УДК 378

Методические особенности преподавания курса теории функций комплексного переменного

© В.Г. Богомолов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В работе рассматриваются методические аспекты изложения курса теории функций комплексного переменного (ТФКП) на лекциях и практических занятиях со студентами инженерных направлений подготовки. Отмечаются особенности преподавания, связанные с рассмотрением задач ТФКП для различных физических приложений, а также особенности восприятия материала студентами. Предлагаются формы контроля усвоения материала. Затрагивается исторический аспект развития ТФКП как науки и рекомендуется методически оправданный способ изложения сложного для восприятия материала. Особое внимание уделяется тематике первой лекции курса. Даются методические рекомендации преподавателям, ведущим практические занятия, а также рекомендации по обучению студентов, придерживаясь трех важнейших принципов: принципа аналогового моделирования содержания тем, принципа локальной интеграционной систематизации знаний студентов и принципа иллюстрирования понятий и методов ТФКП в различных областях физики и техники. Дается пример теста для проверки знания студентом определений и свойств объектов изучения ТФКП, состоящего из десяти заданий с выбором ответа.

Ключевые слова: *теория функций комплексного переменного, методика, приложения.*

Введение. Учащиеся, избравшие предметом своей будущей профессиональной деятельности технические и физические объекты, неизбежно должны иметь серьезные навыки работы не только с простейшими математическими величинами, но и с абстрактными математическими моделями. Одна из самых востребованных моделей — модель числа и функции, сформированная в рамках ТФКП. Овладение основами действий с этой моделью происходит при изучении раздела ТФКП, который в зависимости от направления и уровня подготовки может быть отнесен как к базовой, так и к вариативной части учебного плана.

Целью преподавания данной дисциплины является формирование у студентов представления о комплексном числе, теории функций комплексного переменного, теории вычетов, разложении аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана, контурном интегрировании.

Задачами курса ТФКП являются: формирование у студентов определенной математической базы, которая выражается в знании и понимании основных понятий ТФКП, их происхождения и развития;

овладение основными понятиями и методами ТФКП для их дальнейшего применения к решению практических задач в различных разделах математики и других естественно-научных и профессиональных дисциплин; установление связей ТФКП с другими науками.

1. Преподавание ТФКП в техническом вузе. Исторически развитие ТФКП происходило в трех направлениях, и долгое время научные исследования в этой области проводились только в плане развития одного из направлений. Первое направление — теория дифференцируемых функций Коши, второе — геометрическое направление, в основу которого положены идеи Римана. В основу третьего — аналитического направления была положена идея Вейерштрасса о возможности представления функций степенными рядами. От того, какой подход берется за основу, зависят последовательность изложения теории и методы доказательства теорем.

Большинство преподавателей придерживается следующего порядка изложения: комплексные числа и их свойства; однозначные и многозначные функции комплексного переменного; предел, непрерывность, дифференцируемость и аналитичность ФКП; интегрирование ФКП; ряды Тейлора и Лорана; нули и особые точки ФКП; вычеты и вычисление интегралов с помощью вычетов.

Этим определяется последовательность изучения тем на практических занятиях: комплексные числа и их свойства, понятие аналитичности в смысле Коши (условия Коши — Римана) и гармонические функции; основные функции комплексного переменного и их характеристики; первообразная аналитической функции и контурный интеграл; разложение аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана; изолированные особые точки и вычеты; теоремы Коши об интегралах; приложения интегралов комплексной переменной.

Из указанного перечня видно, что за основу берется подход Коши. Это является методически оправданным, поскольку изложение материала в курсе математического анализа проводилось в аналогичной последовательности.

Традиционно изучение курса ТФКП строится в рамках лекционно-семинарской системы. Оно основано на систематичности и постепенности изложения теоретического и практического материала, а не на фрагментарности или разрозненном описании алгоритмических способов решения. Изучение материала должно происходить в строгой логической последовательности, по частям, с установлением взаимосвязи между новыми и уже изученными (в том числе и в других курсах математики) понятиями. Следует идти от известного к неизвестному, от простого к сложному, от легкого к трудному.

Лекция составляет основу теоретического обучения и должна давать систематизированные основы ТФКП, концентрировать внимание обучающихся на наиболее сложных и узловых вопросах, стимулировать их активную познавательную деятельность и способствовать формированию творческого мышления.

