

Графическое и аналитическое исследование комплексных корней кубического уравнения с одним параметром

© А.В. Копаев, С.К. Соболев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В работе рассматриваются вещественные и комплексные корни кубического уравнения с одним параметром p . Получены графические зависимости этих корней от вещественного параметра p , а также их асимптотика при $p \rightarrow \infty$ и при $p \rightarrow 0$ без использования явных формул для корней кубического уравнения, в которых эти корни выражены через параметр, а наоборот, рассматривая параметр как функцию от этих корней. Также получена графическая зависимость этих корней от комплексного параметра на комплексной плоскости, которая представляет собой номограмму для приближенного нахождения всех трех комплексных корней при любом значении комплексного параметра. Материал может быть полезен преподавателям и использован ими для дополнительных занятий со студентами.

Ключевые слова: комплекснозначная функция, график, асимптотика, приближенная формула, кубическое уравнение, корень.

Введение. Студенты МГТУ им. Н.Э. Баумана знакомятся с комплексными числами дважды: сначала на последней лекции по аналитической геометрии, а потом на втором курсе по дисциплине (или модуле) «Теория функций комплексного переменного» (ТФКП). В обоих случаях кубическое уравнение и его комплексные корни подробно практически не рассматриваются, студентов разве что учат извлекать корень любой степени из произвольного комплексного числа. Между тем кубическое уравнение дает огромное поле для приложения как аналитических методов исследования его корней с применением обычного математического или комплексного анализа, так и графических методов их анализа. При этом очень много информации об этих корнях можно получить, даже не имея в своем распоряжении явную формулу для них.

Общеизвестно, что графические иллюстрации способствуют наилучшему восприятию смысла и содержания информации. Именно поэтому в преподавании математического анализа важная роль отводится построению графиков функций. В настоящей работе показано, насколько информативны графические изображения комплекснозначных функций действительного или комплексного аргумента, а именно функций, выражающих (явно или неявно) зависимость корней кубического уравнения от его коэффициентов.

Пусть $z = f(t) \Leftrightarrow z = x + iy = g(t) + ih(t)$, $t \in T \subseteq \mathbf{R}$ — комплексная (комплекснозначная) функция вещественного аргумента t . График этой функции «лежит» в трехмерном пространстве. Под графиком этой функции понимается множество точек $\Gamma(f) = \{(t; w) | t \in T, w = f(t)\} \subseteq \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{C}$. Иначе говоря, график рассматриваемой функции — множество точек $\Gamma(f) = \{(t; x; y) \in \mathbf{R}^3 | t \in T, x = g(t), y = h(t)\}$, которое можно изобразить на плоскости в виде его проекции (рис. 1). Проекция этого графика на комплексную плоскость есть **траектория** функции $z = f(t)$, т. е. линия L на плоскости (x, y) , заданная параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

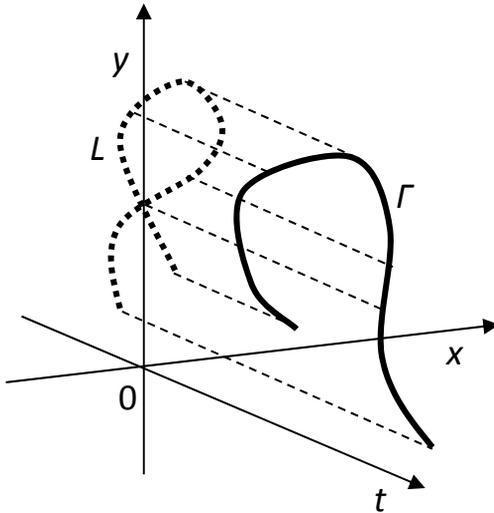


Рис. 1. График комплекснозначной функции и его проекция на комплексную плоскость

Кроме того, можно отдельно изобразить на плоскости графики «координатных» функций: $x = \operatorname{Re}(f(t)) = g(t)$, $y = \operatorname{Im}(f(t)) = h(t)$, $r = |f(t)|$ и $\varphi = \arg(f(t))$, которые также дают представление о поведении функции $z = f(t)$. Например, равномерное вращение точки на комплексной плоскости вдоль окружности радиусом R с центром в точке ноль из начального положения $z_0 = R + 0i$ с угловой скоростью ω описывается функцией $z = Re^{i\omega t} = R(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$. Графиком этой функции является винтовая линия, а проекцией графика на комплексную плоскость является траектория этой точки — окружность радиусом R с центром в точке ноль (рис. 2). Координатные функции здесь такие:

$$x(t) = R \cos(\omega t), \quad y(t) = R \sin(\omega t), \quad r(t) = R = \text{const} \quad \text{и} \quad \varphi(t) = \omega t.$$

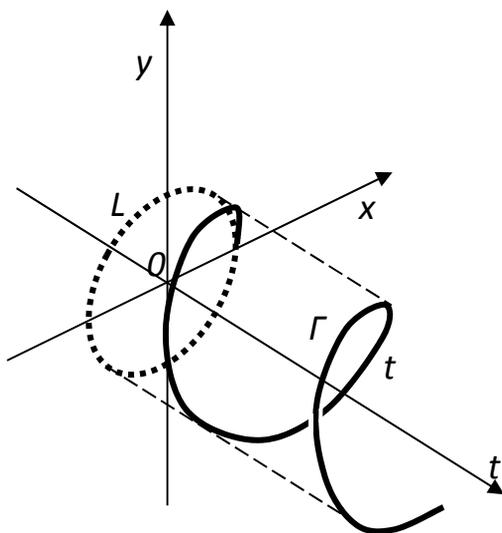


Рис. 2. График равномерного вращения точки вокруг точки O и его траектория

Если же $z = f(p)$ — комплексная функция комплексного аргумента $p = a + ib = re^{i\theta}$, то для ее графика понадобится вещественное четырехмерное пространство, и поэтому изобразить ее график затруднительно. В этом случае для ее представления можно использовать изображения на комплексной плоскости z образов линий $\operatorname{Re}(p) = \text{const}$, $\operatorname{Im}(p) = \text{const}$, $|p| = \text{const}$ и $\arg(p) = \text{const}$.

