

**Постановка специального курса
«Марковские модели систем с взаимодействием»
по направлению «Прикладная математика»**

© А.В. Калинин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В статье изложены вопросы постановки и содержания специального курса по приложениям марковских процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем для студентов старших курсов факультета «Фундаментальные науки». Указаны первоисточники для вариантов задач типового расчета по дисциплине. Приведены примеры результатов выполненных расчетов по домашнему заданию.

Ключевые слова: преподавание математики, МГТУ им. Н.Э. Баумана, специальный курс, марковские процессы и их приложения, типовый расчет.

Введение. В Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана с 1998/99 учебного года читается обязательный семестровый курс «Дополнительные главы теории случайных процессов» для студентов специальности «Прикладная математика» факультета «Фундаментальные науки». С 2005/06 учебного года читается второй обязательный семестровый курс «Марковские модели систем с взаимодействием» для студентов той же специальности. Учебная программа дисциплины за пятнадцать лет чтения лекций претерпела значительные изменения, вызванные как внутренним развитием содержания специального курса — накоплением опыта изложения новой предметной области, — так и внешними условиями — увеличением числа учебных часов, отводимых на курс, появлением у каждого студента индивидуальных вычислительных средств (ноутбуков) и т. д. Изменения в читаемом курсе связаны с созданием и развитием программного пакета численных расчетов MATLAB, аналитических решателей MAPLE, MATHEMATICA и других мощных компьютерных численных и символьных систем с визуализацией данных.

По разным причинам менялись содержание и формы контроля знаний студентов — изменялись структура и объем домашних заданий (типовых расчетов), переход с приема зачетов на прием экзаменов в конце семестра, переход на модульно-рейтинговую систему проведения зачетов и экзаменов. Изменений потребовал новый Федеральный стандарт высшего образования по направлению подготовки «Прикладная математика» для магистров.

По специальному курсу изданы учебные пособия [1, 2]. Методическое обеспечение дисциплины докладывалось на конференциях [3, 4, 5]. Программа годового курса обсуждалась специалистами на семинаре отдела дискретной математики МИРАН им. В.А. Стеклова. По своей прикладной направленности содержание представляемого

где $\varepsilon_j^i, \gamma_j^i, i=1, \dots, l, j=1, \dots, n$ — целые неотрицательные числа. Схемой (1) может быть учтено поступление элементов извне (открытая система) и образование конечных элементов (финального продукта).

В начале учебного курса излагается классический детерминированный подход к моделированию кинетической схемы (1). Вводят количество $x_i(t)$ элементов типа $T_i, i=1, \dots, n$, в момент времени $t, t \in [0, \infty)$. Функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$ удовлетворяют системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, или кинетических уравнений [16],

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n); \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n); \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2)$$

с начальными условиями $x_1(0) = x_1^0, \dots, x_n(0) = x_n^0$. Вид функций f_1, \dots, f_n определяется схемой (1) по законам формальной кинетики [16]: для ординарной схемы превращений $T_1 \rightarrow T_2$ полагают $\dot{x}_1 = -\lambda x_1; \dot{x}_2 = \lambda x_1$; для бинарной схемы взаимодействий $T_1 + T_2 \rightarrow T_3$ полагают $\dot{x}_1 = -\lambda x_1 x_2; \dot{x}_2 = -\lambda x_1 x_2; \dot{x}_3 = \lambda x_1 x_2$, где $\lambda > 0$ — константа. В прикладных задачах функции f_1, \dots, f_n являются многочленами степени не выше третьей.

Содержание курса главным образом основано на вероятностной модели [11, 14, 15] для схемы взаимодействий (1) в виде однородного во времени многомерного марковского процесса $(\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)), t \in [0, \infty)$, на дискретном фазовом пространстве

$$N^n = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_i = 0, 1, 2, \dots, i=1, \dots, n\}.$$

Состояние $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ соответствует наличию α_1 элементов типа T_1, \dots, α_n элементов типа T_n , и строке $\varepsilon_1^i T_1 + \dots + \varepsilon_n^i T_n \rightarrow \gamma_1^i T_1 + \dots + \gamma_n^i T_n$ соответствует скачок случайного процесса из состояния $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ в состояние $(\alpha_1 - \varepsilon_1^i + \gamma_1^i, \dots, \alpha_n - \varepsilon_n^i + \gamma_n^i)$. Если процесс для каждого из состояний $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ может совершить скачок только в состояние $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ такое, что $|\alpha_i - \beta_i| \leq 1$ для $i=1, \dots, n$, то имеем многомерный процесс рождения и гибели [18]. В состоянии $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ процесс находится случайное время с показательным

распределением, зависящим от параметров таким образом, что стохастическая модель и детерминированная модель (2) связаны «термодинамическим предельным переходом» [19].

