поверхности S вычисляется как сумма интегралов по составляющим ее частям S_1 и S_2 [12]. Однако можно решить эту задачу другим способом.

С учетом того, что сечением поверхности плоскостью $z=C$, $C\in[0,\,H]$, является окружность радиусом $R=a$, зададим поверхность следующими параметрическими уравнениями (с параметрами $z,\ \varphi$): $x(z,\varphi)=a\cos\varphi$, $y(z,\varphi)=a\sin\varphi$, $z=z$; $z\in[0,\,H]$, $\varphi\in[0,\,2\pi]$. При этом

$$\mathbf{n}(z,\varphi)=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x'_z & y'_z & z'_z\\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi\end{vmatrix}=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 0 & 1\\ -a\sin\varphi & a\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=$$
$$=\pm(-a\cos\varphi,-a\sin\varphi,\ 0\ )$$

и $\left|\mathbf{n}(z,\varphi)\right|=a$. Тогда, учитывая, что $y(z,\varphi)+z+\sqrt{a^2-x^2(z,\varphi)}=$ $=a\sin\varphi+z+a\left|\sin\varphi\right|$, получим искомый интеграл:

$$\iint\limits_S\left(y+z+\sqrt{a^2-x^2}\right)dS=\iint\limits_{\substack{0\le z\le H\\ 0\le\varphi\le 2\pi}}\left(a\sin\varphi+z+a\left|\sin\varphi\right|\right)a\,dz\,d\varphi=$$
$$=a\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^H\left(a\sin\varphi+a\left|\sin\varphi\right|+z\right)dz=aH(4a+\pi H).$$

Пример 3. Вычислить $\iint\limits_S\left(x^2+y^2\right)dS$, где S — сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Решение. Зададим поверхность сферы следующими параметрическими уравнениями (с параметрами $\theta,\,\varphi$): $x(\theta,\varphi)=a\sin\theta\cos\varphi$, $y(\theta,\,\varphi)=a\sin\theta\sin\varphi$, $z(\theta,\,\varphi)=a\cos\theta$; $\theta\in[0,\,\pi]$, $\varphi\in[0,\,2\pi]$. При этом

$$\mathbf{n}(\theta,\varphi)=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta\\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi\end{vmatrix}=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta\\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=$$

$$= \pm\left(a^2\sin^2\theta\cos\varphi,\ a^2\sin^2\theta\sin\varphi,\ a^2\sin\theta\cos\theta\right)$$

и $\left|\mathbf{n}(\theta,\varphi)\right| = a^2\sin\theta.$ Тогда, учитывая, что $x^2(\theta,\varphi) + y^2(\theta,\varphi) = = a^2\sin^2\theta,$ получим

$$\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)dS = \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{2\pi} a^2\sin^2\theta a^2\sin\theta\, d\varphi = 2\pi a^4 \int\limits_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta = \frac{8}{3}\pi a^4.$$

Пример 4. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{F}(x,y,z) = y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через внешнюю сторону боковой поверхности параболоида $z = x^2 + y^2,\ z\in[0,\,2].$

Первый способ. Поверхность задана явно уравнением $z = x^2 + y^2.$ Учитывая, что проекцией поверхности на плоскость XOY является круг с центром в точке O и радиусом $R=\sqrt{2},$ зададим поверхность следующими параметрическими уравнениями (с параметрами $x,\ y$): $x = x,\quad y = y,\quad z = x^2+y^2,\quad (x,y)\in D_{xy},$ где D_{xy} — круг с центром в точке O и радиусом $R=\sqrt{2}.$ При этом $\mathbf{n}(x,\ y) = \pm\operatorname{grad}\left(z-\left(x^2+y^2\right)\right) = \pm(-2x,\ -2y,\ 1).$ Поскольку поверхность ориентирована внешней нормалью, то $\mathbf{n}(x,y) = (2x,\ 2y,\ -1)$ и скалярное произведение имеет вид

$$\left(\mathbf{F}\left(x,y,z(x,y)\right)\mathbf{n}(x,y)\right) = 2y^3 - z(x,y) = 2y^3 - \left(x^2+y^2\right).$$

Тогда $\iint\limits_S \mathbf{F}d\mathbf{S} = \iint\limits_{D_{xy}}\left(2y^3-\left(x^2+y^2\right)\right)dx\,dy.$ Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам $\rho,\varphi.$ Учитывая, что $\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\varphi\, d\varphi = 0,$ получим искомый поток:

$$\iint\limits_S \mathbf{F}d\mathbf{S} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(2\rho^3\sin^3\varphi - \rho^2\right)\rho\, d\rho = -2\pi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho^3 d\rho = -2\pi.$$

