УДК 519.1

Опыт преподавания дискретной математики: сети Петри

© Н.В. Золотова, Р.С. Исмагилов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Статья посвящена изложению одного из многочисленных приложений общих понятий дискретной математики. В качестве примера излагаются начала теории сетей Петри. Даны определения основных понятий этой теории. Описана работа сетей Петри на языке теории графов (наглядное описание) и затем на языке линейных операций над векторами с целочисленными координатами. Затронута теория графов (и деревьев) маркировок. Отмечена проблема алгоритмической разрешимости задач, связанных с графами маркировок. Объяснено, каким образом сети Петри применяются для описания сложных систем, а также для описания работы сложных систем взаимодействующих устройств. Подробно рассмотрен пример составления сети Петри такого рода. Изложение не требует предварительных знаний по данной теме. Для восприятия излагаемого материала необходимы только элементарные сведения по теории графов и начала линейной алгебры. Материал статьи может быть использован в качестве тем для внеаудиторной работы студентов.

Ключевые слова: *сети Петри, позиции, переходы, графы, деревья, маркированные сети, векторы, линейная алгебра.*

Введение. Приступая к изучению дискретной математики, студенты сталкиваются с новым для них языком математики. Их предыдущий опыт связан с «непрерывными» величинами, функциями и пр. Действия над ними достаточно привычны (еще со времен обучения в школе). Столь же привычны и геометрические образы, с которыми связано изучение аналитической геометрии и линейной алгебры, и вполне стандартные действия с векторами и т. д. В дискретной математике несколько иной уровень абстракции и при изучении теории формальных языков нет опоры на привычные интуитивные образы.

Далее, в знакомой студенту «непрерывной» математике имеются вполне понятные мотивировки — ответы на вопрос, для чего это надо; вычисляются площади и объемы, скорости движения и пройденные пути, решаются уравнения и системы уравнений и делаются прочие полезные вещи. Переходя к дискретной математике, обычно сообщают студенту, что это все окажется полезным в дальнейшем — для целей вычислительной техники и пр. [1–7]. Но этим не приобретается интуитивное ощущение «нужности» предмета.

Нам хотелось показать студентам, что «абстрактные» понятия дискретной математики могут быть применены к вполне конкретным задачам; при этом описываются они весьма просто и наглядно. В качестве примера избрали теорию сетей Петри. Такой выбор является достаточно естественным, ибо в последние десятилетия сети Петри проникают в разные области знания как весьма действенный инструмент для описания сложных систем взаимодействующих объектов. Достаточно подробное изложение этой теории дано, например, в книгах [3, 8, 9]. Разумеется, в статье идет речь только об основных понятиях этой теории, однако это изложение может служить основой для дальнейшего изучения предмета, а также для внеаудиторных занятий студентов.

1. Сети Петри. Возникли в 1962 г., и основной областью их применения являлись вычислительные системы. Эти системы, как правило, состоят из многих компонент, имеющих многообразные и сложные взаимные связи. Оказалось, сети Петри — это удобный способ обозреть эти связи. В дальнейшем сети Петри нашли применение также для анализа других сложных систем. Ниже (в разд. 6) приведен пример (разумеется, чрезвычайно простой) подобного применения.

Что такое сеть Петри? Это есть (по определению) ориентированный граф со следующими свойствами: его вершины разбиты на два непересекающихся множества P, T, и каждое (ориентированное) ребро идет от вершины, принадлежащей одному из этих множеств, к вершине, лежащей в другом. Вершины из множества P называются позициями и изображаются кружками, вершины из T называются переходами и изображаются палочками; (буквы P и T — от английских слов position и transition). Позиции обозначаются через p_i, а переходы — через t_k; здесь i, k — это номера позиций и переходов. От позиции к переходу (и от перехода к позиции) могут вести несколько ребер. Позиция, изображенная на рис. 1, называется входящей в переход t_1, а позиция на рис. 2 — выходящей из перехода t_1. Одна и та же позиция может быть как входной, так и выходной. На рис. 3 показан пример сети Петри.