Кратко перечислим разделы годового курса.

Целочисленные неотрицательные случайные величины и их производящие функции. Факториальные моменты. Мультипликативное свойство. Экспоненциальные производящие функции. Многомерные производящие функции.

Переходные вероятности однородных марковских процессов со счетным множеством состояний $N = \{0, 1, 2, \dots\}$. Инфинитезимальные характеристики и их вероятностная интерпретация. Классификация состояний. Вывод первой и второй (линейных) систем дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей.

Процессы гибели и размножения, вложенная цепь Маркова для которых является случайным блужданием. Оператор обобщенного дифференцирования Гельфонда — Леонтьева. Свертка с помощью производящих функций первой и второй систем уравнений для переходных вероятностей. Асимптотическое поведение средних для процессов чистого размножения пуассоновского, степенного и линейного типов. Процессы квадратичного и полиномиального типов.

Ветвящийся процесс и его уравнения. Вывод свойства ветвления для переходных вероятностей и нелинейного (третьего) дифференциального уравнения. Интерпретация ветвящегося процесса через частицы. Приложения в физике. Цепная ядерная реакция размножения нейтронов $T \rightarrow kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Докритические, критические, надкритические процессы и вероятностный смысл параметра критичности. Вычисление вероятности вырождения.

Структура множества марковских процессов при дискретном фазовом пространстве N^n . Марковские процессы с взаимодействием. Второе уравнение для многомерной производящей функции переходных вероятностей. Конструктивное описание как процессов с взаимодействием частиц. Схема взаимодействий. Иммиграция частиц, финальные частицы. Ветвящиеся процессы с взаимодействием. Первое и второе уравнения для экспоненциальной производящей функции и производящей функции переходных вероятностей (уравнения в частных производных). Ветвящиеся процессы. Свойство ветвления и нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Приложения в формальной кинетике. Детерминированная и вероятностная модели мономолекулярной реакции $T_1 \rightarrow T_2$. Явное решение уравнений марковского процесса и предельная теорема при большом начальном числе частиц. Бимолекулярные реакции $T_1 + T_2 \rightarrow T_3$ и $2T \rightarrow T$ и закон действующих масс.

Приложения в экологии. Детерминированная и вероятностная модели системы хищник — жертва. Применение статистического моделирования. Стохастическая модель эпидемии. Пороговая предельная теорема для финальных вероятностей. Приложения в технике. Вычисление стационарного распределения для системы массового обслуживания $0 \rightarrow T; T \rightarrow 0$.

Сведения из истории развития теории случайных процессов. Макроскопический и микроскопический, детерминистический и стохастический, непрерывный и дискретный подходы при построении математических моделей сложных систем. Перечисление основных схем взаимодействий, задача классификации схем.

В курсе «Дополнительные главы теории случайных процессов» разбираются примеры применения аналитических методов решения дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей процесса $(\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$ для моделей схем (1) в случае процессов линейного типа. При решении уравнений для марковских процессов используется аппарат производящих функций и методы теории ветвящихся процессов [13]. Дается типовый расчет по явным решениям таких уравнений — используются методы обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных первого порядка, интегральные преобразования, а также асимптотические методы.

В курсе «Марковские модели систем с взаимодействием» в случае процессов квадратичного типа уравнения Колмогорова являются уравнениями в частных производных второго порядка смешанного типа. Поэтому в типовом расчете [2] в большей степени применяются численные методы. Для исследования случайных процессов $(\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$ студентами используется итерационный алгоритм моделирования на ЭВМ процессов с дискретными состояниями [12] и метод Монте-Карло статистических испытаний [18].

В работах [6, 8, 11] предложены ограниченные по применению аналитические методы решения дифференциальных уравнений для переходных вероятностей процесса $(\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$ для схемы (1) в случаях $l \leq 2$ и $n \leq 2$.

Задачи типового расчета. Приведем ряд вариантов типового расчета по марковским процессам рождения и гибели квадратичного типа [5]. Все схемы взаимодействий взяты из технической и естественно-научной литературы и публиковались в связи с прикладными задачами, рассматривавшимися на основе теории марковских процессов с дискретными состояниями.

$2T \rightarrow T; T \rightarrow 0, 2T$; квазистационарное распределение [7].

$3T \rightarrow 2T; 2T \rightarrow 3T; T \rightarrow 0; 0 \rightarrow T$; бистабильная система [17].

$2T_1 \rightarrow T_2; T_2 \rightarrow 0, T_1$; два поглощающих состояния [11].

$T_1 + T_2 \rightarrow 0, T_1, 2T_1; T_1 \rightarrow 0$; размножение нейтронов с выгоранием ядерного топлива [20].