Второй способ. С учетом того, что сечением параболоида $z = x^2+y^2$ плоскостью $z = C,\ \ C\in[0,2],$ является окружность радиусом $R=\sqrt{z},$ зададим поверхность следующими параметрическими уравнениями (с параметрами $z,\ \varphi$): $x(z,\varphi) = \sqrt{z}\cos\varphi,\quad y(z,\varphi) = = \sqrt{z}\sin\varphi,\ \ z = z;\ \ z\in[0,2],\ \ \varphi\in[0,\,2\pi].$ При этом

$$\mathbf{n}(z,\varphi)=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ x'_z&y'_z&z'_z\\ x'_\varphi&y'_\varphi&z'_\varphi\end{vmatrix}=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{1}{2\sqrt{z}}\cos\varphi&\frac{1}{2\sqrt{z}}\sin\varphi&1\\ -\sqrt{z}\sin\varphi&\sqrt{z}\cos\varphi&0\end{vmatrix}=$$

$$=\pm\left(-\sqrt{z}\cos\varphi,\ -\sqrt{z}\sin\varphi,\ \frac{1}{2}\right).$$

Поскольку поверхность ориентирована внешней нормалью, то $\mathbf{n}(z,\varphi)=\left(\sqrt{z}\cos\varphi,\ \sqrt{z}\sin\varphi,\ -\frac{1}{2}\right)$ и скалярное произведение имеет вид

$$\Big(\mathbf{F}\big(x(z,\varphi),\ y(z,\varphi),\ z\big)\mathbf{n}(z,\varphi)\Big)=$$

$$=y^2(z,\ \varphi)\sqrt{z}\sin\varphi-\frac{1}{2}z=z^{\frac{3}{2}}\sin^3\varphi-\frac{1}{2}z.$$

Тогда $\iint\limits_S \mathbf{F}d\mathbf{S}=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(z^{\frac{3}{2}}\sin^3\varphi-\frac{1}{2}z\right)dz.$ Учитывая, что $\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\varphi\, d\varphi=0,$ получим $\iint\limits_S \mathbf{F}d\mathbf{S}=-\pi\int\limits_0^2 zdz=-2\pi.$

Пример 5. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{F}(x,y,z)=$ $=-x^2z\mathbf{i}+y\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ через внешнюю сторону части поверхности эллипсоида $4x^2+y^2+4z^2=4,$ расположенной в первом октанте.

Решение. Зададим поверхность эллипсоида $x^2+\frac{y^2}{2^2}+z^2=1$ следующими параметрическими уравнениями (с параметрами $\theta,\ \varphi$):
$x(\theta,\ \varphi)=\sin\theta\cos\varphi,\quad y(\theta,\varphi)=2\sin\theta\sin\varphi,\quad z(\theta,\varphi)=\cos\theta;\quad \theta\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right],$ $\varphi\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right].$ При этом

$$\mathbf{n}(\theta,\varphi)=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ x'_\theta&y'_\theta&z'_\theta\\ x'_\varphi&y'_\varphi&z'_\varphi\end{vmatrix}=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \cos\theta\cos\varphi&2\cos\theta\sin\varphi&-\sin\theta\\ -\sin\theta\sin\varphi&2\sin\theta\cos\varphi&0\end{vmatrix}=$$

$$=\pm\left(2\sin^2\theta\cos\varphi,\ \sin^2\theta\sin\varphi,\ 2\sin\theta\cos\theta\right).$$

Поскольку поверхность ориентирована внешней нормалью, то при $\theta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ угол между главной нормалью и вектором $\mathbf{k}$ острый.

Поэтому $\mathbf{n}(\theta, \varphi) = \left(2\sin^2\theta\cos\varphi,\ \sin^2\theta\sin\varphi,\ 2\sin\theta\cos\theta\right)$ и скалярное произведение имеет вид

$$(\mathbf{Fn}) = -x^2(\theta,\varphi)z(\theta,\varphi)2\sin^2\theta\cos\varphi + y(\theta,\varphi)\sin^2\theta\sin\varphi + 4\sin\theta\cos\theta =$$

$$= -2\sin^4\theta\cos\theta\cos^3\varphi + 2\sin^3\theta\sin^2\varphi + 2\sin 2\theta.$$

Тогда

$$\iint\limits_S \mathbf{F}d\mathbf{S} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\sin^4\theta\cos\theta\cos^3\varphi + 2\sin^3\theta\sin^2\varphi + 2\sin 2\theta\right) d\varphi = \frac{4}{3}\pi - \frac{4}{15}.$$

Пример 6. Вычислить $\iint\limits_S (x-2y)dydz$, где S — внешняя сторона на боковой поверхности параболоида $z = \frac{H}{R^2}\left(x^2+y^2\right),\ z \in [0,\ H]$.