Объектом нашего изучения будет кубическое уравнение с действительными (или комплексными) коэффициентами. Как известно, даже если все коэффициенты вещественны, то некоторые корни могут быть комплексными. Кубические уравнения часто возникают при решении прикладных задач, например при решении линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [1]. Используемый аппарат — элементарные сведения о комплексных числах, доступные даже школьнику [2–4], а также теория предела и дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной.

Рассмотрим кубическое уравнение

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \quad (1)$$

с комплексной неизвестной λ и с действительными или комплексными коэффициентами a, b, c, d , причем $a \neq 0$. Из основной теоремы алгебры [5] следует, что это уравнение имеет три (не обязательно различных) корня z_1, z_2, z_3 (вообще говоря, комплексных), таких, что справедливо разложение:

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d \equiv a(\lambda - z_1)(\lambda - z_2)(\lambda - z_3). \quad (2)$$

Из (2) следуют формулы Виета для кубического уравнения:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= -\frac{b}{a}, \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 &= \frac{c}{a}, \\ z_1z_2z_3 &= -\frac{d}{a}. \end{aligned} \quad (3)$$

Покажем, что уравнение (1) с помощью простой замены можно привести к более простому виду лишь с одним параметром (коэффициентом). Сначала положим $\lambda = \mu - \frac{b}{3a}$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$a_1\mu^3 + c_1\mu + d_1 = 0, \quad (4)$$

где $a_1 = a \neq 0$, $c_1 = \frac{b^2}{3a}$, $d_1 = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$. Если $d_1 = 0$, уравнение (4) принимает вид $\mu(a_1\mu^2 + c_1) = 0$ и легко решается.

Рассмотрим подробно случай $d_1 \neq 0$. Разделим уравнение (4) на d_1 и обозначим $z = \mu \sqrt[3]{\frac{a_1}{d_1}}$ *. Тогда получим уравнение

$$z^3 + \frac{c_1}{\sqrt[3]{a_1 d_1^2}} z + 1 = 0.$$

Наконец, обозначим $p = -\frac{c_1}{\sqrt[3]{a_1 (d_1)^2}}$, и уравнение (4) примет окончательный вид

$$z^3 - pz + 1 = 0, \quad (5)$$

где константа p (вообще говоря, комплексная) зависит от исходных коэффициентов a, b, c, d , причем, если все эти коэффициенты вещественны, то и $p \in \mathbb{R}$.

* Если $\frac{a_1}{d_1}$ — комплексное число, то возьмем любое из трех значений кубического корня, а если вещественное — возьмем вещественное значение этого корня.

Сразу отметим, что по формулам Виета сумма всех корней для кубического уравнения (5), действительных или комплексных, с учетом кратности равна нулю, а произведение этих корней равно -1 .

1. Исследование корней кубического уравнения с одним вещественным параметром.

Сначала подробно рассмотрим случай **вещественного** параметра p . Исследуем **действительные** корни $z = x \in \mathbb{R}$ уравнения (5), которое перепишем в виде

$$x^3 - px + 1 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{x^3 + 1}{x} = x^2 + \frac{1}{x}, \quad (6)$$

т. е. рассматривая p как **функцию от** x . Первая и вторая производные этой функции равны соответственно

$$\frac{dp}{dx} = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$$

и

$$\frac{d^2p}{dx^2} = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^3}.$$

Легко видеть, что функция $p(x)$ (6) имеет локальный минимум при $x = x_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} = 0,7937\dots$, равный $p_0 = p(x_0) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} = 1,88988\dots$ Эта функция убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и на $(0; x_0]$, возрастает на $[x_0; +\infty)$ ее график имеет перегиб в точке $x = -1, p = 0$. Далее, график функции (6) имеет прямолинейную асимптоту $x = 0$ и, кроме того, параболическую асимптоту $p = x^2$ (рис. 3). Справедливы асимптотические формулы: $p \sim \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0$ и $p \sim x^2$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Количество различных вещественных корней уравнения (3) при каждом конкретном вещественном значении $p = \alpha$ равно числу точек пересечения графика (6) с прямой $p = \alpha$. Из графика функции (6) видно, что при вещественном $p > p_0 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ уравнение (5) имеет три различных вещественных корня ($x_1 < x_2 < x_3$), из которых корень x_1 отрицательный, а два других, x_2 и x_3 , положительны, причем, если $p \rightarrow +\infty$, то $x_1 \rightarrow -\infty$, $x_2 \rightarrow 0+$ и $x_3 \rightarrow +\infty$. Более того, при $p \rightarrow +\infty$ справедливы такие асимптотические представления: $x_1 \sim -\sqrt{p}$, $x_2 \sim \frac{1}{p}$, $x_3 \sim \sqrt{p}$.

