УДК 51.74

Аксиоматика Вейля — Рашевского в курсах аналитической геометрии и линейной алгебры

© В.В. Кузнецов, А.В. Мастихин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В данной статье рассматривается аксиоматика Вейля — Рашевского, адаптированный вариант точечно-векторной аксиоматики аффинного пространства. Эта аксиоматика лежит в основе аналитической геометрии и алгебры конечномерных векторных пространств и дает возможность строгого вывода традиционно изучаемых свойств векторной алгебры. Приводится система аксиом, состоящая из четырех частей. Кратко рассматривается набор доказываемых при их помощи утверждений, приводятся примеры доказательств. Понятия аффинных многообразий (n-мерных плоскостей) приобретают геометрический смысл обобщений прямой и плоскости. В этой связи рассматривается задача перехода от параметрического уравнения к заданию многообразия системой, приводится пример. Также даются определения геометрической зависимости точек, выпуклой оболочки, симплекса.

Ключевые слова: *аналитическая геометрия, линейная алгебра, точечно-векторная аксиоматика, конечномерные плоскости, барицентрические координаты.*

Введение. Впервые Д. Гилберт [1] предложил непротиворечивую, независимую и полную систему аксиом геометрии. Вариант этой аксиоматики Г. Вейля, модифицированный П. К. Рашевским, считается общепринятым ныне в учебниках для университетского курса [2], [3]. В учебниках, написанных для технических вузов, в лучшем случае несколько слов об аксиоматике встречаются в виде дополнительного материала. Аксиоматический подход позволяет построить геометрию строго дедуктивно, выяснить основные идеи, делающие математику единой наукой. Применение такой методики было начато в [4], [5] и [6] и оказалось весьма целесообразным.

В данной работе, не претендуя на полноту изложения, даются основы методики, ссылки и поэтапный план лекций по аналитической геометрии и связанной с ней части линейной алгебры, который призван дополнить и углубить стандартные курсы, не претендуя на их замену.

1. Аксиоматика. В качестве первоначальных понятий здесь используются точка и вектор. Введем обозначения для основных множеств и их элементов:

1) **T** — множество точек, т. е. его элементы называются точками, $\mathrm{T} = \{A, B, C, \ldots\}$;

2) **V** — множество векторов, т. е. его элементы называются векторами, $\mathrm{V} = \{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots\}$;

3) R — множество действительных чисел.

В качестве основных соответствий (операций) используются:

f_1 — откладывание вектора от точки;

f_2 — умножение вектора на число;

f_3 — линейная зависимость (независимость векторов);

f_4 — скалярное произведение двух векторов.

Эти соответствия описывают четыре группы аксиом:

1) аксиомы связи между точками и векторами (или просто аксиомы связи);

2) аксиомы умножения вектора на число;

3) аксиомы размерности;

4) аксиомы скалярного произведения.

Вторая и четвертая группы аксиом хорошо знакомы из линейной алгебры. Первая группа состоит из четырех аксиом.

Аксиома 1.1. *Существует, по крайней мере, одна точка, т. е.* $\mathbf{T} \neq \varnothing$.

Аксиома 1.2 (аксиома задания вектора). *Каждая упорядоченная пара точек* $A \in \mathbf{T}$ *и* $B \in \mathbf{T}$ *определяет единственный вектор* $\overline{a} \in \mathbf{V}$.

Аксиома задает соответствие $f_1 : \mathbf{T} \times \mathbf{T} \to \mathbf{V}$. При этом точки A и B называются, соответственно, началом и концом этого вектора, а сам он обозначается как $\overline{a} = \overline{AB}$.

Аксиома 1.3 (аксиома откладывания вектора от точки). *Для каждого вектора* $\overline{a} \in \mathrm{V}$ *и каждой точки* $A \in \mathrm{T}$ *существует единственная точка* $B \in \mathrm{T}$, *такая, что* $\overline{a} = \overline{AB}$.

Мы можем говорить, что это вектор, *отложенный* от точки A (и имеющий конец в точке B), в отличие от абстрактного *свободного* вектора, рассматриваемого как элемент из $\mathbf{V}$ и допускающего различные реализации операции откладывания.