$2T_1 + T_2 \rightarrow 3T_1; T_1 \rightarrow 0, 2T_2; 0 \rightarrow T_1$; брюсселятор [12, 21].

$T_1 + T_2 \rightarrow T_2 + T_4; T_1 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_1$; каталитический реактор с финальным продуктом [16].

$T_1 + T_2 \rightarrow T_4; T_4 \rightarrow T_3$; короткоживущее промежуточное соединение [17].

$T_1 \rightarrow 2T_2; 2T_2 \rightarrow T_1$; равновесная схема [22].

$T_1 + T_2 \rightarrow T_3 + T_4; T_3 + T_4 \rightarrow T_1 + T_2$; двусторонняя схема [22].

$T_1 + T_2 \rightarrow T_1; T_1 \rightarrow 0$; эпидемия Вейса [11, 23].

$T_1 + T_2 \rightarrow T_1; T_1 \rightarrow 0, 2T_1$; эпидемия Вейса с размножением переносчиков [24].

$T_1 + T_2 \rightarrow T_1; T_1 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_1, T_2$; открытая эпидемия Вейса [24].

$T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow 0$; эпидемия Бартлетта — Мак-Кендрика [25, 26].

$T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_2$; повторяющаяся эпидемия [25, 27].

$T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_1, T_2$; общая эпидемия [15].

$T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow T_3, T_2 + T_3$; замкнутая эпидемия.

$T_1 + T_3 \rightarrow T_1; T_2 + T_3 \rightarrow T_2; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 0$; эпидемия Беккера [24].

$T_1 + T_2 \rightarrow T_1 + T_3; T_1 + T_3 \rightarrow T_1; T_1 \rightarrow 0$; эпидемия Гани [28].

$T_1 + T_2 \rightarrow T_1; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow T_3; 0 \rightarrow T_1$ [29].

$T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow T_3; T_3 \rightarrow T_2$; эпидемия с приобретением иммунитета [30].

$T_1 + T_2 \rightarrow T_1 + 2T_2; T_1 \rightarrow 2T_1$; система носитель — паразит [24].

$T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 2T_2$; трехпараметрическая система хищник — жертва [17, 15, 11].

$T_1 + T_2 \rightarrow 0, 2T_1; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 2T_2$; четырехпараметрическая система хищник — жертва [31, 32].

$T_1 + T_2 \rightarrow 0, 2T_1; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 2T_2; 0 \rightarrow T_1$; система с иммиграцией [32].

$T_1 + T_2 \rightarrow T_1, T_2; 2T_1 \rightarrow T_1; 2T_2 \rightarrow T_2; T_1 \rightarrow 2T_1; T_2 \rightarrow 2T_2$; конкуренция двух видов [15, 32].

$T_1 + T_2 \rightarrow T_1, T_2; T_1 \rightarrow 2T_1; T_2 \rightarrow 2T_2$; взаимодействие двух видов [15].

$T_1 + T_2 \rightarrow T_2; T_1 \rightarrow 0, 2T_1; T_2 \rightarrow 0, 2T_2; 0 \rightarrow T_1, T_2$; открытая система [29].

$T_1 + T_2 \rightarrow T_3$; $T_3 \rightarrow T_2 + T_4$; $0 \rightarrow T_1$; система массового обслуживания [33, 34].

В первой части типового расчета студентом по схеме взаимодействий марковского процесса выписываются первое и второе уравнения для производящих функций переходных вероятностей [2, 11]. Из второго уравнения «термодинамическим предельным переходом» (при большом числе частиц) выводится система дифференциальных уравнений (2) для детерминированной модели кинетической схемы [9, 19, 25]. Находятся точки стационарности системы дифференциальных уравнений и проводится их анализ на устойчивость.

Во второй части типового расчета дается наглядное графическое описание скачков процесса рождения и гибели на дискретном фазовом пространстве и выписываются вероятностные распределения времени нахождения процесса в точке. На этой основе составляется и отлаживается на ЭВМ численная модель случайного процесса $(\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$ в одном из пакетов MATLAB, Maple, Mathematica. Графики траекторий в зависимости от времени t для детерминированной модели вида (2) даются стандартной подпрограммой метода Рунге — Кутты, для марковского процесса реализации строятся методом Монте-Карло. Выводятся графики детерминированных и стохастических траекторий на фазовых плоскостях.

Определяются наличие иммиграции, поглощающих состояний — финального распределения, (квази)стационарного распределения, возможность ухода случайного процесса на бесконечность. Путем численных экспериментов определяется порядок начального состояния, при котором стохастические реализации близки к детерминированным траекториям (если такая близость имеется). Анализируется и сравнивается поведение детерминированной модели и стохастической модели при $t \rightarrow \infty$.

