

Неустойчивость Кельвина — Гельмгольца в сдвиговых течениях жидкости и плазмы

© А.Ю. Чирков, В.И. Хвесюк

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва 105005, Россия

Общим свойством сдвиговых течений идеальной жидкости и плазмы, находящейся во внешнем магнитном поле, является развитие неустойчивости Кельвина — Гельмгольца. Волновое уравнение для собственных мод в плазме в гидродинамическом пределе совпадает с уравнением Рэлея для идеальной жидкости. Проанализированы нечетные и четные моды неустойчивости. Обсуждена возможность оценки коэффициентов турбулентного обмена по параметрам неустойчивости.

Ключевые слова: неустойчивость Кельвина — Гельмгольца, уравнение Рэлея.

Введение. Неустойчивость Кельвина — Гельмгольца является общим свойством сдвиговых течений жидкости и замагниченной плазмы. В приближении идеальной жидкости эта неустойчивость описывается уравнением Рэлея [1, 2]. В случае бесстолкновительной плазмы вопрос о развитии неустойчивости Кельвина — Гельмгольца связан с физикой так называемых транспортных барьеров [3, 4], которые создаются при генерации неоднородного течения плазмы поперек силовых линий магнитного поля. В транспортных барьерах с ростом градиента скорости снижается уровень турбулентного транспорта, вызванного градиентными дрейфовыми неустойчивостями. В то же время неоднородность скорости возбуждает неустойчивость Кельвина — Гельмгольца, ограничивающую эффективность данного метода.

В идеальной несжимаемой жидкости исходная система уравнений включает уравнения неразрывности и Эйлера. Рассмотрим поток, движущийся вдоль направления оси y с невозмущенной скоростью $V(x)$, зависящей только от x . В случае плазмы $V(x)$ — это скорость дрейфа в невозмущенных скрещенных электрическом и магнитном полях (скорость $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфа).

Возмущения скорости v_x и v_y задаются функцией тока $\psi(x, y)$: $v_x = \partial\psi / \partial y$, $v_y = -\partial\psi / \partial x$. Функция тока представляется в следующем виде:

$$\psi(x, y) = \varphi(x) \exp(-i\omega t +iky),$$

где $\varphi(x)$ — функция, описывающая изменение формы возмущения в направлении поперек потока; ω — комплексная частота; k — волновое число.

В результате линеаризации исходная система гидродинамических уравнений сводится к уравнению Рэля

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(-k^2 + \frac{d^2V/dx^2}{\omega/k - V} \right) \varphi = 0. \quad (1)$$

Это уравнение с соответствующими граничными условиями составляет задачу о собственных функциях $\varphi(x)$ и собственных значениях ω , в которой параметром является волновое число k моды. Компоненты возмущенной скорости связаны с функцией $\varphi(x)$ соотношениями: $v_x = ik\varphi(x)\exp(-i\omega t +iky)$; $v_y = -(d\varphi/dx)\exp(-i\omega t +iky)$.

Уравнение (1) для плазмы соответствует длинноволновому низкочастотному пределу: $k\rho_{ti} < 1$; $|\omega| \ll \omega_{ci}$, где ρ_{ti} — циклотронный радиус ионов, вычисляемый по ионной тепловой скорости; ω_{ci} — циклотронная частота ионов.

Нечетные моды. Рассмотрим непрерывный профиль невозмущенной скорости $V(x)$ с изменением в слое шириной $2L$ (рис. 1). Пер-

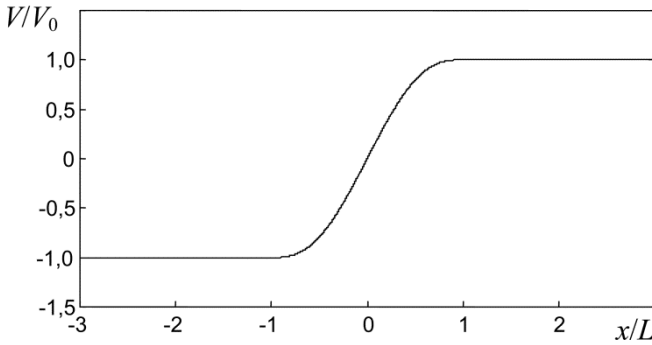


Рис. 1. Распределение скорости в системе со встречными потоками с переходным слоем шириной $2L$