Первый способ. Большинство студентов и преподавателей будут решать эту задачу методом проектирования поверхности на плоскость YOZ. Проекцией поверхности на плоскость YOZ является область D_{yz}, ограниченная параболой $z = \frac{H}{R^2}y^2$ и прямой $z = H$. Разобьем поверхность S на две поверхности S_1 и S_2, симметричные относительно плоскости YOZ. При этом поверхность S_1 задается уравнением $x = \sqrt{\frac{R^2}{H}z - y^2}$, $(y,\ z) \in D_{yz}$, а поверхность S_2 — уравнением $x = -\sqrt{\frac{R^2}{H}z - y^2}$, $(y, z) \in D_{yz}$. Учитывая, что $\cos\alpha > 0$ на поверхности S_1 и $\cos\alpha < 0$ на поверхности S_2, используя формулу (10), получим

$$\iint\limits_S (x-2y)dydz = \iint\limits_{S_1}(x-2y)dydz + \iint\limits_{S_2}(x-2y)dydz =$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}}\left(\sqrt{\frac{R^2}{H}z - y^2} - 2y\right)dydz - \iint\limits_{D_{yz}}\left(-\sqrt{\frac{R^2}{H}z - y^2} - 2y\right)dydz =$$

$$= 2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{\frac{R^2}{H}z - y^2}\ dydz = 2\int\limits_{-R}^{R}dy\int\limits_{\frac{H}{R^2}y^2}^{H}\sqrt{\frac{R^2}{H}z - y^2}\,dz = \frac{4H}{3R^2}\int\limits_{-R}^{R}\left(R^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}dy.$$

Вычислим последний интеграл, применив тригонометрическую подстановку $y = R\sin t$. Итак,

$$\frac{4H}{3R^2}\int\limits_{-R}^{R}\left(R^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}dy = \frac{4HR^2}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt = \frac{1}{2}\pi HR^2.$$

Замечание. Вычисление интеграла $\int\limits_{-R}^{R}\left(R^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}dy$ может вызвать затруднение у слабых студентов.

Второй способ. Данный интеграл равен потоку $\iint\limits_S \mathbf{F}d\mathbf{S}$ векторного поля $\mathbf{F}(x,y,z)=(x-2y)\mathbf{i}$ через ориентированную поверхность S, которая задана явно уравнением $z=\frac{H}{R^2}\left(x^2+y^2\right)$. Учитывая, что при $z\le H$ проекцией поверхности на плоскость XOY является круг с центром в точке O и радиусом R, зададим поверхность следующими параметрическими уравнениями (с параметрами $x,\ y$): $x=x,\quad y=y,$ $z(x,y)=\frac{H}{R^2}\left(x^2+y^2\right),\ (x,y)\in D_{xy},$ где D_{xy} — круг с центром в точке O и радиусом $R.$ При этом

$$\mathbf{n}(x,y)=\pm\,\mathrm{grad}\left(z-\frac{H}{R^2}\left(x^2+y^2\right)\right)=\pm\left(-\frac{2H\,x}{R^2},\ -\frac{2H\,y}{R^2},\ 1\right).$$

Поскольку поверхность ориентирована внешней нормалью, то $\mathbf{n}(x,y)=\left(\frac{2H\,x}{R^2},\ \frac{2H\,y}{R^2},\ -1\right)$ и скалярное произведение имеет вид

$$\left(\mathbf{F}\left(x,y,z(x,y)\right)\mathbf{n}(x,y)\right)=(x-2y)\frac{2H\,x}{R^2}=\frac{2H}{R^2}\left(x^2-2xy\right).$$

Тогда $\iint\limits_S \mathbf{F}d\mathbf{S}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{2H}{R^2}\left(x^2-2xy\right)dx\,dy.$ Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам $\rho,\ \varphi.$ Искомый интеграл

$$\iint\limits_S \mathbf{F}d\mathbf{S}=\frac{2H}{R^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\left(\rho^2\cos^2\varphi-2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\right)\rho\,d\rho=$$

$$=\frac{HR^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos^2\varphi-\sin 2\varphi\right)d\varphi=\frac{1}{2}\pi HR^2.$$