В третьей части типового расчета строится одномерная или двумерная гистограмма финального распределения или (квази) стационарного распределения путем многократного повторения численного моделирования случайного процесса (при большом промежутке времени моделирования $t \in [0, T]$). Статистическими экспериментами исследуется изменение гистограммы в зависимости от одного из параметров (один из параметров интенсивности или начальное число частиц — по указанию преподавателя). Возможны значения параметров, когда гистограмма близка к плотности нормального закона, или плотности показательного распределения, или другому известному вероятностному распределению. Для некоторых схем взаимодействий преподавателем формулируются специальные вопросы о поведении марковской модели сложной системы.

Пример. Квазистационарное распределение марковского процесса со схемой взаимодействий $2T \rightarrow T$; $T \rightarrow 0, 2T$. В качестве примера приведем частичные результаты для одного из вариантов типового расчета. Рассматривается однородный во времени марковский процесс рождения и гибели

$$\xi(t), \quad t \in [0, \infty),$$

на множестве состояний

$$N = \{0, 1, 2, \dots\},$$

переходные вероятности

$$P_{ij}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}$$

которого при $t \rightarrow 0+$ представимы в виде ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$):

$$P_{i,i-1}(t) = (\lambda_2 i(i-1) + p_0 \lambda_1 i)t + o(t),$$

$$P_{ii}(t) = 1 - (\lambda_2 i(i-1) + \lambda_1 i)t + o(t),$$

$$P_{i,i+1}(t) = p_2 \lambda_1 i t + o(t),$$

$$P_{ij}(t) = o(t), \quad j \neq i-1, i, i+1,$$

где $p_0 \geq 0, p_2 \geq 0, p_0 + p_2 = 1$. Пример реализации процесса $\xi(t)$ приведен на рис. 1 при значениях параметров $\lambda_1 = 5,5, \lambda_2 = 0,1, p_0 = 0,1, p_2 = 0,9$ и начальном условии $i = 100$.

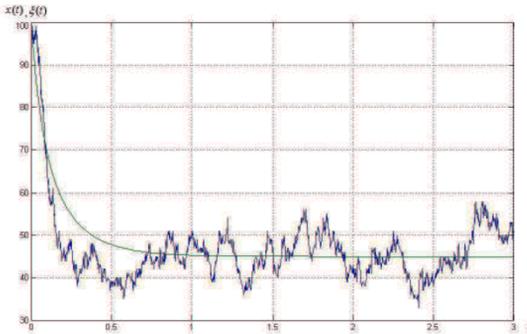


Рис. 1. Пример реализации случайного процесса $\xi(t)$ и траектория детерминированной модели $x(t)$

Производящая функция переходных вероятностей

$$F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j, \quad |s| \leq 1,$$

удовлетворяет второму уравнению Колмогорова [11]

$$\frac{\partial F_i(t; s)}{\partial t} = \lambda_2(s - s^2) \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} + \lambda_1(p_2 s^2 + p_0 - s) \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s}$$

с начальным условием $F_i(0; s) = s^i$.

Для рассматриваемой автокаталитической реакции с кинетической схемой $2T \rightarrow T; T \rightarrow 0, 2T$ уравнение детерминированной модели имеет вид

$$\dot{x}(t) = \lambda_1(p_2 - p_0)x(t) - \lambda_2 x^2(t), \quad x(0) = x_0$$

($x(t)$ — количество реагента T). Решение имеет вид ($p_0 \neq p_2$)

$$x(t) = \frac{\lambda_1(p_2 - p_0)x_0}{(\lambda_1(p_2 - p_0) - \lambda_2 x_0)e^{-\lambda_1(p_2 - p_0)t} + \lambda_2 x_0}. \quad (3)$$

Пусть $p_2 > p_0$. Из (3) следует, что детерминированная модель $x(t)$ выходит при $t \rightarrow \infty$ на стационарный уровень $x_c = \lambda_1(p_2 - p_0) / \lambda_2 > 0$. Случайный процесс $\xi(t)$ длительное время находится в окрестности точки x_c , но с вероятностью 1 попадает независимо от значений параметров в поглощающее состояние 0. Пример такой реализации процесса приведен на рис. 2.