вая и вторая производные $V(x)$ также непрерывны при любых x . Начало отсчета координаты x выберем так, как показано на рис. 1, что соответствует двум встречным потокам с одинаковыми скоростями V_0 . Аналитическое выражение для данного распределения скорости имеет следующий вид:

$$\frac{V(x)}{V_0} = \begin{cases} -1, & \frac{x}{L} < -1; \\ \frac{15}{8} \frac{x}{L} - \frac{5}{4} \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{3}{8} \left(\frac{x}{L} \right)^5, & -1 \leq \frac{x}{L} \leq 1; \\ 1, & \frac{x}{L} > 1. \end{cases} \quad (2)$$

Для нечетных мод $\varphi(x)$ — нечетная функция. Используем условия нечетности в виде $\varphi = 0$ и $d\varphi/dx = 1$ при $x = 0$. Проанализируем решения для нескольких вариантов граничных условий, перечисленных ниже.

Граничные условия первого рода: $\varphi = 0$ ($v_x = 0$) при $x = \pm H$, где H — половина ширины локализации моды. В частности, для жидкости это условие можно рассматривать как наличие стенок, причем требовать на стенке $d\varphi/dx = 0$ ($v_y = 0$) не обязательно.

Граничные условия второго рода: $d\varphi/dx = 0$ ($v_y = 0$) при $x = \pm H$. Эти граничные условия не могут быть наложены при наличии твердых стенок, так как поперечная скорость на стенке должна быть нулевой, и колебания должны иметь возможность существовать в области $|x| > H$.

Граничные условия смешанного типа: $\varphi = 0$ ($v_x = 0$) и $d\varphi/dx = 0$ ($v_y = 0$) при $x = \pm H$. Такие граничные условия являются избыточными. В общем случае они вряд ли могут выполняться. Однако их нетрудно выполнить при $H \rightarrow \infty$. Поэтому соответствующие моды могут развиваться в неограниченном по x потоке.

Для представления результатов расчетов в безразмерном виде выбраны следующие масштабы величин: скорости V_0 , длины L , частоты и инкремента $\omega_0 = V_0/L$. Принимая во внимание симметрию задачи, нетрудно видеть, что в выбранной системе отсчета фазовая скорость волны равна нулю, и, следовательно, $\text{Re}(\omega) = 0$. Таким образом, собственные числа задачи являются чисто мнимыми: $\omega = i\gamma$, где $\gamma = \text{Im}(\omega)$ — инкремент моды. Кроме того, в рассматриваемом случае собственные функции нечетные.

Для численного решения был использован алгоритм «стрельбы» на основе метода Рунге — Кутты. В результате расчетов были определены собственные числа, собственные функции и границы устойчивости.

Для неустойчивости с неограниченными модами на рис. 2 представлена зависимость безразмерного инкремента γ/ω_0 от безразмерного волнового числа kL . При $kL < 0,1$ она является почти линейной ($\gamma/\omega_0 \approx 0,5kL$). Инкремент достигает максимального значения $\gamma \approx \approx 0,1\omega_0$ при $kL \approx 0,25$, а область неустойчивости ограничена максимальным волновым числом $kL \approx 0,4$.

Пример собственной функции $\varphi(x)$ дан на рис. 3, где также приведена ее производная $d\varphi/dx$. На рис. 4 показана вихревая структура течения в области точки перегиба, формирующаяся при развитии одной моды неустойчивости. Функция тока $\psi_\Sigma(x, y)$ на рис. 4 включает функцию тока, которая соответствует невозмущенному течению, заданному профилем скорости (2), и возмущенную функцию тока $\psi(x, y)$.