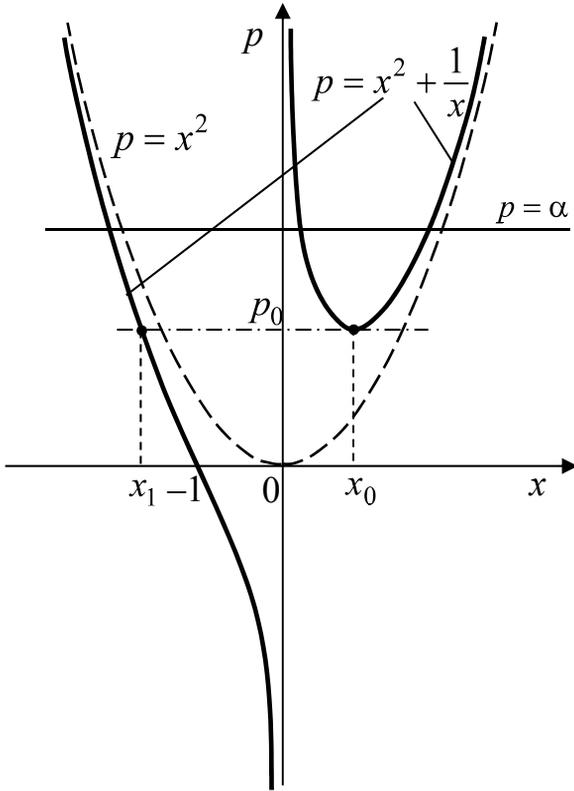


Рис. 3. График зависимости параметра p и вещественных корней кубического уравнения

При $p = p_0$ уравнение имеет двукратный вещественный корень $x_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и простой вещественный отрицательный корень $x = -2x_0 = -\sqrt[3]{4}$. Если же $p < p_0$, то уравнение (5) имеет только один вещественный (отрицательный) корень и, следовательно, еще два комплексных взаимно сопряженных корня $z_{2,3} = x \pm iy$. Для этого единственного вещественного отрицательного корня $x(p)$ справедлива асимптотика: $x \sim \frac{1}{p}$ при $p \rightarrow -\infty$.

Найдем более подробные асимптотические разложения вещественных корней уравнения (5) при $p \rightarrow \infty$.

Пусть $p \rightarrow +\infty$. Для корня $x = x_3(p) \sim \sqrt{p}$ найдем главную часть разности:

$$\Delta x_3 = x - \sqrt{p} = x - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} = x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} \right) \sim x \left(-\frac{1}{2x^3} \right) = -\frac{1}{2x^2} \sim -\frac{1}{2p}.$$

Следовательно, $x_3 = \sqrt{p} - \frac{1}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right)$ при $p \rightarrow +\infty$. Далее найдем главную часть следующей разности:

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_3 &= x - \sqrt{p} + \frac{1}{2p} = x - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + \frac{x}{2(x^3 + 1)} = \{t = x^{-3} \rightarrow 0\} = \\ &= x \left(1 - \sqrt{1+t} + \frac{t}{2} \frac{1}{1+t} \right) = x \left(1 - 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + \frac{t}{2} (1-t) + o(t^2) \right) \sim \\ &\sim \frac{3xt^2}{8} = \frac{3}{8x^5} \sim \frac{3}{8p^2 \sqrt{p}}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $p \rightarrow +\infty$

$$x_3(p) = \sqrt{p} - \frac{1}{2p} - \frac{3}{8p^2 \sqrt{p}} + o\left(\frac{1}{p^{5/2}}\right). \quad (7)$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} x_1(p) &= -\sqrt{p} - \frac{1}{2p} + \frac{3}{8p^2 \sqrt{p}} + o\left(\frac{1}{p^{5/2}}\right), \\ x_2(p) &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p^4} + o\left(\frac{1}{p^4}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

При $p \rightarrow -\infty$ аналогично получаем асимптотику для единственного вещественного корня

$$x_1(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^4} + o\left(\frac{1}{p^4}\right). \quad (9)$$

Эти формулы дают хорошее приближение уже при $p > 3$. Например, при $p = 4$ получим такие приближенные значения корней кубического уравнения $x^3 - 4x + 1 = 0$:

$$x_1 \cong -2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{256} = -2,11328,$$

$$x_2 \cong \frac{1}{4} + \frac{1}{256} = 0,25391,$$

$$x_3 \cong 2 - \frac{1}{8} - \frac{3}{256} = 1,86328.$$

Точные значения корней (с пятью знаками после запятой):

$$x_1 = -2,11491, \quad x_2 = 0,25410, \quad x_3 = 1,86081,$$

т. е. ошибка порядка одной сотой.

Далее подробно исследуем **комплексные** корни уравнения (5) при $p < p_0 = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. Сначала получим связь между действительной и

мнимой частями этих корней с учетом того, что $p \in \mathbb{R}$. Имеем

$$p = z^2 + \frac{1}{z} = (x + iy)^2 + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \left(x^2 - y^2 + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) - i \left(2xy + \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

откуда, поскольку $\text{Im}(p) = 0$, получим $y \left(2x - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0$. В комплексной плоскости это объединение прямой $y = 0$ (соответствующей вещественным корням) и кривой

$$2x = \frac{1}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{1}{2x} - x^2}. \quad (10)$$

Эта линия (рис. 4) — траектория графика двузначной функции $z = z(p) = x \pm iy$ комплексных корней уравнения (5). Из (10) следует,