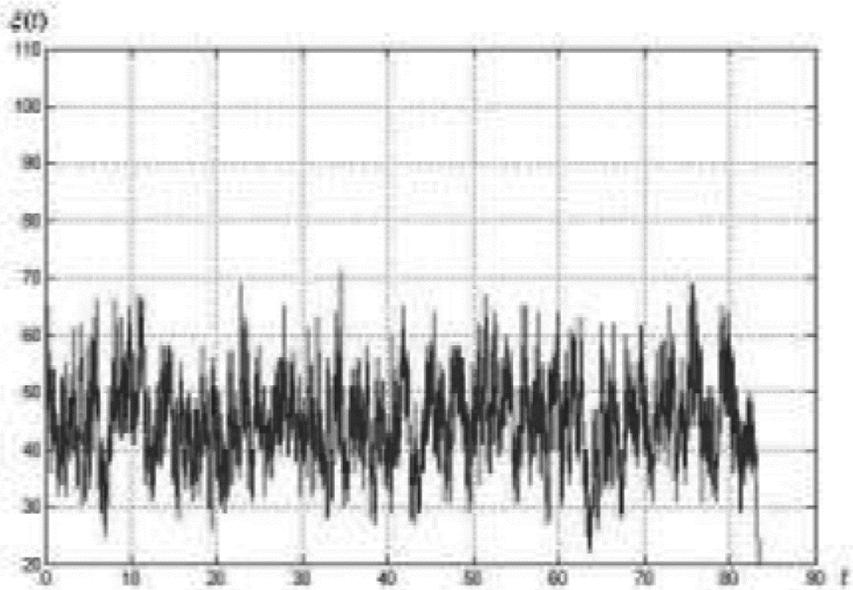


Рис. 2. Случайный процесс $\xi(t)$ с вероятностью 1 остановится в состоянии 0

На рис. 3 приведена полученная методом статистических испытаний гистограмма условного распределения значения случайного процесса (при условии непопадания случайного процесса в 0), построенная по 1000 реализаций процесса $\xi(t)$ на фиксированном промежутке времени $[0, 50]$ (рис. 1–3 даны при одинаковых значениях параметров). Если точка стационарности x_c детерминированной модели не близка к 0, то гистограмма близка к плотности нормального закона. В [7] доказано существование предельного условного распределения $q_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi(t) = j | \xi(t) > 0, \xi(0) = i\}$, $j = 1, 2, \dots$, и сделано предположение, что квазистационарное распределение близко к нормальному.

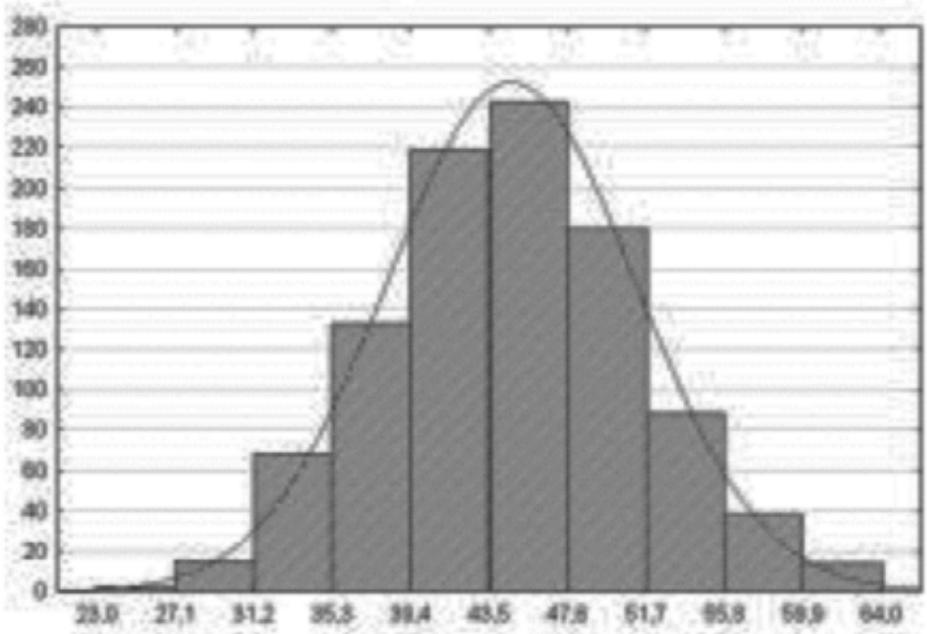


Рис. 3. Гистограмма квазистационарного распределения

Пример. Спиралевидные реализации марковского процесса рождения и гибели квадратичного типа $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1$, $T_1 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow T_2$. Приведем также пример двумерной стохастической модели из типового расчета. Рассматривается однородный во времени марковский процесс рождения и гибели

$$(\xi_1(t), \xi_2(t)), t \in [0, \infty),$$

на множестве состояний

$$N^2 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, 2, \dots\},$$

переходные вероятности

$$P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \mathbb{P}\{(\xi_1(t), \xi_2(t)) = (\beta_1, \beta_2) \mid (\xi_1(0), \xi_2(0)) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$$

которого при $t \rightarrow 0+$ представимы в виде ($\lambda_2 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_0 > 0$)

$$P_{(\alpha_1+1, \alpha_2-1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \lambda_2 \alpha_1 \alpha_2 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1-1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \lambda_1 \alpha_1 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2+1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \lambda_0 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = 1 - (\lambda_2 \alpha_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1 + \lambda_0) t + o(t).$$

Скачки марковского процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ изображены на рис. 4.

