УДК 621.391

В.В. Сюзев

ИМИТАЦИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ С ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, ИНВАРИАНТНЫМИ К ОБОБЩЕННОМУ СДВИГУ В СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ОСНОВАНИЕМ

Предложен метод имитации псевдослучайных сигналов с энергетическими характеристиками, инвариантными к обобщенному временному сдвигу в системах счисления с переменным основанием, использующий каноническое и спектральное представления случайных процессов в базисе обобщенных функций Крестенсона и приводящий к эффективным алгоритмам имитации различной вычислительной сложности.

E – mail: v.suzev @ bmstu.ru

Ключевые слова: *сигнал, спектр, базис Крестенсона, обобщенный сдвиг, автокорреляционная функция, спектр мощности, каноническое представление, алгоритм имитации.*

При решении задач обнаружения, распознавания, идентификации и фильтрации сигналов наряду с классическим определением временного сдвига в виде обычного алгебраического сложения находят применение и более сложные формы временного смещения, к числу которых относятся и сдвиги, реализуемые с помощью поразрядного модулярного сложения в системе счисления с произвольным основанием p [1, 2]. Сигналы, энергетические характеристики которых инвариантны к таким сдвигам, принадлежат к p-стационарным сигналам. Математическую основу их описания составляют базисные функции Виленкина – Крестенсона [2].

Можно значительно расширить множество стационарных сигналов и процессов с полезными для теории и практики обработки свойствами с помощью использования системы счисления с переменным основанием p_m, $m = 1, 2, ...,$ и базиса обобщенных функций Крестенсона (ОФК), получая при этом более общий класс $\{p_m\}$ стационарных сигналов, из которого в частном случае следуют и p-стационарные сигналы, и сигналы с классическим определением временного сдвига и свойства стационарности.

Теоретическое исследование таких сигналов и алгоритмов их обработки методом моделирования ставит задачу имитации псевдослучайных $\{p_m\}$-стационарных сигналов и процессов в рамках обобщенной корреляционной теории с исходными данными в виде их энергетического спектра (спектра мощности). В данной работе рассматривается решение этой задачи с использованием канонического и спектрального представлений случайных сигналов в базисе ОФК, приводящее к эффективным алгоритмам имитации различной вычислительной сложности.

Пусть на конечном временном интервале [0,T) задан детерминированный сигнал $x(t)$, имеющий на нем конечную мощность

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt.$$

Его можно представить в виде функции нормированного аргумента $z = t/T$, изменяющегося в диапазоне [0, 1). Если этот аргумент записать в позиционной системе счисления с переменным основанием p_m

$$z = \sum_{m=1}^{\infty} z_m (p_m p_{m+1} \ldots)^{-1}, \tag{1}$$

где все p_m являются в общем случае различными положительными целыми числами, а z_m определяют значения соответствующих разрядов позиционного кода $(z_m = 0, 1, \ldots, p_m - 1)$, то для сигнала $x(z)$ можно использовать обобщенный сдвиг на нормированную величину $u = \tau/T$ (τ – временной сдвиг), реализуемый с помощью поразрядного модулярного сложения $z \oplus u$ или вычитания $z \ominus u$, выполняемых по правилам:

$$(z \oplus u)_m = (z_m + u_m) \pmod{p_m};$$

$$(z \ominus u)_m = (z_m - u_m) \pmod{p_m}.$$

Сигналы с таким понятием временного сдвига адекватны системам обобщенных базисных функций Крестенсона *W(k,z)*, поскольку последние обладают свойством мультипликативности с базовой операцией в виде тех же обобщенных модулярных сложений и вычитаний [3]. Поэтому для них выполняются равенства

$$\begin{gathered} W(k,z)W(n,z) = W(k \oplus n, z);\ W(k,z)W^*(n,z) = W(k \ominus n, z); \\ W(k,z)W(k,u) = W(k, z \oplus u);\ W(k,z)W^*(k,u) = W(k, z \ominus u), \end{gathered} \tag{2}$$

справедливость которых следует из самой аналитической записи ОФК [3]:

$$W(k,z)=\exp(j2\pi\sum_{m=1}^{\infty}(k_m z_m / p_m)). \tag{3}$$

В выражениях (2) $W^*(k,z)$ – комплексно-сопряженная ОФК, а в выражении (3) $j=\sqrt{-1}$ и k_m – значение m-го разряда позиционного кода номера функции k в системе счисления с переменным основанием:

$$k=\sum_{m=1}^{\infty}k_m p_0 p_1 ... p_{m-1},\ \ p_0=1,\ k_m=0,1,...p_m-1. \tag{4}$$