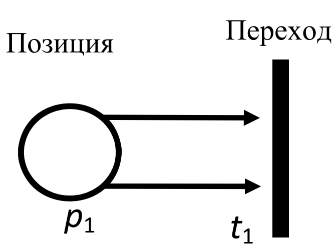

Рис. 1

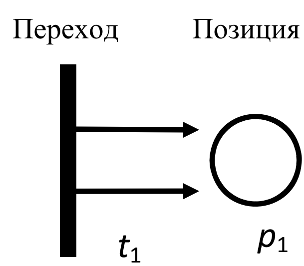

Рис. 2

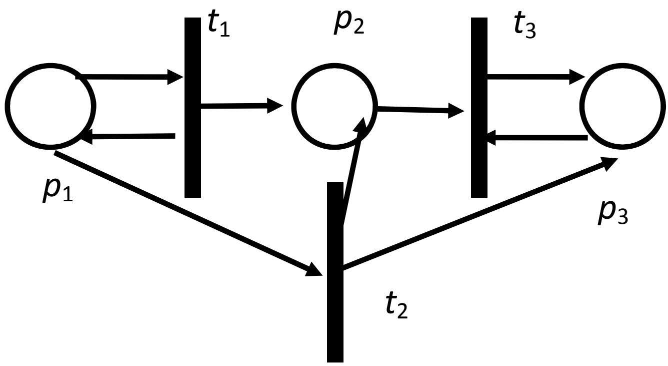

Рис. 3

2. Маркировка сетей Петри. Запуск перехода. Маркировать сеть Петри — значит поставить в соответствие любой позиции целое неотрицательное число; таким образом, маркировка — это отображение μ: $P \to N$, где $N = \{0, 1, \ldots\}$. Маркировку изображают наглядно, вписав в каждую позицию p_i (т. е. в кружок, изображающий позицию) $\mu(p_i)$ точек; эти точки называют фишками. Вот пример (рис. 4) маркированной сети Петри (просто вписали фишки в позиции p_1, p_2). Здесь $\mu(p_1) = 2$, $\mu(p_2) = 1$, $\mu(p_3) = 0$, т. е. $\mu = (2, 1, 0)$.

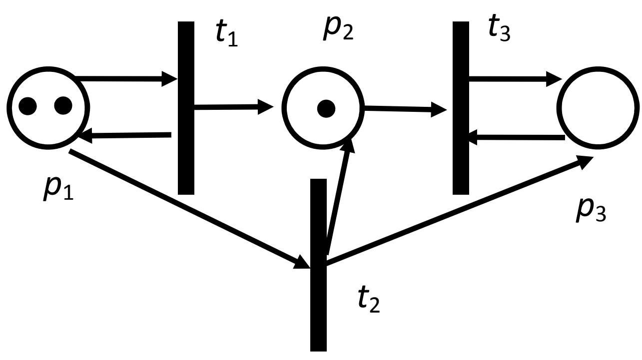

Рис. 4

Удобный способ задать маркировку состоит в следующем. Перенумеруем позиции и тем самым получим цепочку позиций p_1, p_2, …, p_m. Если μ — некоторая маркировка, то для каждой позиции имеем число $\mu(p_i)$ — число фишек в кружке, изображающем позицию p_i. Отождествим маркировку с полученным вектором $(\mu(p_1), \ldots, \mu(p_m))$. Итак, будем писать $\mu = (\mu(p_1), \ldots, \mu(p_m))$. Например, для сети, изображенной на рис. 4, имеем маркировку $\mu = (2, 1, 0)$. В дальнейшем будем задавать маркировку либо рисунком (фишками), либо в виде вектора.

Как видно в следующем разделе, сеть Петри, получившая маркировку, начинает «работать». Чтобы объяснить, в чем заключается «работа», введем некоторые понятия. Возьмем в маркированной сети Петри переход t_k и входящую в него позицию p_i (см. рис. 5–8).