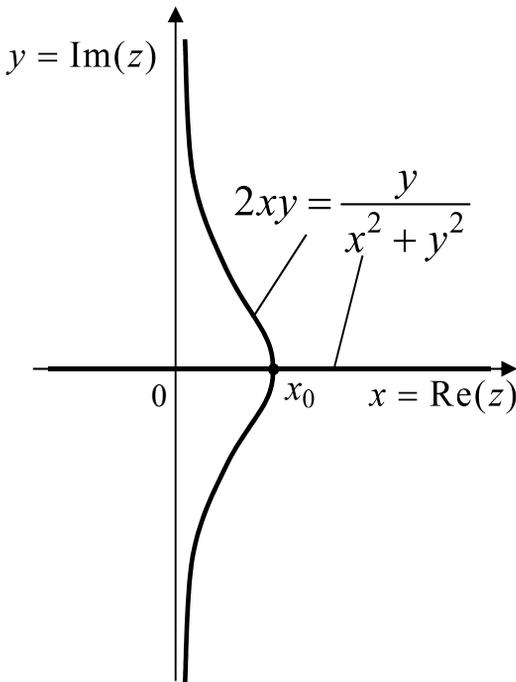


Рис. 4. Линия комплексных корней кубического уравнения на комплексной плоскости

что $x = \operatorname{Re}(z) > 0$, т. е. что действительная часть x комплексных корней уравнения (5) положительна, а также, что $x \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = x_0$. Кроме того, в этом случае

$$p = x^2 - y^2 + \frac{x}{x^2 + y^2} = 2x^2 - (x^2 + y^2) + 2x^2 = 4x^2 - \frac{1}{2x},$$

где $x = \operatorname{Re}(z)$.

В пространстве (p, x, y) кривая $x + iy = z(p)$ может быть задана параметрически:

$$\left. \begin{aligned} x &= t \\ y &= \pm \sqrt{\frac{1}{2t} - t^2} \\ p &= 4t^2 - \frac{1}{2t} \end{aligned} \right\} t \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right).$$

Ее график в пространстве (p, x, y) представлен на рис. 5.

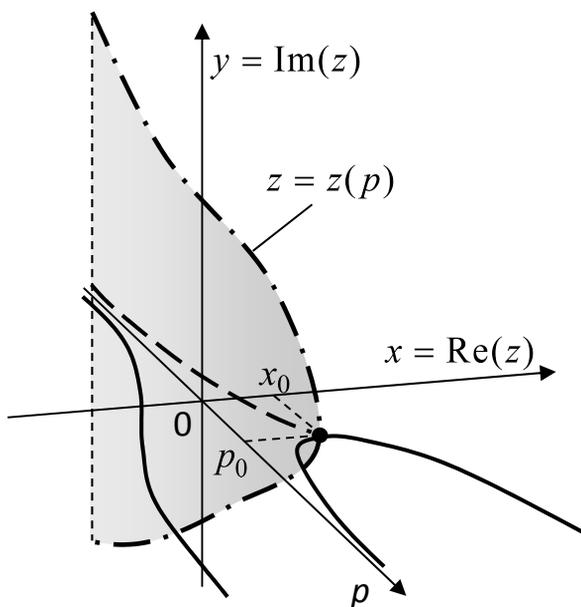


Рис. 5. График зависимости корней кубического уравнения от действительного параметра

Находим производные:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x'_i}{p'_i} = \frac{2t^2}{16t^3 + 1} > 0,$$

$$\frac{dy_+}{dp} = \frac{(y_+)'_t}{p'_t} = -\frac{16t^3+1}{2t(4t^3+1)} \sqrt{\frac{2t}{1-2t^3}} < 0.$$

Следовательно, действительная часть комплексных корней $x(p)$ является возрастающей функцией, а мнимая положительная часть $y_+(p)$ — убывающей. Если $t \rightarrow 0+$, то $y_+ \sim \frac{1}{\sqrt{2t}}$, $p \sim -\frac{1}{2t} \rightarrow -\infty$.

Поэтому при $p \rightarrow -\infty$ имеем асимптотики: $x \sim -\frac{1}{2p}$, $y_+ \sim \sqrt{-p}$, и поэтому при больших отрицательных значениях p имеем приближенные формулы $z_1(p) \cong \frac{1}{p}$, $z_{2,3}(p) \cong -\frac{1}{2p} \pm i\sqrt{-p}$. Можно получить такие асимптотические формулы при $p \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) = x(p) &= -\frac{1}{2p} - \frac{1}{2p^4} + o\left(\frac{1}{p^4}\right) = -\frac{1}{2}x_1(p), \\ \operatorname{Im}(z) = y(p) &= \sqrt{-p} + \frac{3}{8p^2\sqrt{-p}} + o\left(\frac{1}{(-p)^{5/2}}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Эти формулы дают хорошее приближение и при не очень больших по абсолютной величине отрицательных значениях p . Например, при $p = -4$ для уравнения $z^3 + 4z + 1 = 0$ получим приближенные значения его корней:

$$\begin{aligned} z_1 &\cong \frac{1}{p} + \frac{1}{p^4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{256} = -0,24609375, \\ z_{2,3} &\cong \left(-\frac{1}{2p} - \frac{1}{2p^4}\right) \pm i\left(\sqrt{-p} + \frac{3}{8p^2\sqrt{-p}}\right) = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{512}\right) \pm i\left(2 + \frac{3}{256}\right) = \\ &= 0,123046875 \pm 2,01171875i. \end{aligned}$$

Точные значения этих корней (с пятью знаками после запятой):

$$z_1 = -0,24627\dots, \quad z_{2,3} = 0,12313\dots \pm 2,01134\dots$$

Модуль и аргумент комплексного корня (с положительной мнимой частью) выражаются формулами:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{2x}}, \quad \varphi = \arg(z) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{2x^3} - 1}.$$

Поэтому они, как функции $r(p)$ и $\varphi(p)$, задаются параметрически:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{1}{\sqrt{2t}}, \\ p &= 4t^2 - \frac{1}{2t} \end{aligned} \right\} t \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right) \quad \left. \begin{aligned} \varphi &= \arctg \sqrt{\frac{1}{2t^3} - 1}, \\ p &= 4t^2 - \frac{1}{2t} \end{aligned} \right\}.$$

Для комплексного корня $z = x + iy = r e^{i\varphi}$ с положительной мнимой частью на рис. 6 приведены графики функций $\operatorname{Re}(z) = x(p)$, $\operatorname{Im}(z) = y(p)$, $|z| = r(p)$ и $\arg(z) = \varphi(p)$, там же представлены графики вещественных корней x_1, x_2, x_3 кубического уравнения (5) в зависимости от параметра p .