ОФК образуют полный ортонормированный базис, который можно использовать для представления сигнала $x(z)$. Пара преобразований Фурье в нем имеет следующий вид:

$$x(z)=\sum_{k=0}^{\infty}X(k)W(k,z); \tag{5}$$

$$X(k)=\int_0^1 x(z)W^*(k,z)dz, \tag{6}$$

а равенство Парсеваля записывается в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}X(k)X^*(k)=\int_0^1 x^2(z)dz. \tag{7}$$

В выражении (7) $X^*(k)$ – величина, комплексно-сопряженная спектру $X(k)$ сигнала.

Функция

$$P_x(k)=X(k)X^*(k)=\left|X(k)\right|^2 \tag{8}$$

описывает спектр мощности сигнала $x(z)$ в базисе ОФК, а функция

$$S_x(k)=TX(k)X^*(k)=T\left|X(k)\right|^2 \tag{9}$$

– его энергетический спектр в том же базисе.

Если числа k и z представляются в виде кодов с конечным числом разрядов n, то ряд Фурье (5) имеет усеченный вид

$$x(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W(k,z),$$

а число слагаемых в левой сумме равенства Парсеваля будет равно N, причем:

$$N=\prod_{m=1}^{n}p_m. \qquad (10)$$

Энергетические характеристики $P_x(k)$ и $S_x(k)$ сигнала $x(z)$ в базисе ОФК инвариантны принятому закону сдвига. Действительно, пусть сигнал $x(z)$, сдвинутый на величину u, имеет спектр $X_u(k)$, причем

$$X_u(k)=\int_0^1 x(z\ominus u)W^*(k,z)dz.$$

Умножим этот сигнал на величину $W(k,u)W^*(k,u)$, равную 1, и учтем свойство мультипликативности (2) ОФК. Тогда

$$X_u(k)=\int_0^1 x(z\ominus u)W^*(k,z)W(k,u)W^*(k,u)dz=$$

$$=W^*(k,u)\int_0^1 x(z\ominus u)W^*(k,z\ominus u)dz=X(k)W^*(k,u),$$

Спектры мощности и энергии соответственно равны

$$X_u(k)X_u^*(k)=X(k)W^*(k,u)X^*(k)W(k,u)=X(k)X^*(k),$$

$$TX_u(k)X_u^*(k)=TX(k)X^*(k)$$

и совпадают со спектром мощности и энергетическим спектром несдвинутого сигнала. Таким образом, в базисе ОФК сигнал $x(z)$ является $\{p_m\}$-стационарным сигналом.

Для него можно записать обобщенную автокорреляционную функцию

$$R_x(u)=\int_0^1 x(z)x(z\oplus u)\,dz, \qquad (11)$$

которая будет обладать теми же основными свойствами, что и обычная автокорреляционная функция при классическом определении сдвига (ее начальное значение при $u = 0$ равно мощности сигнала, она всегда является четной функцией сдвига и периодические сигналы будут иметь также периодическую обобщенную автокорреляционную функцию с тем же периодом), но отличаться от нее по форме. Обобщенная автокорреляционная функция (11) сигнала связана с его спектром мощности. Для определения этой связи представим сдвинутый сигнал в формуле (11) в виде ряда Фурье (5). Тогда с учетом свойства (2) мультипликативности ОФК после преобразования получим

$$R_x(u) = \int_0^1 x(z)[\sum_{k=0}^{\infty} X(k)W(k,(z \oplus u)]dz =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} X(k)W(k,u)\int_0^1 x(z)W(k,z)dz = \tag{12}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} X(k)X^*(k)W(k,u) = \sum_{k=0}^{\infty} P_x(k)W(k,u).$$

Можно найти обратную связь $P_x(k)$ с $R_x(u)$. Для этого умножим уравнение (12) на $W^*(m,u)$ и проинтегрируем его в пределах от 0 до 1. В этом случае

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} P_x(k)W(k,u)W^*(m,u)\,du = \int_0^1 R_x(u)W^*(m,u)\,du$$

или после перестановки операций интегрирования и суммирования

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_x(k)\int_0^1 W(k,u)W^*(m,u)\,du = \int_0^1 R_x(u)W^*(m,u)du.$$