Аксиома 1.4 (аксиома параллелограмма). *Если векторы* $\overline{AB}$ *и* $\overline{CD}$ *равны, то векторы* $\overline{AC}$ *и* $\overline{BD}$ *также равны.*

Наглядный смысл аксиомы в том, что четырехугольник $ABCD$, на сторонах которого расположена пара векторов $\overline{AB} = \overline{CD}$, является параллелограммом.

Далее следуют очевидные определения нулевого вектора, противоположного вектора, сложения двух и более векторов, коммутативность и ассоциативность сложения векторов, правило треугольника и многоугольника, доказываются корректность определений и свойства определенных объектов и операций такие, как сложение с нулевым вектором, сложение противоположных векторов, определяется вычитание векторов, дается правило вычитания. В качестве примера типичных рассуждений рассмотрим доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Для любых точек* $A, B \in \mathbf{T}$ *векторы* $\overline{AA}$ *и* $\overline{BB}$ *равны между собой.*

Доказательство. Пусть A и B — произвольные точки. Покажем, что $\overline{AA} = \overline{BB}$. Действительно, каждый вектор, в частности $\overline{AB}$, равен самому себе. Применяя к тождеству $\overline{AB} = \overline{AB}$ аксиому параллелограмма, получаем нужное утверждение.

Вторая группа состоит из пяти аксиом.

Аксиома 2.1. *Каждой паре* $\overline{a} \in \mathbf{V}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ *соответствует единственный вектор* $\overline{b} = \lambda\overline{a}$, *называемый произведением вектора на число*.

Аксиома 2.2. *Умножение вектора на единицу не меняет его*.

Аксиома 2.3. *Умножение вектора на число дистрибутивно относительно числового множителя:*

$$(\forall\lambda \in \mathrm{R})\ (\forall\overline{a} \in \mathrm{V}),\ \ \lambda\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}.$$

Аксиома 2.4. *Умножение вектора на число дистрибутивно относительно векторного множителя*:

$$\left(\forall\lambda, \mu \in \mathrm{R}\right)\left(\forall\overline{a} \in \mathrm{V}\right), \left(\lambda + \mu\right)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}.$$

Аксиома 2.5. *Умножение вектора на число ассоциативно относительно числового множителя*:

$$\left(\forall\lambda, \mu \in \mathrm{R}\right)\left(\forall\overline{a} \in \mathrm{V}\right), \left(\lambda\mu\right)\overline{a} = \left(\lambda\mu\right)\overline{a}.$$

Далее доказывается теорема о произведении нулевого вектора на любое число и числа 0 на любой вектор, теорема о противоположном векторе для вектора, умноженного на число, дается определение сонаправленных векторов и направления, коллинеарных или параллельных векторов.

Третья группа аксиом позволяет классифицировать векторные множества. Дается определение линейной комбинации векторов, определение линейно зависимой системы векторов дается в двух вариантах и доказывается их эквивалентность, доказывается теорема о линейно зависимой подсистеме векторов и ее следствие о линейной зависимости системы векторов, содержащей нулевой вектор.

Аксиома 3.1. *Существует три линейно независимых вектора*.

Аксиома 3.2. *Всякие четыре вектора линейно зависимы.*

Рассмотренные три группы аксиом (откладывания вектора, умножения вектора на число, размерности) позволяют дать определение трехмерного, точечно-векторного, или аффинного, пространства. Однако, меняя максимальное число линейно независимых и линейно зависимых векторов в аксиомах 3.1 и 3.2, получаем аффинное пространство нужной размерности.

Определение. ***Аффинное пространство*** *— это множество точек и векторов, элементы которого находятся в отношениях, описываемых операциями откладывания и сложения векторов, а также умножения вектора на число*.

Отметим, что первыми примерами являются точка — это аффинное пространство нулевой размерности (ср. с [6]) и все объемлющее пространство. Далее дается определение базиса аффинного пространства, теорема о единственности разложения по данному базису, определение координат вектора, определение аффинного базиса, определение координат точки в аффинном базисе, доказывается теорема о координатах отложенного вектора и теоремы о координатах суммы векторов и вектора, умноженного на число.