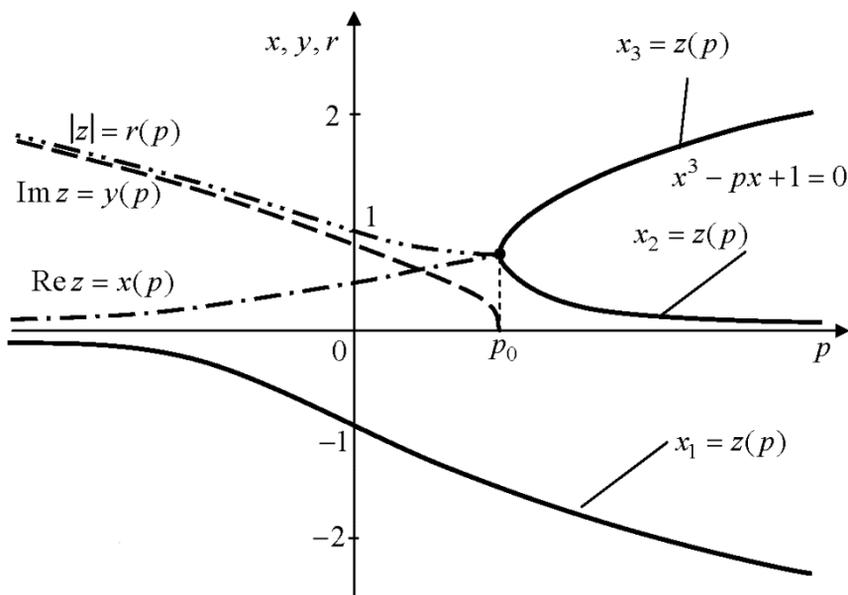


Рис. 6. Графики зависимости от параметра p вещественных корней, действительной и мнимой частей, а также модуля комплексных корней кубического уравнения

Для модуля и аргумента комплексного корня тоже можно получить асимптотические представления при $p \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} |z| = r(p) &= \sqrt{-p} - \frac{1}{2p^2 \sqrt{-p}} + o\left(\frac{1}{(-p)^{\frac{5}{2}}}\right), \\ \arg(z) = \varphi(p) &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4p \sqrt{-p}} + o\left(\frac{1}{(-p)^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Например, при $p = -4$ получаем такие приближенные значения модуля и аргумента комплексных корней:

$$|z| = r \cong 2 - \frac{1}{64} = 1,984375\dots, \arg(z) = \varphi \cong \frac{\pi}{2} - \frac{1}{32} = 1,539546\dots$$

То есть $z_{2,3} = re^{\pm i\varphi} \cong 1,984375e^{\pm 1,539546i}$.

Теперь получим асимптотические разложения корней кубического уравнения (5) при $p \rightarrow 0$. Если $p = 0$, то корни очевидно равны

$$\sqrt[3]{-1}, \text{ эти значения } z_1 = -1, z_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ При } p \rightarrow 0 \text{ для вещественного}$$

корня $z_1 = x$ имеем $p = \frac{x^3 + 1}{x}$. Обозначим $t = x + 1 \rightarrow 0$, тогда

$$x = t - 1 \text{ и } p = \frac{(t-1)^3 + 1}{t-1} = \frac{t^3 - 3t^2 + 3t}{t-1} \sim -3t, \text{ поэтому } x + 1 = t \sim -\frac{p}{3}.$$

Далее рассмотрим разность $t - \left(-\frac{p}{3}\right) = t + \frac{p}{3} = t + \frac{t^3 - 3t^2 + 3t}{3t - 3} =$

$$= \frac{t^3}{3t - 3} \sim -\frac{t^3}{3} \sim \frac{p^3}{81}. \text{ Следовательно, } z_1 = x(p) = +o(p^3) \text{ при } p \rightarrow 0.$$

Теперь найдем асимптотику при $p \rightarrow 0$ для действительной части

комплексного корня $x(p) = \operatorname{Re}(z_{2,3})$. Здесь $p = \frac{8x^3 - 1}{2x}$. Обозначим

$$t = 2x - 1 \rightarrow 0. \text{ Тогда } 2x = t + 1 \text{ и } p = \frac{(t+1)^3 - 1}{t+1} = \frac{t(t^2 + 3t + 3)}{t+1} \sim 3t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \sim \frac{p}{3}.$$

Далее, $t - \frac{p}{3} = t - \frac{t^3 + 3t^2 + 3t}{3t + 3} = -\frac{t^3}{3t + 3} \sim -\frac{t^3}{3} \sim -\frac{p^3}{81}$, поэтому

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(1+t) = \frac{1}{2} + \frac{p}{6} - \frac{p^3}{54} + o(p^3) \text{ при } p \rightarrow 0.$$

Аналогично для мнимой части корней получаем представление

$$y = \operatorname{Im}(z) = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{6} - \frac{p^3}{54} \right) + o(p^3) \text{ при } p \rightarrow 0.$$

Таким образом, при малых по модулю значениях p справедливы приближенные формулы для корней (вещественного z_1 и комплексных $z_{2,3}$):

$$z_1 \cong -1 - \frac{p}{3} + \frac{p^3}{81}, z_{2,3} \cong \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{6} - \frac{p^3}{54} \right) \pm i\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{6} - \frac{p^3}{54} \right). \quad (13)$$

Эти формулы дают очень хорошее приближение при $|p| < 0,5$. Но даже если, например, $p = 1$, получим такие приближенные значения:

$$z_1 \cong -1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{81} = -1,321, \quad z_{2,3} = 0,6605 \pm 0,5667i.$$

Точные значения: $z_1 = -1,32472$, $z_{2,3} = 0,66236 \pm 0,5622795i$, т. е. ошибка составляет менее одной сотой.