Однако в силу ортогональности ОФК

$$\int_0^1 W(k,u)W^*(m,u)\,du = \delta_{m,k},$$

где $\delta_{m,k}$ – символ Кронекера. Поэтому окончательно получаем

$$P_x(k) = \int_0^1 R_x(u) W^*(k,u)\,du. \qquad (13)$$

Уравнения (12) и (13) по сути представляют собой уравнения Винера – Хинчина, обобщенные на модулярный сдвиг с переменным основанием и базис ОФК. Если в них от относительной переменной u перейти к абсолютной τ, то обобщенные уравнения Винера – Хинчина можно записать в функции времени:

$$R_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k) W(k, \tau / T);$$

$$P_x(k) = \frac{1}{T} \int_0^T R_x(\tau) W^*(k, \tau / T)\, d\tau.$$

Можно получить еще одно важное для моделирования сигналов представление обобщенной автокорреляционной функции. Рассмотрим ее как функцию, определенную на интервале [0,1), и представим в виде ряда Фурье (5) по обобщенным функциям Крестенсона:

$$R_x(u) = \sum_{k=0}^{\infty} R(k) W(k,u),$$

где

$$R(k) = \int_0^1 R_x(u) W^*(k,u)\,du.$$

Поскольку интервал $u = \tau / T$ – нормированное временное расстояние между двумя моментами $z_1 = t_1 / T$ и $z_2 = t_2 / T$, задаваемое правилом обобщенного сдвига: $u = z_2 \ominus z_1$, то

$$R_x(z_2 \ominus z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} R(k) W(k, z_2 \ominus z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} R(k) W(k, z_2) W^*(k, z_1) \qquad (14)$$

и есть каноническое разложение $R_x(u)$ в базисе ОФК.

Этому разложению соответствует каноническое представление эргодического случайного процесса

$$y(z) = m_y + \sum_{k=1}^{\infty} Y(k) W(k,z), \qquad (15)$$

где m_y – его математическое ожидание, а коэффициенты $Y(k)$ являются комплексными некоррелированными случайными величинами с параметрами $(0,|\sigma_k|^2)$.

Каноническое представление (15) можно записать и в абсолютном временном виде

$$y(t)=m_y+\sum_{k=1}^{\infty}Y(k)W(k,t/T), \tag{16}$$

где m_y и $Y(k)$ имеют тот же смысл и те же параметры, что и в уравнении (15).

Если учесть, что математическое ожидание

$$m_y=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt=X(0), \tag{17}$$

а дисперсии

$$|\sigma_k|^2=\frac{1}{T}\int_0^T R_x(\tau)W(k,t/T)d\tau=|X(k)|^2,\ k=1,2,..., \tag{18}$$

то канонические представления (15) и (16) можно использовать в качестве алгоритма имитации псевдослучайного процесса $y(t)$ с энергетическими характеристиками для детерминированного сигнала $x(t)$. Выражения (17) и (18) при этом будут описывать подготовительную процедуру настройки алгоритма имитации на эти характеристики.

Для иллюстрации работоспособности алгоритма имитации (15) найдем автокорреляционную функцию процесса $y(z)$ в точках z_1 и z_2:

$$R_y(z_2,z_1)=M[y(z_2)y(z_1)]=M[\sum_{k=0}^{\infty}Y(k)W(k,z_2)\sum_{m=0}^{\infty}Y^*(m)W^*(m,z_1)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}W(k,z_2)\sum_{m=0}^{\infty}W^*(m,z_1)M[Y(k)Y^*(m)].$$

Здесь M означает операцию вычисления математического ожидания. Однако $M[Y(k)Y^*(m)]$ является корреляционной функцией коэффициентов $Y(k)$. Поскольку эти коэффициенты некоррелированы, то

$$M[Y(k)Y^*(m)] = |\sigma_k|^2 \delta_{k,m}$$

и поэтому

$$R_y(z_2, z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} |\sigma_k|^2 W^*(k, z_1) W(k, z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} |\sigma_k|^2 W(k, z_2 \ominus z_1).$$

Однако для $\{p_m\}$-стационарных процессов

$$R_y(z_2, z_1) = R_y(z_2 \ominus z_1) = R_y(u).$$

Следовательно

$$R_y(u) = \sum_{k=0}^{\infty} |\sigma_k|^2 W(k, u) = \sum_{k=0}^{\infty} |X(k)|^2 W(k, u) = R_x(u).$$

Таким образом, автокорреляционные функции имитируемого случайного процесса $y(u)$ и исходного детерминированного сигнала $x(u)$ совпадают.