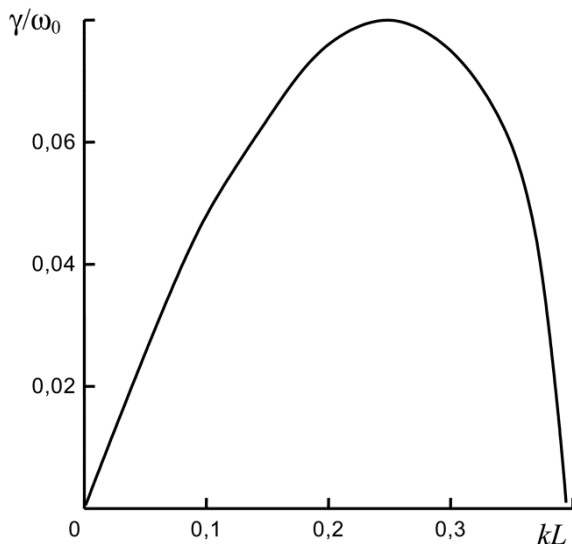


Рис. 2. Изменение безразмерного инкремента γ/ω_0 мод в неограниченном потоке в зависимости от безразмерного волнового числа kL

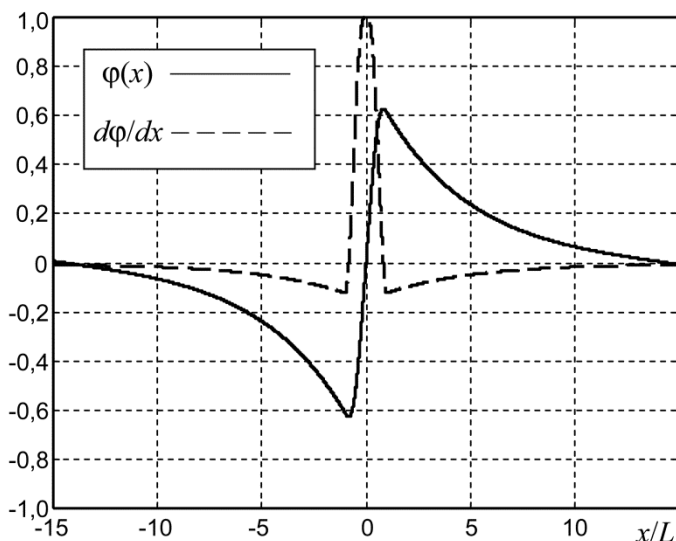


Рис. 3. Собственная функция $\varphi(x)$ и ее производная $d\varphi/dx$ моды с $kL = 0,2$ при $\gamma = 0,076\omega_0$

Результаты расчетов граничных кривых приведены на рис. 5. Область неустойчивости ($\gamma > 0$) для мод, полученных с граничными условиями первого рода, находится над кривой I .

В случае граничных условий первого и второго рода характерное значение максимального инкремента, как показали расчеты, имеет тот же порядок, что и для мод в неограниченном потоке. Качественная картина решений в пределах области переходного слоя также ана-

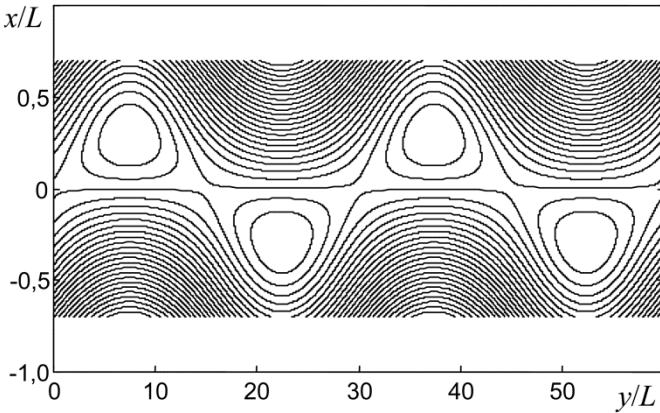


Рис. 4. Вихри в области точки перегиба ($x = 0$) — линии уровня суммарной функции тока $\psi_{\Sigma}(x, y)$ моды с $kL = 0,2$ и $\gamma/\omega_0 = 0,076$. Для наглядности максимальная амплитуда возмущенной скорости принята $0,5V_0$