Заметим, что мы получили эти асимптотические представления и графики, **не используя** явных формул для корней уравнения (5). Выпишем известные формулы Кардано для этого уравнения в виде, удобном для использования и исследования ($p \in \mathbb{R}$).

Пусть сначала $p > p_0 = \sqrt[3]{4}$. Тогда уравнение имеет три вещественных корня:

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \sin\left(\frac{\alpha - 2\pi}{3}\right) < 0, \quad x_2 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \sin\frac{\alpha}{3} > 0, \quad x_3 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right) > 0,$$

где $\alpha = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}\right)$.

Заметим, что эти формулы верны и при $p = p_0 = \sqrt[3]{4}$, в этом случае

$$\alpha = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \quad 2\sqrt{\frac{p}{3}} = \sqrt[3]{4},$$

$$x_1 = \sqrt[3]{4} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt[3]{4}, \quad x_2 = x_3 = \sqrt[3]{4} \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Пусть теперь $p < p_0 = \sqrt[3]{4}$.

Тогда уравнение (5) имеет один вещественный корень

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{p^3}{27}}} \quad (14)$$

и два комплексно-сопряженных:

$$z_{2,3} = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{p^3}{27}}} \right) \pm$$

$$\pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{p^3}{27}}} \right). \quad (15)$$

Понятно, что исходя из этих явных формул, также можно получить асимптотические формулы (11)–(13).

Пример. Решим уравнение (5) при а) $p = 3$ и б) $p = -3$:

а) $p = 3 > p_0$, $\alpha = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, и имеем такие корни:

$$x_1 = 2 \sin \left(-\frac{11\pi}{18} \right) = -2 \sin \left(\frac{7\pi}{18} \right), \quad x_2 = 2 \sin \frac{\pi}{18}, \quad x_3 = 2 \sin \frac{5\pi}{18};$$

б) $p = -3$, получим следующие корни уравнения $z^3 + 3z + 1 = 0$:

вещественный $z_1 = \sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$, и два комплексно-сопряженных:

$$z_{2,3} = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \right) \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \right).$$

2. Графическое представление корней кубического уравнения с одним комплексным параметром.

Кратко рассмотрим уравнение

$$z^3 - pz + 1 = 0 \Leftrightarrow p = z^2 + \frac{1}{z}, \quad (16)$$

в котором параметр p , вообще говоря, **комплексный**. Тогда уравнение имеет только комплексные корни, если $p \notin \mathbb{R}$. Это уравнение неявно задает трехзначную комплексную функцию $z = z(p)$ комплексного аргумента p (зависимость корней от параметра p). Тогда образы координатных линий плоскости p обратного отображения $z = z(p)$ будут линиями уровня функций $\operatorname{Re}(p(z))$ и $\operatorname{Im}(p(z))$.

Представим параметр p в виде $p = a + bi$. Если $z = x + iy$, получим

$$p = a + bi = (x + iy)^2 + \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

откуда

$$\begin{aligned} a = \operatorname{Re}(p) &= x^2 - y^2 + \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ b = \operatorname{Im}(p) &= 2xy - \frac{y}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

На рис. 7 представлены линии уровня функции $a = \text{Re}(p(z))$ для значений $a = 0$, $a = 1$, $a = 3$, $a = p_0 = \sqrt[3]{4}$, $a = -\frac{1}{2}p_0$, $a = -2$. Эти линии симметричны относительно действительной оси, поскольку если уравнение (5) имеет при $p = a + ib$ корень $z_1 = x_1 + iy_1$, то при $p = \overline{a + bi} = a - bi$ (с той же вещественной частью) уравнение (17) имеет корень $z_2 = \overline{z_1}$. На рис. 6 изображены линии уровня функции $b = \text{Im}(z)$ для значений $b = 0$, $b = \pm 1$, $b = \pm \frac{\sqrt{27}}{\sqrt[3]{32}} = \pm 1,6367\dots$, $b = \pm 2$ и $b = \pm 3$. Эти линии также симметричны относительно действительной оси. Линии на рис. 7 и 8 взаимно ортогональны во всех точках, кроме точек 0 , x_0 , $x_0\varepsilon$ и $x_0\bar{\varepsilon}$, в которых нарушается конформность [6, 7, 8, 9] отображения $p(z) = z^2 + \frac{1}{z}$ (в последних трех точках $p'(z) = 0$).