Процессы (15) и (16) обладают следующими вероятностными характеристиками: их математическое ожидание

$$M[y(t)] = M[y(z)] = M[m_y] + \sum_{k=1}^{\infty} M[Y(k)] W(k, z) = m_y$$

и совпадает с заданной величиной $X(0)$, поскольку все $M[Y(k)] = 0$, а дисперсия

$$\sigma_y^2 = R_y(0) = \sum_{k=0}^{\infty} |\sigma_k|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |X(k)|^2$$

и связана со спектром мощности детерминированного сигнала. При имитации процессов с нулевым математическим ожиданием коэффициент $X(0)$ принимается равным нулю и тогда дисперсия

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |X(k)|^2.$$

При практическом использовании предложенного алгоритма имитации в виде бесконечных случайных рядов (15) и (16), последние должны быть заменены приближенными конечными рядами, число членов N в которых определяется из условий требуемой точности имитации с учетом формулы (10). Для воспроизведения каждой независимой случайной реализации в этом алгоритме необходимо сформировать с помощью датчика случайных чисел набор из N комплексных случайных коэффициентов $X(k)$ с параметрами $[0,|\sigma|^2]$ и вычислить $M = 1/\Delta z = T/\Delta t$ (Δz и Δt – интервалы дискретизации по времени) значений псевдослучайного сигнала по формуле (15) или (16). Основная вычислительная сложность алгоритма связана с последними вычислениями, которые включают в себя в общем случае выполнение по MN комплексных умножений и сложений и вычисление $2MN$ значений тригонометрических функций. Эти затраты можно существенно сократить, если использовать для реализации рядов (15) и (16) специальные быстрые алгоритмы [3].

Разработанные алгоритмы можно применять и для имитации дискретных псевдослучайных сигналов с заданными энергетическими характеристиками. В этом случае сигнал $y(i)$ будет представляться случайным дискретным рядом

$$y(i) = m_y + \sum_{k=1}^{N-1} Y(k)W(k,i),\ \ i = 0,1,...,N-1, \tag{19}$$

где дискретные ОФК имеют следующий вид:

$$W(k,i) = \exp(j2\pi \sum_{m=1}^{n} (k_m i_i / p_m)). \tag{20}$$

Здесь i_m – обозначение m-го разряда позиционного n-разрядного кода дискретного времени i в системе счисления с переменным основанием

$$i = \sum_{m=1}^{n} i_m p_0 p_1 ... p_{m-1},\ \ p_0 = 1,\ \ i_m = 0,1,...,\ p_m - 1.$$

Процедура настройки дискретного алгоритма имитации остается почти такой же, как в непрерывном его варианте и так же описывается выражениями (17) и (18). Отличие состоит только в том, что индекс k в них может не принимать всех значений от 0 до N–1, так как в дискретной системе ОФК часть базисных функций попарно комплексно-сопряжены и, следовательно, набор коэффициентов $\{Y(k)\}$ будет содержать комплексно-сопряженные составляющие, для которых дисперсии $|\sigma_k|^2$ совпадают.

Дискретный алгоритм имитации (19) значительно проще в реализации, поскольку при его воспроизведении можно использовать эффективные быстрые преобразования в базисе ОФК [3].

Таким образом, предложенные в работе алгоритмы имитации $\{p\}$-стационарных случайных процессов могут служить эффективным инструментом теоретического и экспериментального исследования алгоритмов обработки сигналов, использующих временной сдвиг в виде модулярного поразрядного сложения с различными модулями. Алгоритмы имитации носят обобщенный характер. При $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$ они переходят в алгоритмы имитации p-стационарных случайных процессов в базисе функций Виленкина – Крестенсона, а при $p = N$ и $n = 1$ являются известными алгоритмами имитации случайных процессов с задаваемым частотным энергетическим спектром в базисе комплексных экспоненциальных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трахтман А. М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. – М.: Сов. радио, 1972. – 352 с.
2. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. – М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.
3. Сюзев В. В. Цифровая обработка сигналов: Методы и алгоритмы: В 3 ч. Ч. 2. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 404 с.

Статья поступила в редакцию 14.05.2012