Скалярное произведение задается аксиоматически.

Аксиома 4.1. *Для любых двух векторов* $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbf{V}$ *существует единственное число* $\left(\overline{a}, \overline{b}\right)$, *называемое скалярным произведением.*

Аксиома 4.2. *Скалярное произведение коммутативно,* $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left(\overline{b}, \overline{a}\right)$.

Аксиома 4.3. *Числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения,* $(\forall \lambda \in \mathrm{R}) \left(\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathrm{V}\right)$, $\left(\lambda \overline{a}, \overline{b}\right) = \lambda \left(\overline{a}, \overline{b}\right)$.

Аксиома 4.4. *Скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов,* $\left(\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathrm{V}\right)$, $\left(\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}\right) = \left(\overline{a}, \overline{c}\right) + \left(\overline{b}, \overline{c}\right)$.

Аксиома 4.5. *Скалярный квадрат неотрицателен* $\left(\overline{a}, \overline{a}\right) \geq 0$, *причем* $\left(\overline{a}, \overline{a}\right) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{a} = \overline{0}$.

При определении евклидова пространства обычно скалярное произведение задается в виде аксиом. Далее следуют метрические понятия, такие как длина вектора, орт, расстояние между точками, угол между векторами (и неравенство Коши — Буняковского), ортогональность векторов, ортонормированная система векторов, декартова система координат, проекция вектора на направление и их свойства.

2. Прямая и плоскость. Рассмотрим с позиций аффинного пространства понятия прямой и плоскости и их свойства, принимаемые в школьном (и не только) курсе за аксиомы.

Определение. *Пусть заданы точка* $A \in \mathbf{T}$ *и ненулевой вектор* $\overline{a} \in \mathbf{V}$, *по аксиоме откладывания* $\overline{a} = \overline{AB}$ *для* B *из* $\mathbf{T}$. ***Прямой*** (AB) *называется множество всех точек* M, *для которых векторы* $\overline{AB}$, $\overline{AM}$ *линейно зависимы,* $\overline{AB} \parallel \overline{AM}$.

Определение. *Пусть заданы точка* $A \in \mathbf{T}$ и *линейно независимые векторы* $\overline{a}, \overline{b} \in \mathrm{V}$, *по аксиоме откладывания* $\overline{a} = \overline{AB}$, $\overline{a} = \overline{AC}$ *для* B, C *из* $\mathbf{T}$. ***Плоскостью*** (ABC) *называется множество всех точек* M *, для которых векторы* $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AM}$ *линейно зависимы.*

Как видим, в обоих определениях объект задается точкой и базисом, из одного и из двух векторов соответственно, что и выражает ***векторное уравнение прямой*** $(AB) = \{M, M \in \mathbf{T}\text{: } \exists\lambda \in \mathbf{R}\ \overline{AM} = \lambda\overline{a}\}$ и ***векторное уравнение плоскости*** $(ABC) = \{M, M \in \mathbf{T}\text{: } \exists\lambda, \mu \in \mathrm{R}\ \overline{AM} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}\}$.

Далее следуют: теорема о трех точках, не лежащих на одной прямой, теорема о точке и двух некомпланарных векторах, определяется понятие компланарности векторов, доказывается признак компланарности трех векторов, теорема о прямой, проходящей через две точки плоскости.

Параллельность плоскостей в пространстве (и прямых в плоскости) определим традиционно.

Определение. *Плоскости называются* ***параллельными****, если они не пересекаются.*

Признак параллельности плоскостей формулируется тогда следующим образом.