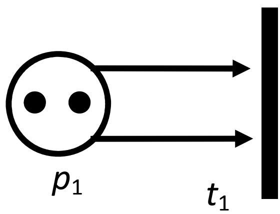

Рис. 5

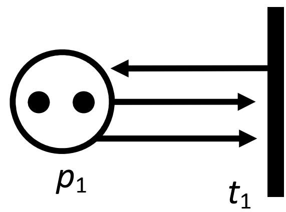

Рис. 6

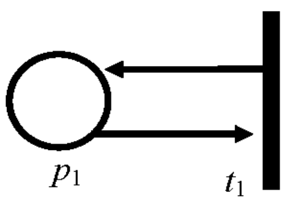

Рис. 7

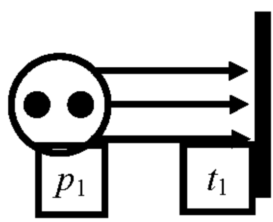

Рис. 8

Переход t_k активен по отношению к позиции p_i, если число фишек в позиции p_i (т. е. число $\mu\,(p_i)$) не меньше числа ребер, идущих от p_i к t_k. На рис. 5 и 6 переход t_1 активен по отношению к позиции p_1, а на рис. 7 и 8 — неактивен. На рис. 4 переходы t_1, t_2 активны по отношению к позициям p_1 и p_2 соответственно, а переход t_3 неактивен (ибо в t_3 идет ребро из позиции p_3, в которой нет фишек). Далее переход t_k активен (в данной маркировке μ), если он активен по отношению к каждой позиции, входящей в t_k. На рис. 4 переходы t_1, t_2 активны, а переход t_3 неактивен.

Объясним, что означает «запустить» переход. Пусть t_k — активный переход; пусть p_i, … — все позиции, входящие в t_k, …, и p_r, … — все позиции, выходящие из t_k. Изменим значения маркировки μ в указанных позициях (т. е. число фишек в кружках) следующим образом: в каждой входящей позиции p_i уменьшим величину $\mu\,(p_i)$ на величину, равную числу ребер, идущих от позиции p_i к переходу t_k, а в каждой выходящей позиции p_r увеличим число $\mu\,(p_r)$ на число ребер, идущих от t_k. Вот переход и запущен, в результате исходная маркировка заменилась новой маркировкой μ'. Условимся записывать это формулой $\mu' = (\mu, t_k)$.

Удобно представлять описанное изменение числа фишек в позициях следующим наглядным образом. По любому ребру, идущему от p_i к t_k, одна фишка перескакивает в переход t_k и поглощается этим переходом. После этого по каждому ребру, идущему от t_k к p_r, одна фишка перескакивает из t_k в p_r. (Будем считать, что в t_k хранится много фишек, которые на рисунке не изображены по причине недостаточности места, а потому такой переход осуществим.)

Для примера возьмем маркированную сеть Петри из рис. 4 и запустим переход t_1 (напомним, что он активен); приходим к сети на рис. 9. Запустив в ней переход t_2, получаем сеть на рис. 10. В разд. 3 мы вернемся к этому примеру и посмотрим, к какой картине приводит продолжение этой деятельности.

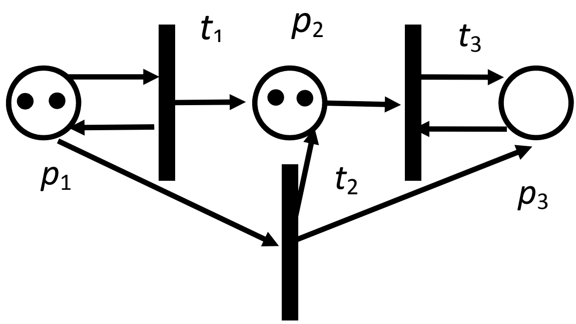

Рис. 9

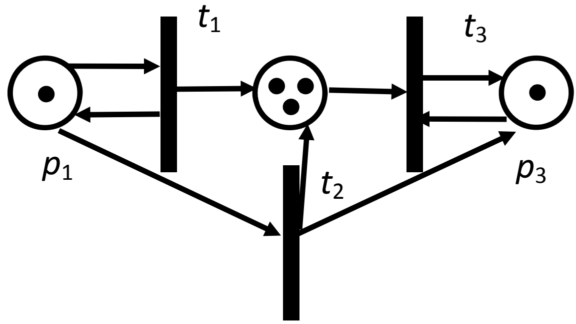

Рис. 10

3. Работа маркированной сети Петри. Пусть имеем сеть Петри с маркировкой μ. Пусть в ней имеется активный переход t_k, «запустив» который получим новую маркировку μ'. Предположим, имеется переход, активный в этой новой маркировке. Запустив его, приходим к третьей маркировке μ''. Продолжим в том же духе, пока это возможно (т. е. пока имеются активные переходы), либо ограничимся несколькими «тактами».