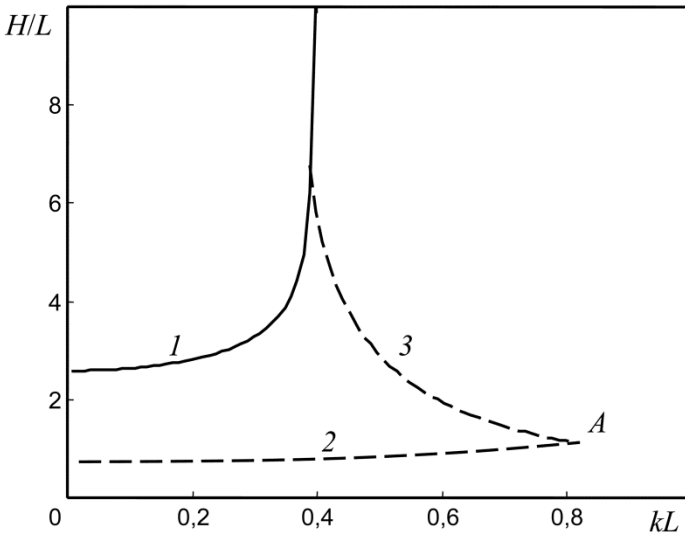


Рис. 5. Границы областей устойчивости мод, соответствующих граничным условиям первого (1) и второго (2, 3) родов, в потоке ограниченной ширины H в зависимости от безразмерного волнового числа kL

логична случаю неограниченного потока. Для рассматриваемых мод можно установить границу устойчивости, т. е. такую ширину моды H , при которой $\gamma \rightarrow 0$. Отметим, что в данном численном алгоритме невозможно использовать строгое равенство $\gamma = 0$, поэтому граничные кривые находят в результате приближения инкремента к нулю с заданной точностью.

При рассмотрении граничных условий второго рода могут быть найдены два нуля производной $d\varphi/dx$ (кривые 2 и 3 на рис. 5). Положение первого нуля производной (кривая 2) практически не изменя-

ется при увеличении инкремента, так как оно, по-видимому, определяется структурой потока внутри переходного слоя. Область неустойчивости мод, соответствующих второму нулю производной, находится над кривой 3 левее точки А.

Четные моды. Для анализа четных мод рассмотрим распределение скорости потока, схематично показанное на рис. 6. Для решения волнового уравнения (1) был использован ВКБ-метод. При этом для каждого значения волнового числа k может быть определен набор собственных частот ω_l ($l = 0, 1, 2, \dots$ — номер моды) и соответствующих собственных функций.

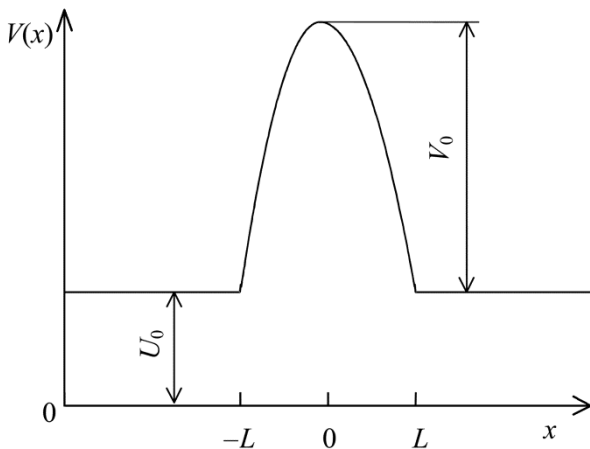


Рис. 6. Четное распределение скорости течения

Результаты расчетов действительной частоты с учетом доплеровского сдвига $\omega_R = \text{Re}(\omega - kU_0 - kV_0)$ и инкремента $\gamma = \text{Im}(\omega)$ приведены на рис. 7. В качестве масштаба частоты и инкремента, как и ранее, принята величина $\omega_0 = V_0 / L$.

На рис. 8 показаны радиальные профили мод, а на рис. 9 приведен пример функции Q для действительных значений x . Согласно результатам расчетов, при $kL \gg 1$ точки поворота располагаются в глубине слоя с неоднородностью толщиной $2L$ достаточно далеко от его границ. По мере уменьшения параметра kL точки поворота приближаются к границам слоя, и существует такое значение $(kL)_{\min} \approx 1$, при котором точки поворота находятся на границе слоя, а при $kL < (kL)_{\min}$ неустойчивость отсутствует. Для рассматриваемого распределения скорости дрейфа $V(x)$ инкремент максимален при $kL = (kL)_{\min}$, максимальное значение инкремента $\gamma_{\max} \approx \omega_0$.

Представленные на рис. 7 результаты соответствуют случаю, когда середина радиального профиля моды совпадает с центром слоя ($x = 0$). Для мод, середины профилей которых смещены от точки $x = 0$ на величину x_0 , значение $(kL)_{\min}$ увеличивается, а γ_{\max} уменьшается.