Теорема (признак параллельности двух плоскостей). *Пусть даны две плоскости,* α *и* β, *заданные каждая одной точкой и парой векторов базиса, для* α *это* $\{M, \overline{a}, \overline{b}\}$, *для* β *—* $\{N, \overline{c}, \overline{d}\}$. *Плоскости параллельны тогда и только тогда, когда векторы* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ *компланарны.*

Докажем необходимость. Если векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ некомпланарны, то можно набрать из них базис в пространстве, пусть это $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, тогда вектор $\overline{MN}$ можно выразить через элементы этого базиса, $\overline{MN} = x\overline{a} + y\overline{b} + z\overline{c}$. Обозначим буквой D точку, являющуюся концом вектора $\overline{MD} = \overline{MN} - z\overline{c} = x\overline{a} + y\overline{b}$, тогда точка D лежит в плоскости α, поскольку $x\overline{a} + y\overline{b} \in \alpha$, и также лежит в плоскости β, поскольку $\overline{ND} = \overline{NM} + \overline{MD} = \overline{NM} + \overline{MN} - z\overline{c} \in \beta$, т. е. $D \in \alpha \cap \beta$, что невозможно.

Достаточность доказывается тем же способом: предположив, что плоскости пересекаются, приходим к возможности выразить вектор через векторы системы, что влечет ее некомпланарность.

Аналогично формулируется и доказывается признак параллельности двух прямых.

Далее следует следствие о компланарности двух прямых, определение скрещивающихся прямых, критерий скрещивания двух прямых, теорема об общих точках двух плоскостей, пересекающихся плоскостей, критерий параллельности прямой и плоскости (определение параллельности прямой и плоскости вновь как не имеющих общих точек), как следствие, — школьный признак параллельности прямой и плоскости, теорема о пересечении двух параллельных плоскостей третьей.

Во всех рассматриваемых утверждениях и их доказательствах подчеркивается эффективность задания прямых и плоскостей точкой и базисом, состоящим из одного или двух векторов соответственно, т. е. идея, лежащая в определении аффинных многообразий. Для решения задач еще эффективнее задавать плоскость точкой и нормалью, которая может быть получена как векторное произведение опять-таки векторов базиса в плоскости.

3. Аффинные многообразия или многомерные плоскости в $\mathbf{R}^n$. Точечно-векторная аксиоматика естественным образом готовит к восприятию многомерных обобщений интуитивно ясных понятий прямой и плоскости. После определения линейного векторного пространства, его примеров и свойств дается следующее.

Определение. Пусть *в аффинном пространстве задана точка* $P \in \mathbf{T}$ *и множество векторов* $L^k \subseteq \mathbf{V}$, *составляющее линейное векторное пространство размерности* $k, k \le n$, *тогда k-**мерной плоскостью**, или **аффинным многообразием размерности** k, называется множество всех точек* M *, для которых вектор* $\overline{PM} \in L^k$.

Иными словами, вектор, отложенный от точки P, лежит в линейном пространстве L^k. Обозначение $\pi^k = P + L^k$ кратко повторяет определение; если в L^k зафиксирован базис $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k\}$, то

$$\pi^k = P + L^k = \{M, M \in \mathbf{T} : \exists\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}, \overline{PM} = \lambda\overline{e}_1 + \cdots + \lambda_k\overline{e}_k\}.$$

Пространство L^k [2] часто называют ***касательным пространством*** [7] к многообразию π^k.

Размерностью многообразия (плоскости) естественно назвать размерность соответствующего ему линейного пространства, $\dim \pi^k = \dim L^k$.

Первыми примерами являются точка — это аффинная плоскость нулевой размерности (ср. с [6]) и все объемлющее пространство. Основным примером является, конечно, множество всех решений (общее решение) линейной неоднородной системы уравнений, как алгебраических, так и дифференциальных.

Рассмотрим взаимное расположение многомерных плоскостей. Здесь появляются задачи, решение которых дает возможность применения теории систем линейных алгебраических уравнений.

Определение. *Плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.*

Теорема. *Плоскости* $\pi_1^k = M + L^k$ *и* $\pi_2^m = N + L^m$, $k \le m \le n$, *параллельны тогда и только тогда, когда* $L^k \subseteq L^m$.

Теорема. *Плоскость* $\pi_1^k = M + L^k$ *содержится в плоскости* $\pi_2^m = N + L^m$, $k \le m \le n$, *тогда и только тогда, когда* $L^k \subseteq L^m$ *и* $M \in \pi_2^m$.