Итак, работа маркированной сети Петри есть (по определению) цепочка

$$\mu_1,\, t_1;\, \ldots\, \mu_k,\, t_k;\, \ldots \qquad (1)$$

(конечная или бесконечная) со следующими свойствами: 1) μ_k — это маркировки нашей сети, причем μ_1 — это исходная маркировка; 2) t_k — это переход, активный в маркировке μ_k; 3) μ_{k+1} получается из μ_k как результат запуска перехода t_k, т. е. $\mu_{k+1} = (\mu_k, t_k)$. Вот пример работы сети Петри, изображенной на рис. 4 (ограничимся тремя тактами):

$$(100),\, t_1;\ (110),\ t_2;\ (021),\ t_3;\, (011).$$

4. Граф маркировок и дерево маркировок. Возьмем сеть Петри C и рассмотрим следующий граф с мечеными ребрами. Каждая его вершина — это некоторая маркировка сети; если μ, μ' — две маркировки и $\mu' = (\mu, t_k)$, т. е. μ' получена из μ запуском перехода t_k, то от μ к μ' идет ребро с меткой t_k. Это и есть граф маркировок. Обозначим его через $G(C)$. Граф $G(C)$ бесконечен (ибо бесконечно множество маркировок).

Для каждой вершины графа $G(C)$ (т. е. для каждой маркировки μ) обозначим через $G(C, \mu)$ множество вершин, достижимых из μ (по путям в графе). Это есть связная, но, вообще говоря, не сильно связная компонента графа. Описание графа $G(C, \mu)$ — он может оказаться как конечным, так и бесконечным — это увлекательная и, как правило, достаточно сложная задача.

Перейдем к понятию дерева маркировок. Фиксируем маркировку μ. Для каждого активного в этой маркировке перехода t_k изобразим ориентированное ребро (μ, μ'), где $\mu' = (\mu, t_{k'})$. Пометим это ребро символом t_k. Таким же образом поступаем с μ'. Продолжая аналогичным образом, получаем дерево. Подчеркнем, что при этом построении одна и та же маркировка может встречаться более одного раза. Получили дерево маркировок (рис. 11).

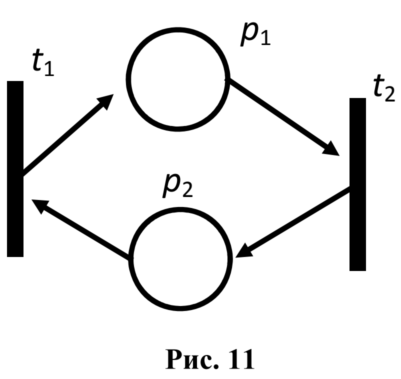

Рис. 11

Пример 1. Для сети C, изображенной на рис. 11, дерево $T(C, \mu)$ с начальной маркировкой $\mu = (0, 1)$ показано на рис. 12 (оно бесконечно). Граф $G(C, \mu)$ устроен совсем просто (рис. 13).

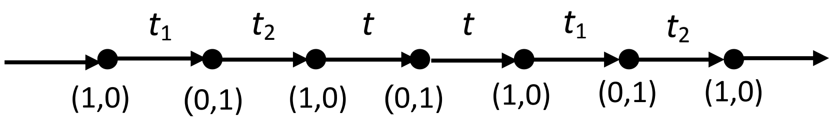

Рис. 12

Пример 2. Для сети на рис. 3 с начальной маркировкой $\mu = (1, 0, 0)$ граф $G\,(C, \mu)$ имеет вид, изображенный на рис. 14. Заинтересованный читатель может проверить это, а также описать дерево $T(C, \mu)$. Впрочем, целесообразно приступить к этой работе после разд. 5, в котором дается удобный вычислительный способ анализа маркированных сетей Петри.