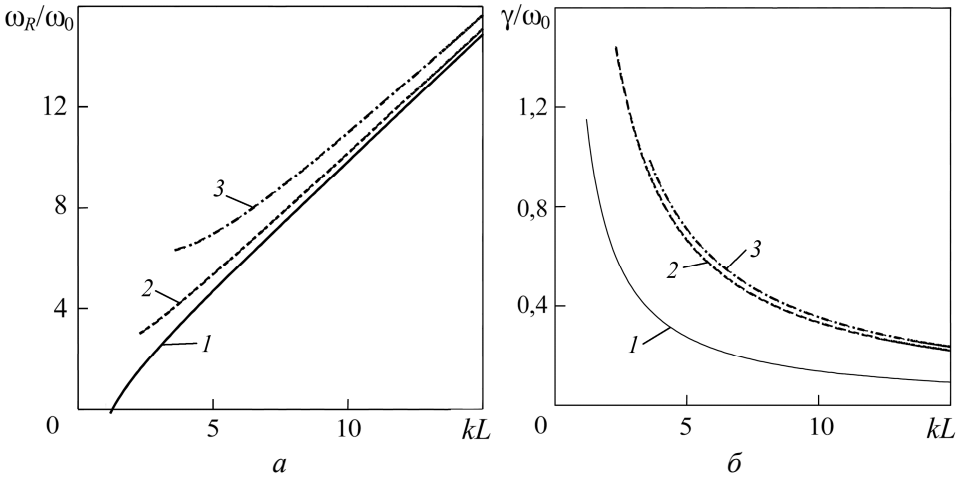


Рис. 7. Действительная частота (а) и инкремент (б) мод $l = 0$ (1), $l = 1$ (2) и $l = 2$ (3)

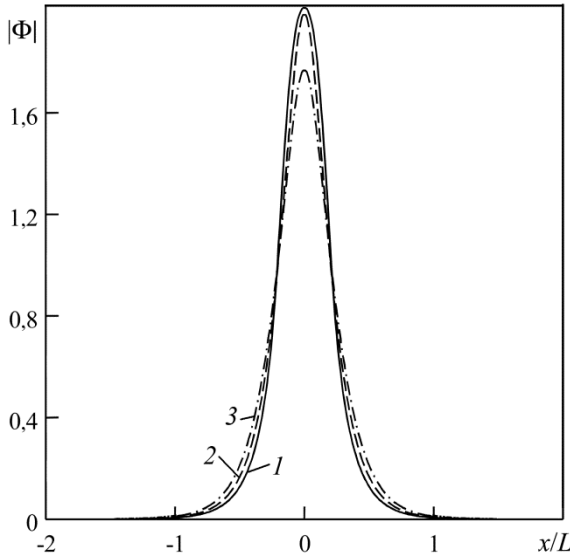


Рис. 8. Радиальные профили мод $l = 0$ (1), $l = 1$ (2) и $l = 2$ (3) при $kL = 6$

Коэффициенты турбулентного обмена. Для оценки воспользуемся теорией длины смешения. Будем предполагать, что турбулентные коэффициент диффузии, вязкость и температуропроводность одного порядка, т. е. $D \approx \nu \approx a$. В случае плазмы речь идет о коэффициентах переноса поперек силовых линий магнитного поля. Для мод с локализованными радиальными профилями турбулентный коэффициент диффузии $D \approx \delta_{\perp}^2 \gamma$, где δ_{\perp} — поперечная ширина моды (в данном случае в направлении x); γ — характерное значение инкремента неустойчивости. Для реализации диффузионного режима, по-видимому, необходимо наличие большого количества перекры-