Теорема. *Плоскости* $\pi_1^k = M + L^k$ *и* $\pi_2^m = N + L^m$ *совпадают тогда и только тогда, когда* $k = m \le n$, $L^k = L^m$, $M \in \pi_2^k$ *и* $N \in \pi_1^k$.

Задача. *Для двух плоскостей найти минимальную плоскость, содержащую обе плоскости.*

Решение. Если плоскости $\pi_1^k = M + L^k$ и $\pi_2^m = N + L^m$ имеют общую точку, то она может быть взята за начальную, и задача сводится к вычислению линейной оболочки двух имеющихся линейных пространств $\operatorname{lin}\left\{L_1^k \cup L_2^m\right\}$. Если же начальные точки различны, то возьмем любую из них за начальную точку и $\pi = M + \operatorname{lin}\left\{\overline{MN} \cup L_1^k \cup L_2^m\right\}$. Полученную плоскость будем называть ***аффинной оболочкой*** плоскостей и тоже обозначим $\pi = \operatorname{lin}\left\{\pi_1^k \cup \pi_2^m\right\}$. Кроме того, можно рассматривать аффинные оболочки точек многообразия [8], возникает понятие геометрической зависимости точек, что будет рассмотрено в п. 4.

Теорема. *Размерность аффинной оболочки* $\operatorname{lin}\left\{\pi_1^k \cup \pi_2^m\right\}$ *связана с размерностями плоскостей* π_1^k *и* π_2^m *следующим образом* $\dim \operatorname{lin}\left\{\pi_1^k \cup \pi_2^m\right\} \le \dim \pi_1^k + \dim \pi_2^m + 1 = k + m + 1$.

Теорема. *Если плоскости* π_1^k *и* π_2^m *имеют общую точку, то верна следующая формула* $\dim \operatorname{lin}\left\{\pi_1^k \cup \pi_2^m\right\} = \dim \pi_1^k + \dim \pi_2^m - \dim\left\{\pi_1^k \cap \pi_2^m\right\}$ [9].

Задача. *Найти плоскость, проходящую через заданные точки* $P_0,\ P_1,\ \ldots, P_k$.

Решение. Достаточно записать параметрическое уравнение плоскости для переменной точки P: $P = P_0 + \lambda_1 \overline{P_0 P_1} + \lambda_2 \overline{P_0 P_1} + \cdots + \lambda_k \overline{P_0 P_k}$, причем размерность получаемой плоскости равна числу линейно независимых векторов системы $\overline{P_0 P_1},\ \overline{P_0 P_1},\ \ldots,\ \overline{P_0 P_k}$.

Параметрическое уравнение одномерной плоскости, проходящей через две заданные точки P_0, P_1, т. е. прямой (P_0P_1), не изменилось: $(P_0P_1) = P_0 + \lambda\overline{P_0P_1}$. Следующая теорема предложена в [10] в виде задачи.

Теорема. *Свойство содержать вместе с двумя точками всю прямую является характеристическим для многомерной плоскости.*

Задача. *Записать параметрическое уравнение плоскости по заданной системе линейных алгебраических уравнений.*

Решение состоит в применении метода Гаусса, нахождении частного решения неоднородной системы и фундаментальной системы решений однородной системы, первое задает радиус-вектор начальной точки, второе — базис линейного пространства.

Задача. *По заданному параметрическому уравнению записать уравнение плоскости в виде системы линейных алгебраических уравнений.*

Решение. Для одномерного случая прямой запишем параметрическое уравнение в координатной форме и выразим параметр через координаты радиус-вектора $\overline{OP_0} = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)$ и вектора $\overline{P_0P_1} = \left(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n\right)$: $\lambda = \dfrac{x^1 - x_0^1}{x_1^1 - x_0^1} = \dfrac{x^2 - x_0^2}{x_1^2 - x_0^2} = \cdots = \dfrac{x^n - x_0^n}{x_1^n - x_0^n}$.