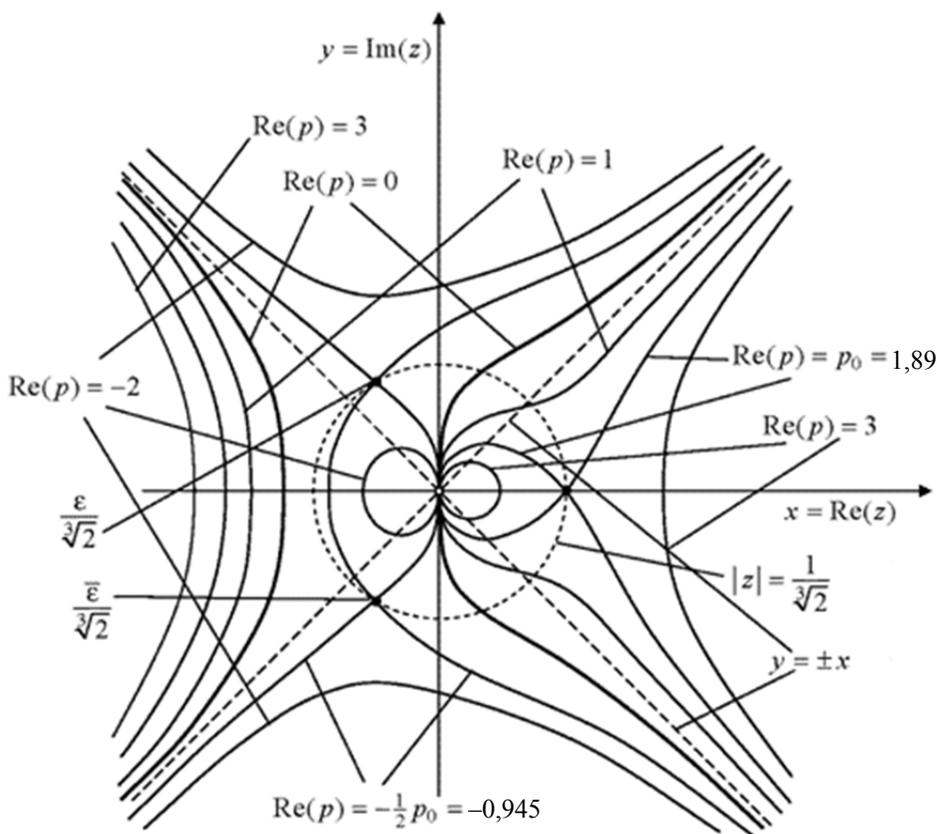


Рис. 7. Линии уровня действительной части параметра p

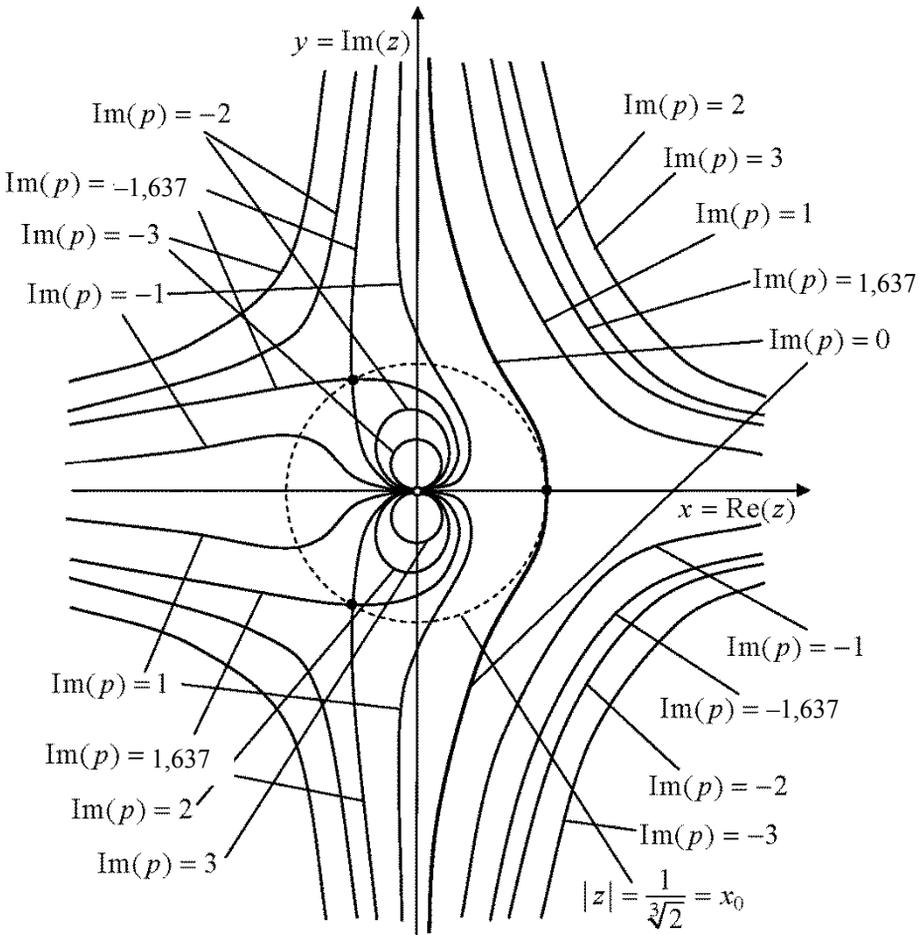


Рис. 8. Линии уровня мнимой части параметра p

Если совместить изображения на рис. 7 и 8, получатся образы координатных линий $\text{Re}(p) = \text{const}$ и $\text{Im}(p) = \text{const}$ при трехзначном отображении $z = z(p)$, заданном неявно $z^3 - pz + 1 = 0$ (рис. 9). Тогда корни уравнения (5), например, при $p = -2 + i$ — это три точки пересечения z_1, z_2 и z_3 линий $\text{Re}(p) = -2$ (штрихпунктирная) и линий $\text{Im}(p) = 1$ (штрихпунктирная с двумя точками). Значения этих корней с точностью до тысячных такие:

$$z_1 = 0,505 + 1,563i, \quad z_2 = -0,402 - 0,164i, \quad z_3 = -0,103 - 1,4i.$$

Следовательно, этим графиком можно пользоваться как номограммой для приближенного нахождения всех комплексных корней уравнения (5) с комплексным параметром p .