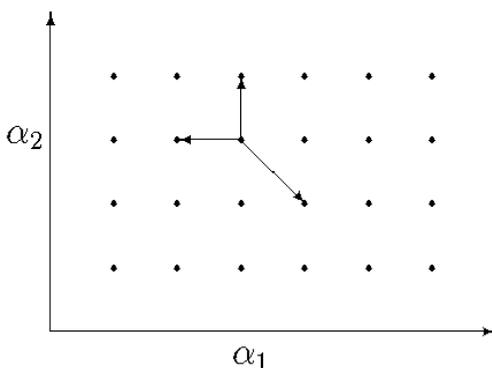


Рис. 4. Скачки двумерного марковского процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ на фазовой плоскости

Экспоненциальная (двойная) производящая функция переходных вероятностей ($|s_1| \leq 1, |s_2| \leq 1$)

$$F(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}$$

удовлетворяет первому и второму уравнениям Колмогорова [11]

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda_2 z_1 z_2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_2} \right) + \lambda_1 z_1 \left(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} \right) + \lambda_0 \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_2} - \mathcal{F} \right),$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda_2 (s_1^2 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_1 (1 - s_1) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_1} + \lambda_0 (s_2 - 1) \mathcal{F}$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, z_2; s_1, s_2) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2}$.

Случайный процесс интерпретируется как модель распространения инфекции в популяции с двумя типами особей: тип T_1 — инфицированные; тип T_2 — восприимчивые. Процесс $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ введен в [25] как модель повторяющейся эпидемии и обобщает марковский процесс эпидемии Бартлетта — Мак-Кендрика допущением, что количество восприимчивых особей пополняется извне иммиграцией. Для кинетической схемы $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1$, $T_1 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow T_2$ уравнения детерминированной модели имеют вид ($x_1(t)$ — количество T_1 , $x_2(t)$ — количество T_2)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_2 x_1 x_2 - \lambda_1 x_1; \\ \dot{x}_2 = -\lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_0 \end{cases} \quad (4)$$

с начальными условиями $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$.

Система нелинейных уравнений (4) исследована в [25] путем линеаризации в окрестности точки стационарности $(\lambda_0/\lambda_1, \lambda_1/\lambda_2)$. При некоторых условиях на параметры показано, что $x_1(t), x_2(t)$ представляют собой затухающие колебания — траектория на фазовой плоскости $x_1 O x_2$ есть спираль, накручивающаяся на точку стационарности.

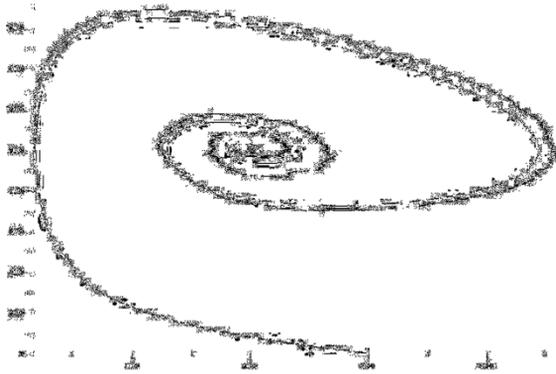


Рис. 5. Пример детерминированной траектории и стохастической реализации для схемы $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1$, $T_1 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow T_2$

На рис. 5 приведен полученный методом Монте-Карло пример спиралеобразной реализации марковского процесса; значения параметров $\lambda_2 = 0,00005$, $\lambda_1 = 0,5$, $\lambda_0 = 1000$ и начальные условия $\alpha_1 = 3000$, $\alpha_2 = 0$. Процесс $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ длительное время находится в окрестности точки стационарности $(\lambda_0/\lambda_1, \lambda_1/\lambda_2)$, но с вероятностью 1 попада-

ет независимо от значений параметров в поглощающее множество $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots\}$. Неизвестны аналитические или прямые вероятностные методы исследования описанной марковской системы.

Особенности выполнения студентами типового расчета. Выполнение домашнего задания по рассмотрению детерминированной и стохастической моделей для схемы взаимодействий и численному моделированию марковского процесса требует глубокого освоения теоретических основ специального курса. Кроме того, одной из целей выполнения типового расчета является развитие у учащихся самостоятельности в выборе последовательности действий при решении конкретной и объемной задачи в условиях неопределенности многих параметров.

При внешней простоте записи схемы взаимодействий (1) моделируемая система является многопараметрической уже в одномерном случае. Соответственно в рамках варианта типового расчета не ставится задача полного исследования стохастической системы, а только рассмотрение в каждом варианте своего, важного для приложений «случая общего положения». В частности, подбор параметров для визуализации траекторий в компьютерной графике иногда приводит к остановке моделирующей программы, так как рассматриваемые случайные процессы имеют счетное множество состояний, а счетное множество нереализуемо в памяти компьютера.