В случае k-мерной плоскости из системы уравнений, представляющей координатную форму параметрического уравнения, следует исключить параметры. Если число параметров равно k (считаем, что вектора, $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_0P_1}$, …, $\overline{P_0P_k}$ линейно независимы), то ранг матрицы системы равен k, в ней найдется ненулевой минор k-порядка, из него параметры единственным образом выражаются через переменные и числовые величины. Затем, подставив эти выражения в оставшиеся $n-k$ уравнений, получаем искомую систему.

Пример. Для точек $P_0 = (1, 2, 3, 4)$, $P_1 = (0, -2, -2, -3)$, $P_2 = (-1, -1, -2, -3)$ находим координаты векторов и составляем параметрическое уравнение плоскости

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

далее в системе

$$\begin{cases} x = 1 + s, \\ y = 2 + t, \\ z = 3 + s + t, \\ w = 4 + s + t, \end{cases}$$

из верхнего правого минора находим $s = x - 1$ и $t = y - 2$, подставим в два нижних уравнения и получим

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x + y - w = -1. \end{cases}$$

Параметрическое уравнение (n – 1)-одномерной плоскости, или ***гиперплоскости***, $P = P_0 + \lambda_1 \overline{P_0 P_1} + \lambda_2 \overline{P_0 P_1} + ... + \lambda_{n-1} \overline{P_0 P_{n-1}}$ может быть записано в виде системы, состоящей из одного уравнения, коэффициенты которого задают вектор нормали к гиперплоскости. Ортогональное дополнение, разложение в прямую сумму, коразмерность рассматривать здесь не будем (см. [11–13]).

4. Геометрическая независимость точек и барицентрические координаты. Рассмотрим параметрическое уравнение прямой, заданной двумя точками A и B: $M = A + t\overline{AB}$ или в координатной форме

$$\begin{cases} x^1 = a^1 + t\left(a^1 - b^1\right), \\ \dots\dots\dots\dots \\ x^n = a^n + t\left(a^n - b^n\right), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 = (1-t)a^1 + tb^1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x^n = (1-t)a^n + tb^n, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 = sa^1 + tb^1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x^n = sa^n + tb^n, \end{cases}$$

где $s + t = 1$, т. е. $M = sA + tB$.

Определение. *Числа* s *и* t *называются барицентрическими координатами точки относительно системы точек* A *и* B.

Из механики известно, что точка с положительными барицентрическими координатами есть центр тяжести масс s и t, помещенных в точки A и B.

Определение. *Система точек* $P_0, P_1, \dots, P_k$ *называется* ***геометрически независимой****, если векторы* $\overline{P_0 P_1}, \overline{P_0 P_1}, \dots, \overline{P_0 P_k}$ *линейно независимы.*

Проверка корректности определения приводится в [2]. Единственную k-мерную плоскость, содержащую эти точки, обозначим π^k. Как и в одномерном случае, запишем параметрическое уравнение π^k, заданной точками $P_0, P_1, \dots, P_k$ для переменной точки $P \in \pi^k$ для параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$: $P = P_0 + \lambda_1 \overline{P_0 P_1} + \lambda_2 \overline{P_0 P_2} + \dots + \lambda_k \overline{P_0 P_k}$ или в координатной форме

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + \lambda_1 \left(x_1^1 - x_0^1 \right) + \ldots + \lambda_k \left(x_k^1 - x_0^1 \right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = x_0^n + \lambda_1 \left(x_1^n - x_0^n \right) + \ldots + \lambda_k \left(x_k^n - x_0^n \right), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^1 = x_0^1 \left(1 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_k \right) + \lambda_1 x_1^1 + \ldots + \lambda_k x_k^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = x_0^n \left(1 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_k \right) + \lambda_1 x_1^n + \ldots + \lambda_k x_k^n, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^1 = \lambda_0 x_0^1 + \lambda_1 x_1^1 + \ldots + \lambda_k x_k^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = \lambda_0 x_0^n + \lambda_1 x_1^n + \ldots + \lambda_k x_k^n, \end{cases}$$

где $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_k$ или $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$, т. е. $P = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + {}$ ${} + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_k P_k$.