Первая лекция курса должна содержать: определение учебной дисциплины; краткую историческую справку [1]; цели и задачи дисциплины, ее роль в общей системе обучения и связь со смежными дисциплинами; особенности самостоятельной работы студентов; контрольные мероприятия по курсу; основную и дополнительную учебную и методическую литературу. Следует рекомендовать те учебные издания, которые не предназначены профессиональным математикам и являются источниками основных положений ТФКП и образцов решения математических и прикладных задач [2–7].

Большая методическая ответственность лежит на преподавателях, ведущих практические занятия по ТФКП. Учитывая сложность этой теории, в начале каждого практического занятия рекомендуется проводить краткий опрос по прочитанному на лекции материалу. Этот опрос должен быть направлен исключительно на выявление субъективного опыта студентов и восприятия ими новых понятий. Проанализировав результаты опроса, преподаватель оценивает уровень базовых знаний, на который он может опереться при изложении новой темы. Умения и навыки, приобретенные на семинарских занятиях, способствуют закреплению полученных теоретических знаний и освоению техники расчета, что необходимо как для решения конкретных задач ТФКП, так и для правильного понимания и освоения последующего теоретического лекционного материала.

Можно продемонстрировать и возможности математических пакетов, в частности MathCAD, для решения алгоритмических задач ТФКП [8].

Перечислим основные принципы формирования методики изучения курса ТФКП.

1. Принцип аналогового моделирования содержания тем ТФКП по отношению к ранее изученным сходным разделам математического анализа. Содержание каждого нового раздела ТФКП моделируется так, чтобы ранее полученные знания и способы действий не противоречили, а соответствовали новым смыслам, знаниям и способам действий.

2. Принцип локальной интеграционной систематизации знаний студентов, который предполагает проведение систематизации по основным понятиям, математическим фактам, способам действий внутри темы. Она должна проводиться регулярно с увеличением доли самостоятельности студентов в получении ее результатов.

3. Принцип иллюстрирования востребованности понятий и методов ТФКП на примерах физики и техники.

2. Некоторые прикладные аспекты ТФКП. Рассмотрим некоторые приложения методов ТФКП [9, 10].

В любой односвязной области Ω плоское безвихревое соленоидальное поле $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2)$ обладает комплексным потенциалом $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, причем функция $f(z)$ является аналитической в этой области и справедливо равенство $\vec{a}=\overline{f'(z)}=\alpha_1+i\alpha_2$. Верно и обратное: любую функцию, аналитическую в области Ω, можно рассматривать как комплексный потенциал некоторого плоского векторного поля, заданного в этой области.

Физическая интерпретация вектора $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2)$ может быть различной. Если $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2)$ — вектор скорости частицы в установившемся плоскопараллельном течении идеальной несжимаемой жидкости, то источники и вихревые точки такого поля оказываются особыми точками функции $f(z)$. Они характеризуются тем, что $div\,\overline{a}\neq 0$ или $rot\,\overline{a}\neq 0$. При этом поток Q и циркуляция Γ этого векторного поля связаны с комплексным потенциалом соотношением $\int\limits_\gamma f'(z)dz=\Gamma+iQ=2\pi i c_{-1}$ (здесь γ — замкнутая кривая, содержащая внутри себя особую точку; c_{-1} — вычет в этой точке). Таким образом, мы имеем $\Gamma=\operatorname{Re}\int\limits_\gamma f'(z)dz$ и $Q=\operatorname{Im}\int\limits_\gamma f'(z)dz$. С помощью комплексного потенциала часто решаются задачи обтекания тел потоками жидкости или газа, ищется подъемная сила, исследуются критические точки течения.

В задачах электростатики и электродинамики [10] используют комплексный вектор напряженности $\vec{E}=E_1+iE_2$, т. е. силу, действующую на единичный заряд, помещенный в точку. Как известно, электростатическое поле всегда потенциально, при этом гармоническая функция $v(x,y)=\operatorname{Im}f(z)$, называемая потенциальной, такова, что $\vec{E}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}-i\dfrac{\partial v}{\partial y}$. Функция $u(x,y)=\operatorname{Re}f(z)$ называется силовой. Зная комплексный потенциал, можно изобразить силовые и эквипотенциальные линии поля, задаваемые, соответственно, уравнениями $u(x,y)=\text{const}$ и $v(x,y)=\text{const}$.

Если известно, что комплексный потенциал имеет вид

$$f(z)=\frac{Me^{i\alpha}}{2\pi(z-z_0)^n},$$

где n — натуральное число, M и α — действительные числа, а z и z_0 — комплексные числа, то в этом случае точка z_0 является единственной особой точкой поля (полюсом). Эту точку называют мультиполем порядка n. При $n=1$ точку называют диполем, а число M — моментом диполя.