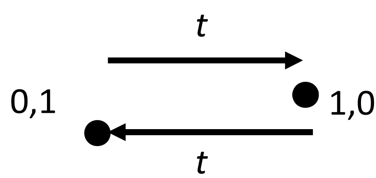

Рис. 13

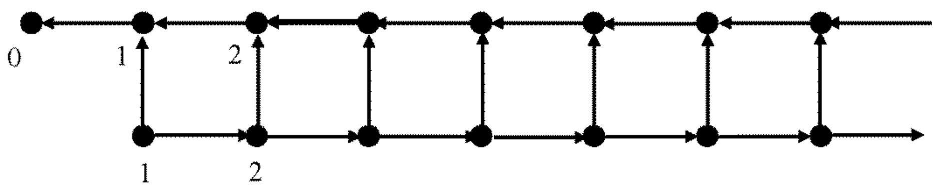

Рис. 14

5. Векторный язык для описания маркированной сети Петри. Пусть $p_1, \ldots, p_m$ — все позиции сети Петри; $t_1, \ldots, t_n$ — все переходы. Для каждого перехода t_k введем вектор $vec\ \boldsymbol{a}_k = (a_k(1), \ldots, a_k(m))$, где $a_k(r)$ — число ребер, идущих от p_r к t_k. Аналогично возьмем вектор $vec\ \boldsymbol{b}_k = (b_k(1), \ldots, b_k(m))$, где $b_k(r)$ — число ребер, идущих от t_k к p_r. (Разумеется, $a_k(r) = 0$, если позиция p_r не является входящей в переход t_k; аналогично $b_k(r) = 0$, если позиция p_r не является выходящей из t_k.) Возьмем некоторую маркировку μ и запустим переход t_k. Получаем новую маркировку $\mu' = (\mu, t_k)$. Напомним, что маркировки мы отождествляем с векторами. Ясно, что $\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{b}_k$.

Следовательно, работа маркированной сети Петри (раньше мы записали эту работу в виде (1)) может быть записана в виде цепочки векторов с целыми неотрицательными координатами:

$$\mu_1,\ t_{i(1)};\ \mu_2, \ldots, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\mu}_{k+1} = \boldsymbol{\mu}_k - \boldsymbol{a}_{i(k)} + \boldsymbol{b}_{i(k)}$ и $\boldsymbol{\mu}_k \geq \boldsymbol{a}_{i(k)}$ при $k = 1, \ldots$ (Поясним, что неравенство $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{v}$ для двух векторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ означает, что $u_i \geq v_i$ для всех i.) Здесь $i(k)$ есть номер активной позиции, переводящей μ_k в $\boldsymbol{\mu}_{k+1}$.

Из сказанного следует, что любая маркировка, достижимая из начальной маркировки, представляется в виде линейной комбинации векторов $-\boldsymbol{a}_{i(k)}+\boldsymbol{b}_{i(k)}$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Обратное утверждение может оказаться неверным (из-за неравенств $\mu_k \geq \boldsymbol{a}_{i(k)}$ для всех i).

Итак, анализ сети Петри сводится к действиям над векторами. Хотя указанные действия над векторами весьма просты, полное описание графа маркировок для произвольной сети Петри оказывается сложной задачей, связанной с проблемами алгоритмической разрешимости (подробнее см. [5, 9]). Эти вопросы рассматривались во многих работах; они продолжают интересовать исследователей.

В заключение этого раздела вернемся к задаче описания графа маркировок для сети из рис. 3 с начальной маркировкой $\mu = (1, 0, 0)$. Эта задача была поставлена в конце разд. 4. Легко видеть, что позициям t_1, t_2, t_3 соответствуют векторы $\boldsymbol{a}_1=(1, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 1, 1)$ и $\boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{b}_3 = (0, 0, 1)$ соответственно. Используя их и начальную маркировку $\mu = (1, 0, 0)$, находим дальнейшие маркировки по формуле (2). Изобразив полученные точки геометрически и проведя необходимые ребра, получаем граф, изображенный на рис. 14.

6. Приложения сетей Петри. Область применения сетей Петри обширна; ограничимся одним примером. Пусть некоторое изделие обрабатывается автоматами M_1, … (на некоторых этапах работы несколько автоматов могут действовать совместно). Построим сеть Петри, описывающую процесс. В качестве переходов выступают действия: подать изделие на обработку; удалить готовое изделие из системы; автоматам M_{i1}, M_{i2}, … начать обработку; автоматам M_{i1}, M_{i2}, … закончить обработку. В качестве позиций выступают состояния системы: изделие ждет начала обработки автоматами M_{i1}, M_{i2}, …; готовое изделие ждет отправления на выход; идет работа автоматов M_{i1}, M_{i2}, …; автомат M_i свободен. Наконец, ребра описывают последовательность действий. Вот простой пример.