В зависимости от схемы взаимодействий и параметров модели часто имеется полное отличие поведения детерминированной траектории от поведения стохастической реализации — поведение вероятностной системы значительно многообразнее. Трудности у студентов при подборе значений параметров возникают всегда, когда стохастическая реализация становится близкой к детерминированной траектории, что возможно только при отношении значений параметров в $10^5 - 10^6$ раз (например, для бистабильной системы).

Возникают неясности при выборе отрезка времени для моделирования $t \in [0, T]$, так как при многократном повторении численного моделирования случайного процесса одна или более реализаций из, например, 1000 выдаваемых компьютером реализаций процесса с отличной от нуля вероятностью может оказаться не соответствующей рамкам проводимого исследования. Наконец, время расчета гистограммы на ЭВМ составляет порядка нескольких часов, и для уменьшения этого времени требуется коррекция всех вводимых в программу параметров и ограничений.

Указанные детали работы над типовым расчетом труднопредсказуемы в конкретном варианте схемы взаимодействий и требуют кропотливости и вдумчивости от студента старшего курса при самостоятельной работе над домашним заданием, времени для осмысления

возможных связей между параметрами и особенностями реализаций случайного процесса. Написание и отладка программы на ЭВМ преподавателем не контролируются — результаты ошибок программирования немедленно отображаются визуально при прогонке программы при измененных значениях параметров.

Далее, в условиях неопределенности параметров и накладываемых программных ограничений требуется специальными сериями различных визуальных экспериментов выделить «случай общего положения» и построить одномерные или двумерные гистограммы, несущие информацию об исследуемом стохастическом объекте, в том числе по численной оценке осредненных характеристик вероятностной системы.

Самостоятельно, без подсказок преподавателя, типовой расчет по моделированию стохастических систем выполняют три-четыре студента из группы. В некоторых случаях в ходе проводимых консультаций преподавателю приходится фиксировать некоторые параметры системы или упрощать первоначальную схему взаимодействий.

Типовой расчет является иллюстрацией сложившихся подходов при построении математических моделей сложных систем: макроскопического и микроскопического, детерминистического и стохастического, непрерывного и дискретного подходов, что вызывает неизменный интерес у учащихся.

Заключение. В представленном курсе по марковским моделям сложных систем учитываются требования федерального стандарта высшего образования по направлению подготовки «Прикладная математика» для магистров. Учащимся разрабатывается логическая схема последовательности выполнения расчетов при создании вычислительных систем математического моделирования (физико-технических) систем и процессов, а также схемы моделирующих алгоритмов систем, которые реализовываются с использованием как языков общего назначения, так и пакетов прикладных программ (языков и систем) моделирования.

Студент овладевает приемами постановки задач математического моделирования систем и процессов, а также знаниями для создания моделирующих вычислительных систем. Все это в курсе «Марковские модели систем с взаимодействием» студенты осваивают, моделируя и исследуя сложный марковский процесс и его детерминированное приближение.