Широкое применение в инженерных расчетах колебательных процессов находит метод комплексных амплитуд, суть которого заключается в замене тригонометрической функции $y(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ ее комплексным аналогом $Y(t)=\dot{A}e^{i\omega t}$, где величина $\dot{A}$ называется комплексной амплитудой. При этом реальная амплитуда равна модулю комплексной амплитуды $A=\left|\dot{A}\right|$, а реальная начальная фаза — аргументу комплексной амплитуды $\varphi=\arg\dot{A}$. Соответственно формула Эйлера имеет вид

$$y(t)=A\cos(\omega t+\varphi)=A\frac{e^{i\omega t+i\varphi}+e^{-i\omega t-i\varphi}}{2}=$$

$$=\frac{Ae^{i\varphi}}{2}e^{i\omega t}+\frac{Ae^{-i\varphi}}{2}e^{-i\omega t}=\frac{1}{2}\left(Y(t)+\overline{Y(t)}\right).$$

Применяя метод комплексных амплитуд, получают уравнения Максвелла, не содержащие зависимости от времени, решают многие задачи электротехники. В теории линейных цепей помимо амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик используют комплексный коэффициент передачи линейной цепи $K(i\omega)$, равный отношению комплексной амплитуды выходного сигнала к комплексной амплитуде входного сигнала.

Гармонические функции $u(x,y)=\operatorname{Re}f(z)$ являются решениями двумерного уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ в связи с чем их используют, например, для расчета температуры в плоском тепловом поле без источников тепла в случае установившихся режимов. Сопряженная к ней гармоническая функция $v(x,y)=\operatorname{Re}f(z)$ является функцией тока теплоты, а $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ — комплексным потенциалом, вектор $\vec{Q}=-k\operatorname{grad}u$ называется вектором потока теплоты, $\vec{Q}=-k\overline{f'(z)}$ (k— коэффициент внутренней теплопроводности).

3. Рекомендуемые виды контроля. Успешность освоения студентами ТФКП зависит как от контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса, так и от непрерывного контроля усвоения знаний студентами. Организация контроля может включать следующие мероприятия:

1) на каждом занятии — проверка домашнего задания;

2) в конце одного или нескольких занятий — тест, содержащий 3–4 тестовых задания по теме (не более 15 мин);

3) контроль выполнения типовых расчетов;

4) рубежный контроль по каждому модулю;

5) экзамен или зачет.

Примеры возможных тестовых заданий для проверки знания основных понятий, определений, теорем и методов ТФКП.

Задание 1. Мнимая часть комплексного числа $z = 2 - 3i$ равна:

1) 3; 2) 2; 3) –3; 4) $-3i$.

Задание 2. Модуль комплексного числа $z = 3 + 4i$ равен:

1) 7; 2) –7; 3) 5; 4) $\sqrt{7}$.

Задание 3. Два комплексных числа называют равными, если равны их:

1) модули и мнимые части;

2) действительные и мнимые части;

3) действительные части и аргументы;

4) аргументы и модули.

Задание 4. Для чисел $z_1 = 5 - 3i$ и $z_2 = 3 - 5i$:

1) $z_1 = \overline{z}_2$; 2) $z_1 = -z_2$; 3) $z_1 > z_2$; 4) $|z_1| = |z_2|$.

Задание 5. Действительной частью функции $3\left(\overline{z} + 1\right)$ является:

1) $x + 3$; 2) $3y + 3$; 3) $-3y + 1$; 4) $3x + 3$; 5) $y + 3$; 6) $-3y$.

Задание 6. Аналитическими функциями являются:

1) e^{2z}; 2) $3\overline{z}$; 3) $\sin z - i$; 4) $|z|$; 5) $\operatorname{Re}\left(z \cdot \overline{z}\right)$; 6) $1 + \cos z$; 7) $z \operatorname{sh} z$.

Задание 7. Интеграл $\int\limits_0^{1+i} z dz$ равен:

1) $1 + i$; 2) i; 3) $-1 + i$; 4) 0; 5) $2i$; 6) 1; 7) $\sqrt{2}$.

Задание 8. Точка $z = 0$ является устранимой особой точкой для функций:

1) $\dfrac{\sin z}{z}$; 2) $\dfrac{\cos z}{z}$; 3) $\dfrac{1}{z^2}$; 4) $\dfrac{e^z - 1}{z}$; 5) $\dfrac{e^z}{z^2\left(z - 1\right)}$; 6) $\dfrac{z^2}{\sin z}$; 7) $\dfrac{\sin z}{\sin^3 3z}$.