Определение. *Числа* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$ *называются барицентрическими координатами точки P относительно системы точек* $P_0, P_1, \ldots, P_k$ *в k-мерной плоскости* π^k, *определенной этими точками.*

Понятие барицентрических координат ввел А.Ф. Мебиус [14] (см. также [15]).

Определение. *Множество всех точек, все барицентрические координаты которых относительно системы точек* $P_0, P_1, \ldots, P_k$ *положительны, называется открытым k-мерным симплексом.*

Очевидным образом дается определение замкнутого $k-$мерного симплекса.

Определение. *Множество называется выпуклым, если вместе с каждыми двумя точками оно содержит весь отрезок.*

Определение. *Выпуклой оболочкой* $conv\{X\}$ *множества X называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих его.*

Задача. *Найти выпуклую оболочку системы точек* $P_0, P_1, \ldots, P_k$.

Решение. $conv\{P_0, P_1, \ldots, P_k\} = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_k P_k$, $\lambda_0 + {}$ ${} + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$. Для геометрически независимой системы точек $P_0, P_1, \ldots, P_k$ их выпуклой оболочкой является симплекс.

Заключение. Ценность аксиоматического метода состоит в немедленной, с самого первого занятия, работе с доказательствами, их разбором, осмыслением, конструированием. Предмет аналитической геометрии превращается в математическую дисциплину, а не остается простым набором рецептов.

Популярное же среди преподавателей заблуждение относительно нецелесообразности аксиоматики и желание опереться на школьные представления в вопросе определений аналитической геометрии приводит к тому, что даже сильные студенты, практически отличники, не в силах решить задачи, приведенные в п. 3. Это говорит о неумении выводить, обобщать, видеть знакомые ситуации в новых задачах, а также о том, что студентов этому просто не учили.

Авторы придерживаются убеждения, что нельзя изучить математику по методическим указаниям к решению типовых расчетов, для этого необходимо неуклонно повышать уровень теоретических знаний.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hilbert D. *Gesamelte Abhandulinge*, vol. 3, ss. 1932–1935.

[2] Александров П.С. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. Москва, Наука, 1979, 512 с.

[3] Постников М.М. *Аналитическая геометрия*. Москва, Наука, 1979, 385 с.

[4] Болтянский В.Г. *Элементарная геометрия*. Москва, Просвещение, 1975, 320 с.

[5] Кузнецов В.В., Шведова И.Г. *Векторная алгебра и геометрические преобразования*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1987, 36 с.

[6] Кузнецов В.В., Окромешко Н.Г. *Векторы в пространстве*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000, 55 с.

[7] Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Москва, Наука, 1984, 272 с.

[8] Мальцев А.И. *Основы линейной алгебры*. Москва, Наука, 1975, 400 с.

[9] Grassman H. *Geggammelte Werke*, vol. 3, ss. 1894–1911.

[10] Шилов Г.Е. *Математический анализ* (*конечномерные линейные пространства*). Москва, Наука, 1969, 432 с.

[11] Головина Л.И. *Линейная алгебра и некоторые ее приложения*. Москва, Наука, 1985, 382 с.

[12] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия*. Москва, Наука, 1988, 400 с.

[13] Канатников А.Н., Крищенко А.П. *Аналитическая геометрия*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005, 355 с.

[14] Möbius A.F. *Geggammelte Werke*, vol. 4, ss. 1885–1887.

[15] Соболев С.К., Томашпольский В.Я. *Векторная алгебра*. [электрон. ресурс]. Москва, 2010. 1CD-ROM.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Кузнецов В.В., Мастихин А.В. Аксиоматика Вейля — Рашевского в курсах аналитической геометрии и линейной алгебры. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 5. URL: http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/742.html

Кузнецов Владимир Владимирович родился в 1937 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 1961 г., механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1968 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор научных статей по математической теории пластичности, методических работ для студентов, а также ряда учебных пособий по математике для школьников. e-mail: vladkuznvlad@mail.ru

Мастихин Антон Вячеславович родился в 1962 г., окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор научных статей по теории эпидемий марковских случайных процессов, учебных пособий по математике для студентов. e-mail: mastikhin@yandex.ru