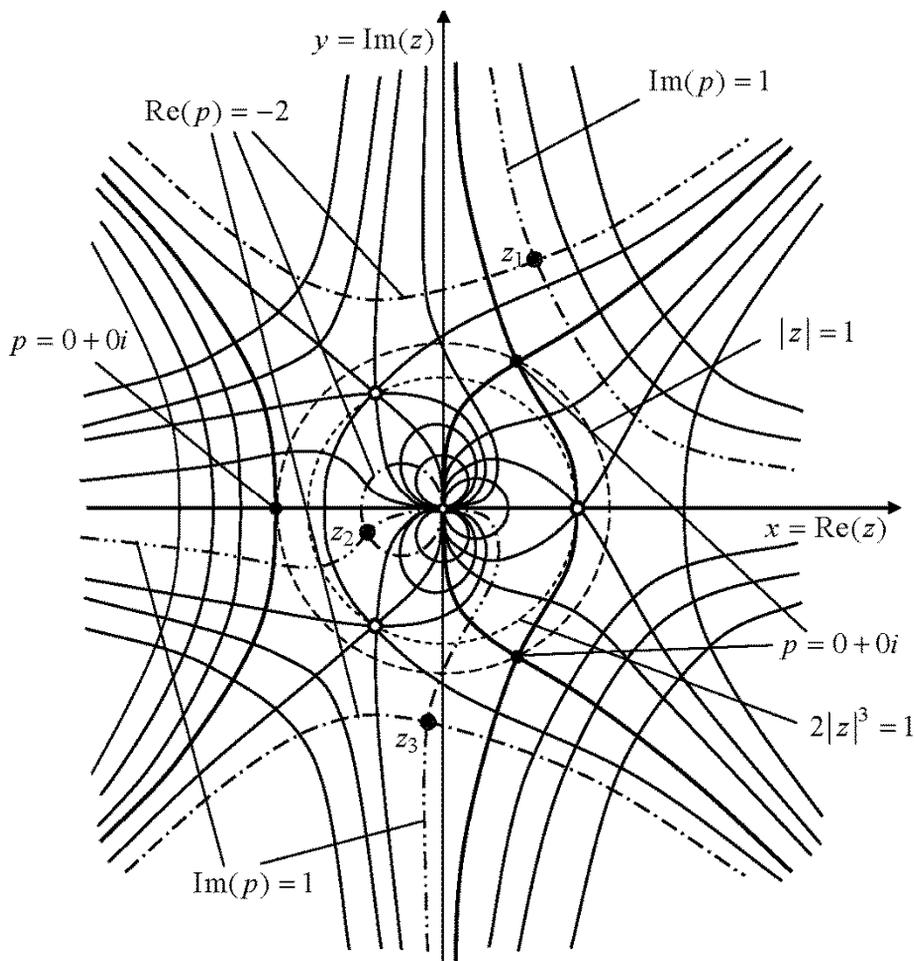


Рис. 9. Номограмма для графического нахождения корней кубического уравнения

Заключение. Итак, в статье показано, как можно получить асимптотические и графические зависимости корней кубического уравнения от его вещественного или комплексного параметра, не пользуясь явными формулами для этих корней. Этот метод можно обобщить на некоторые уравнения более высоких степеней.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Москва, Либроком, 2013, 256 с.
- [2] Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. *Алгебра и математический анализ для 11 класса*. 5-е изд. Москва, Просвещение, 1996, 288 с.
- [3] Шахмейстер А.Х. *Комплексные числа*. Москва, МЦНМО, Петроглиф, Виктория плюс, 2011, 176 с.

- [4] Куланин Е.Д. *Комплексные числа* (Серия Математика. Элективный курс). Москва, Илекса, 2013, 112 с.
- [5] Курош А.Г. *Лекции по общей алгебре* (Серия Учебники для вузов). Москва, Лань, 2007, 560 с.
- [6] Привалов И.И. *Введение в теорию функций комплексного переменного*. (Серия Учебники для вузов. Специальная литература). Москва, Лань., 2009, 432 с.
- [7] Свешников А.Г., Тихонов А.Н. *Теория функций комплексной переменной*. (Серия Курс высшей математики и математической физики). Москва, Физматлит, 2010, 336 с.
- [8] Шабунин М., Сидоров Ю. *Теория функций комплексного переменного*. (Серия Технический университет). Москва, Юнимедиастилл, , 2009, 248 с.
- [9] Копяев А.В., Садыхов Г.С. *Теория функций комплексного переменного*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1992, 102 с.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Копяев А.В., Соболев С.К. Графическое и аналитическое исследование комплексных корней кубического уравнения с одним параметром. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 5. URL: <http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/741.html>

Копяев Анатолий Владимирович родился в 1951 г.. Канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда работ по ТФКП и методических пособий для студентов. e-mail: 5736234@mail.ru

Соболев Сергей Константинович родился в 1951 г., окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1968 г. и затем в 1976 г. аспирантуру в МИАН им. В.А. Стеклова. Канд. физ.-мат. наук, доцент. С 1976 г. работает на кафедре «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда статей по математической логике, методике преподавания математики, методических пособий для студентов и старших школьников. Председатель методической комиссии кафедры «Высшая математика». e-mail: sergesobolev@mail.ru