Задание 9. Вычет функции $f\left(z\right) = \dfrac{e^z}{z\left(z - 1\right)}$ в точке $z = 1$ равен:

1) 1; 2) i; 3) e; 4) $-e$; 5) $-i$; 6) –1; 7) 0.

Задание 10. Интеграл $\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{z^2-2}{z} dz$ равен:

1) –2; 2) $-2\pi i$; 3) 0; 4) $2\pi i$; 5) $4\pi i$; 6) 2; 7) $-4\pi i$.

4. Методические особенности восприятия курса ТФКП. Курс ТФКП является одним из самых сложных математических курсов. Это определяется следующими особенностями.

1. Связи курса ТФКП с физическими, техническими и другими дисциплинами в силу его широкой прикладной направленности обширны. В то же время в рамках учебного курса использование прикладной направленности ТФКП существенно ограничено как временем, так и отсутствием специальных знаний у большинства преподавателей математики. Это затрудняет понимание студентами органической связи между абстрактными математическими объектами и реальными физическими явлениями.

2. В отличие от поля действительных чисел, в котором четыре операции имеют понятные реальные интерпретации, действия в поле комплексных чисел могут быть в некоторой степени интерпретированы как действия с геометрическими двумерными векторами. Таким образом, один абстрактный объект объясняется посредством другого абстрактного объекта. Это, в свою очередь, не добавляет понимания, так как сами действия с векторами для части студентов остаются не понятыми до конца.

3. Курс ТФКП заставляет студентов по-новому воспринимать многие факты, относящиеся к давно изученным объектам. Так, синус и косинус оказываются неограниченными (а в рамках элементарной математики их область значений — отрезок от –1 до 1), экспонента становится периодической (в элементарной математике показательная функции монотонна), логарифм, показательная и степенная функции становятся многозначными (в элементарной математике — «функция — это закон, по которому одному числу ставится в соответствие другое, заданное единственным образом»). Но главное — сама мнимая единица («не существует корня четной степени из отрицательного числа!»).

Заключение. По содержанию курс ТФКП является продолжением математических дисциплин, в которых изучается поведение функций действительного переменного. В рамках ТФКП рассматриваются основы дифференциального и интегрального исчислений функций комплексного переменного, числовые, функциональные и степенные ряды на комплексной плоскости. Изучаются теория вычетов и ее приложения.

Знание ТФКП дадут возможность будущему специалисту на практике применять методы ТФКП, понимать и анализировать математические методы, основанные на свойствах аналитических функций. Поэтому для успешного обучения студентов необходимо учитывать методические особенности и специфику преподавания курса ТФКП, рассмотренные в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Стройк Д.Я. *Краткий очерк истории математики*. Москва, Наука, 1978, 336 с.

[2] Агаева Э.И., Ершова М.И., Зотина Р.С. *Теория функций комплексного переменного*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1992, 120 с.

[3] Копаев А.В., Садыков Г.С. *Теория функций комплексного переменного*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1992, 102 с.

[4] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. *Функции комплексного переменного. Задачи и примеры с подробными решениями*. Москва, Либроком, 2010, 208 с.

[5] Крупин В.Г., Павлов А.Л., Попов Л.Г. *Высшая математика. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление*. Москва, Издательский дом МЭИ, 2012, 303 с.

[6] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва, Наука, 1987, 688 с.

[7] Морозова В.Д. *Теория функций комплексного переменного*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000, 520 с.

[8] Плис А.И., Сливина Н.А. *MathCAD: математический практикум для экономистов и инженеров*. Москва, Финансы и статистика, 1999, 656 с.

[9] Алгазин О.Д., Богомолов В.Г., Копаев А.В. *Методы теории функций комплексного переменного в прикладных задачах*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993, 68 с.

[10] Никольский В.В., Никольская Т.И. *Электродинамика и распространение радиоволн*. Москва, Либроком, 2012, 544 с.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Богомолов В.Г. Методические особенности преподавания курса теории функций комплексного переменного. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 5. URL: http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/734.html

Богомолов Владимир Георгиевич родился в 1955 г., окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1979 г., канд. физ.-мат. наук, доц. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 научных работ в области прикладной математики и механики, учебных и методических пособий по математике для студентов и преподавателей. Сфера научных интересов: задачи гидроупругости, динамика оболочечных конструкций, методика преподавания высшей математики. e-mail: bogomovg@yandex.ru