Пример 3. Изделие обрабатывается сначала автоматом M_1, затем — автоматом M_2; готовое изделие удаляется из системы. Опишем позиции и переходы.

Позиции (состояния):

а) изделие ждет обработки автоматом M_1;
б) M_1 свободен;
в) M_1 работает над изделием;
г) изделие, уже обработанное автоматом M_1, ждет обработки автоматом M_2;
д) M_2 свободен;
е) M_2 работает над изделием;
ж) готовое изделие ждет отправления на выход.

Переходы (действия):

1) подать изделие на вход в систему;
2) удалить готовое изделие из системы;
3) автомату M_1 начать обработку;
4) автомату M_1 закончить обработку;
5) автомату M_2 начать обработку;
6) автомату M_2 закончить обработку.

Соответствующая сеть Петри (уже с маркировкой) изображена на рис. 15 (пусть читатель проверит). Расположив позиции в алфавитном порядке а–ж, получаем, что последовательность маркировок и переходов имеет вид

$$(1100100), 3; (0010100), 4; (0101100), 5; (0100010), 6; (0100001).$$

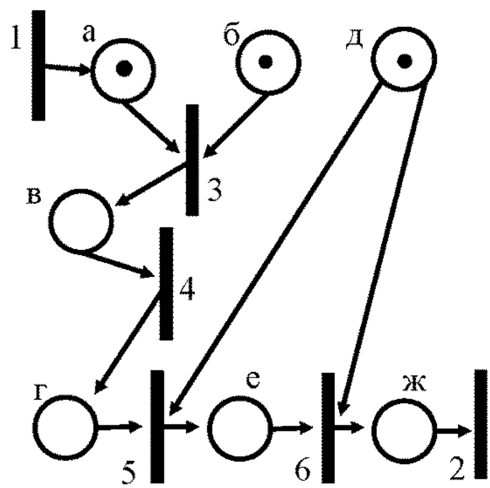

Рис. 15

Таким образом, рассмотрена работа двух обрабатывающих устройств. Более сложная (и более реалистическая) ситуация возникает тогда, когда имеются еще операторы, обслуживающие эти устройства. Однако операторов можно причислить к «обрабатывающим устройствам», при этом возникает более сложная система взаимодействия «обрабатывающих устройств», которая также может быть описана с помощью сетей Петри. Таким образом, сети Петри предоставляют широкие возможности «моделировать» сложные системы.

Заключение. В статье указаны элементы, из которых состоит сеть Петри, и описана ее работа, а также отмечено важное и интересное обстоятельство: работа сети Петри может быть описана с помощью линейных операций над векторами, координаты которых — натуральные числа. Эти простые операции привели к содержательному анализу, имеющему важные приложения, и наглядному представлению сложных систем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Белоусов А.И., Ткачев С.Б., *Дискретная математика*, Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана (серия «Математика в техническом университете», вып. XIX), 2001.

[2] Ершов А.П. *Введение в теоретическое программирование*. Москва, Наука, 1977.

[3] Котов В.Е. *Введение в теорию схем программ*. Новосибирск, Наука, 1978.

[4] Компьютер и задачи выбора. Москва, Наука, 1989.

[5] Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики, Москва, Изд-во МАИ, 1992.

[6] Оре О. Теория графов, перевод с англ. Москва, Либроком, 2009, 354 с.

[7] Р. Уилсон. *Введение в теорию графов*. Москва, Мир, 1977.

[8] Котов В.Е. Сети Петри. Москва, Наука, 1984.

[9] Питерсон Дж. *Теория сетей Петри и моделирование систем*. Москва, Мир, 1984.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Золотова Н.В., Исмагилов Р.С.. Опыт преподавания дискретной математики: сети Петри. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 5. URL: http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/738.html

Золотова Наталия Викторовна родилась в 1947 г., окончила механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1970 г. Ст. преподаватель кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда статей по гидродинамике и учебных пособий по математике для студентов.
e-mail: ZolotovaNatalija@yandex.ru

Исмагилов Раис Салманович родился в 1936 г., окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1960 г. Д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор работ по функциональному анализу. e-mail: ismagil@bmstu.ru