В учебном пособии [2] сформулированы темы курсовых и дипломных работ в форме задач. Прослушавшие специальный курс студенты участвуют в работе СНТО кафедры высшей математики, выступают с докладами на ежегодных конференциях «Студенческая весна». В работе этой и других конференций приняли участие и опубликовали свои результаты по марковским процессам ряд студентов, дипломников и аспирантов факультета ФН.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Калинин А.В. *Случайные процессы в естествознании: дискретное фазовое пространство*. Препринт. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999, 40 с.
<http://hoster.bmstu.ru/kalinkin/branching/nature.zip>
- [2] Калинин А.В. *Схемы взаимодействий: детерминированные и стохастические модели*. Препринт. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, 44 с. <http://hoster.bmstu.ru/kalinkin/branching/interaction.zip>
- [3] Калинин А.В. Курс теории марковских процессов. *Обзор прикладной и промышленной математики. Сер. «Вероятность и статистика»*, 2001, т. 8, вып. 1, с. 198–200.
- [4] Калинин А.В. Специальный курс «Математическое моделирование кинетических схем». *Обзор прикладной и промышленной математики*, 2005, т. 12, вып. 2, с. 379–380.
- [5] Калинин А.В. Типовой расчет по марковским процессам рождения и гибели квадратичного типа. *Тез. докл. Сб. Всерос. конф. «Прикладная теория вероятностей и теоретическая информатика»*. Москва, Изд-во ИПИ РАН, 2012, с. 61–63.
- [6] Chen A., Pollett P., Zhang H., Li J. The Collision Branching Process. *J. Appl. Prob.*, 2004, vol. 41(4), pp. 1033–1048.
- [7] Sirl D. Limiting conditional distributions for a class of autocatalytic chemical reactions. *Centre of Excellence for Mathematics and Statistics of Complex Systems*. Brisbane: University of Queensland Press, 2004, 8 p.
- [8] Chen A., Li J., Chen Y., Zhou D. Extinction probability of interacting branching collision processes. *Adv. Appl. Probab.*, 2012, vol. 44(1), pp. 226–259.
- [9] Баруча-Рид А.Т. *Элементы теории марковских процессов и их приложения*. Москва, Наука, 1969, 512 с.
- [10] Гихман И.И., Скороход А.В. *Введение в теорию случайных процессов*. Москва, Наука, 1977, 568 с.
- [11] Калинин А.В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. *Усп. матем. наук*, 2002, т. 57, вып. 2, с. 23–84.
- [12] Калинин А.В., Ланге А.М., Мастихин А.В., Шапошников А.А. Численные методы Монте-Карло для моделирования схем взаимодействий при дискретных состояниях. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2005, вып. 2(17), с. 53–74.
- [13] Севастьянов Б.А. *Ветвящиеся процессы*. Москва, Наука, 1971, 436 с.
- [14] Севастьянов Б.А., Калинин А.В. Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц. *Докл. АН СССР*, 1982, т. 264, вып. 2, с. 306–308.
- [15] Anderson W.J. *Continuous-time Markov chains: an application-oriented approach*. New York, Springer, 1991., 340 p.
- [16] Эмануэль Н.М., Кнорре Д.Г. *Курс химической кинетики*. Москва, Высшая школа, 1974, 400 с.
- [17] Гардинер К.В. *Стохастические методы в естественных науках*. Москва, Наука, 1986. 526 с.
- [18] Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы. Зарубин В.С., Крищенко А.П., ред. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 448 с.
- [19] Леонтович М.А. Основные уравнения кинетической теории газов с точки зрения теории случайных процессов. *ЖЭТФ*, 1935, т. 5, вып. 3–4, с. 211–231.

- [20] Дорогов В.И., Чистяков В.П. *Вероятностные модели превращения частиц*. Москва, Наука, 1988, 112 с.
- [21] Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. Москва, Мир, 1979, 512 с.
- [22] Dadvay I.G., Ninham B.W., Staff P.J. Stochastic models for second-order chemical reaction kinetics. The equilibrium state. *J. Chem. Phys.*, 1966, vol. 45, pp. 2145–2155.
- [23] Weiss G. On the spread of epidemics by carries. *Biometrics*. 1965, vol. 21(2), pp. 481–490.
- [24] Becker N.G. Interactions between species: some comparisons between deterministic and stochastic models. *Rocky Mountain J. Math*, 1973, vol. 4(1), pp. 53–68.
- [25] Бартлетт М.С. *Введение в теорию случайных процессов*. Москва, ИЛ, 1958, 384 с.
- [26] *Математическая энциклопедия*. Т. 5. Москва, Советская энциклопедия, 1985.
- [27] Бейли Н. *Математика в биологии и медицине*. Москва, Мир, 1970, 326 с.
- [28] Gani J. Approaches to the modelling of AIDS. *Lecture notes in biomathematics*, 1990, vol. 86, pp. 145–154.
- [29] Becker N. G. A stochastic model for two interacting populations. *J. Appl. Prob.*, 1970, vol. 7(3), pp. 544–564.
- [30] Kendall D.G. Deterministic and stochastic epidemics in closed populations. *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1954–1955, vol. 4. Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1956, pp. 149–165.
- [31] Hitchcock S.E. Extinction probabilities in predator-prey models. *J. Appl. Prob.*, 1986, vol. 23(1), pp. 1–13.
- [32] Gause G.F. *The Struggle for Existence*. Baltimore, Williams and Wilkins, 1934, 163 p.
- [33] Сергеев А.А. Предельные теоремы для случайных процессов, характеризующих работу системы массового обслуживания с подвижными приборами. *Обзорные прикладной и промышленной математики*. 2005, т. 12, вып. 3, с. 680.
- [34] Лисицина М.В. Система массового обслуживания с подвижными приборами. *Студенческий научный вестник*. Сб. тез. докл. студенческой науч.-техн. конф. Т. 3. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006, с. 129–130.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Калинкин А.В. Постановка специального курса «Марковские модели систем с взаимодействием» по направлению «Прикладная математика». *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 5. URL: <http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/739.html>

Калинкин Александр Вячеславович родился в 1956 г., окончил в 1978 г. МГУ им. М.В. Ломоносова, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 научных работ в области теории вероятностей и математического моделирования. e-mail: kalinkin@bmstu.ru