Третий способ. Учитывая, что сечением параболоида $z(x,y)=$ $=\dfrac{H}{R^2}\left(x^2+y^2\right)$ плоскостью $z=C,\ \ C\in[0,H],$ является окружность радиусом $\dfrac{R}{\sqrt{H}}\sqrt{z},$ зададим поверхность следующими параметрическими уравнениями (с параметрами z, φ): $x(z,\varphi)=\dfrac{R}{\sqrt{H}}\sqrt{z}\cos\varphi,$ $y(z,\varphi)=\dfrac{R}{\sqrt{H}}\sqrt{z}\sin\varphi,\ \ z=z;\ \ z\in[0,H],\ \ \varphi\in[0,\,2\pi].$ При этом

$$\mathbf{n}(z,\varphi)=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x'_z & y'_z & z'_z\\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi\end{vmatrix}=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{R}{2\sqrt{H}\sqrt{z}}\cos\varphi & \dfrac{R}{2\sqrt{H}\sqrt{z}}\sin\varphi & 1\\ -\dfrac{R}{\sqrt{H}}\sqrt{z}\sin\varphi & \dfrac{R}{\sqrt{H}}\sqrt{z}\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\pm\left(-\frac{R}{\sqrt{H}}\sqrt{z}\cos\varphi,\ -\frac{R}{\sqrt{H}}\sqrt{z}\sin\varphi,\ \frac{R^2}{2H}\right).$$

Поскольку поверхность ориентирована внешней нормалью, то $\mathbf{n}(z,\varphi)=\left(\dfrac{R}{\sqrt{H}}\sqrt{z}\cos\varphi,\ \dfrac{R}{\sqrt{H}}\sqrt{z}\sin\varphi,\ -\dfrac{R^2}{2H}\right)$ и скалярное произведение имеет вид

$$\Big(\mathbf{F}\big(x(z,\varphi),\ y(z,\varphi),\ z\big)\mathbf{n}(z,\varphi)\Big)=\big(x(z,\varphi)-2y(z,\ \varphi)\big)\frac{R}{\sqrt{H}}\sqrt{z}\cos\varphi=$$

$$=\frac{R^2}{H}z\left(\cos^2\varphi-\sin 2\varphi\right).$$

Тогда искомый интеграл

$$\iint\limits_S \mathbf{F}d\mathbf{S}=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{H}\frac{R^2}{H}z\left(\cos^2\varphi-\sin 2\varphi\right)dz=$$

$$=\frac{R^2H}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos^2\varphi-\sin 2\varphi\right)d\varphi=\frac{1}{2}\pi HR^2.$$

Заключение. В работе рассмотрены методы вычисления поверхностных интегралов первого и второго рода. Приведены формулы (12)–(14), удобные для вычисления поверхностных интегралов первого и второго рода, и разобраны примеры вычисления поверхностных интегралов с использованием различных способов параметризации поверхностей.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Математика в техническом университете*, 2008, вып. 7.

[2] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 3. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2003, 728 с.

[3] Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов*. Т. 2. Москва, Интеграл-Пресс, 2009, 544 с.

[4] Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т. 3: *Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного*. Москва, Дрофа, 2004, 512 с.

[5] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа*. Ч. 2. Москва, Наука, 1998, 448 с.

[6] Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа*. Т. 2. Москва, Высшая школа, 1981, 584 с.

[7] *Сборник задач по математике для втузов*. Ефимов А.В., Демидович Б.П., ред. Т. 2. Москва, Наука, 1986, 368 с.

[8] *Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов*. Демидович Б.П., ред. Москва, Астрель, 2005, 417 с.

[9] Демидович Б.П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. Москва, Астрель, 2007, 558 с.

[10] Осипова М.З. Теория поля. *Учебное пособие по выполнению контрольного задания*. Москва, Изд-во МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1978, 65 с.

[11] Белов В.Н., Неклюдов А.В., Титов К.В. *Поверхностные интегралы. Метод. указания к выполнению типового расчета*. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009, 32 с.

[12] Запорожец Г.И. *Руководство к решению задач по математическому анализу*. Санкт-Петербург, Лань, 2010, 464 с.

[13] Краснов М.Л., Киселев А.И., ред. *Вся высшая математика*. Т. 4. Москва, УРСС, 2005, 352 с.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Павельева Е.Б. Методические аспекты вычисления поверхностных интегралов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 5. URL: http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/744.html

Павельева Елена Борисовна родилась в 1962 г., окончила факультет Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных статей по теории переноса излучения. e-mail: E.Pavelyeva@yandex.ru