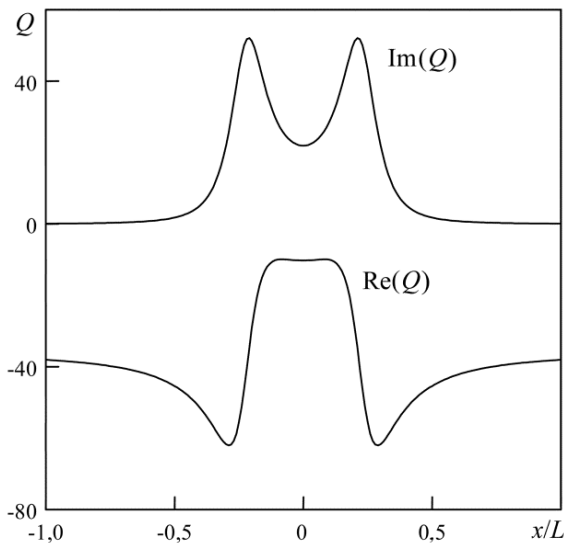


Рис. 9. Действительная и мнимая части функции Q для моды $l = 0$ при $kL = 6$

вающихся мод, распределенных по радиусу в пределах сдвигового слоя. Поэтому при оценке коэффициента диффузии логично ориентироваться на моды с $\delta_{\perp} \approx 0,1L$. Для таких мод $kL \approx 10$, $\gamma \approx 0,1\omega_0$, что приводит к оценке коэффициента диффузии $D \approx 10^{-3}V_0L$. Полагая $D \approx \nu \approx a$, можно получить оценку турбулентного числа Рейнольдса $Re_T \approx V_0L/\nu \approx 10^3$.

Заключение. В гидродинамическом пределе кинетической неустойчивости Кельвина — Гельмгольца для плазмы волновое уравнение совпадает с уравнением Рэлея, описывающим течение идеальной жидкости. Для жидкости результат анализа устойчивости на основе уравнения Рэлея не всегда имеет физический смысл, так как в ряде случаев, в частности вблизи стенок, пренебрежение молекулярной вязкостью некорректно [1]. В случае плазмы подход на основе уравнения Рэлея применим для бесстолкновительных режимов. Кроме того, плазма в магнитном поле изолирована от прямого контакта со стенками, а профиль скорости бесконтактно формируется электромагнитными полями.

Характерный инкремент рассмотренной неустойчивости $\gamma \approx 0,1V_0/L \approx 0,1dV/dx$. Инкремент такого же порядка характерен и для случая неустойчивости сжимаемой вязкой жидкости [5]. Качественная картина неустойчивости сохраняется и в случае сжимаемой плазмы в магнитном поле в приближении идеальной магнитной гидродинамики [6]. Вариации плотности, связанные с неустойчивостью Кельвина — Гельмгольца, могут приводить к развитию вторичных неустойчивостей гидродинамического типа [7], поэтому генерация

сдвиговых течений с очень большими значениями параметра сдвига $\gamma_s = dV/dx$ нежелательна с точки зрения развития как неустойчивости типа Кельвина — Гельмгольца, так и вторичных неустойчивостей. Эти неустойчивости приводят к усилению перемешивания, что резко повышает интенсивность транспорта.

В плазме генерация сдвиговых течений — основной способ снижения турбулентного транспорта. Максимально допустимое значение параметра сдвига γ_s можно найти из условия равенства инкрементов градиентной дрейфовой неустойчивости γ_G и неустойчивости Кельвина — Гельмгольца $\gamma \approx 0,1\gamma_s$. Сравнение инкрементов приводит к соотношению $\gamma_s / \gamma_G \sim 10$. В этом случае коэффициенты турбулентного обмена, связанного с градиентной дрейфовой неустойчивостью, могут быть снижены примерно на два порядка, так как фактор снижения равен $1 + (\gamma_s / \gamma_G)^2$ [8].

Полученные результаты принципиально важны для развития магнитных систем удержания плазмы высокого давления, поскольку им присуще диамагнитное вращение плазменного шнура со значительным сдвигом. Кроме того, недавние расчеты [9–11] показали, что градиентные дрейфовые неустойчивости в этих системах могут развиваться в широком диапазоне значений давлений и других параметров. К таким системам относится, например, обращенная магнитная конфигурация, для которой была разработана теория градиентных дрейфовых неустойчивостей [12, 13] и вызываемого ими транспорта [14–16].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 11-08-00700-а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Линь Цзяцзяо. *Теория гидродинамической устойчивости*. Москва, Изд-во иностранной литературы, 1958.
- [2] Тимофеев А.В. Колебания неоднородных течений плазмы и жидкости. *УФН*, 1970, т. 102, вып. 2, с. 185–210.
- [3] Wolf R.C. Internal Transport Barriers in Tokamak Plasmas. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 2003, vol. 45, pp. R1–R91.
- [4] Connor J.W., Fukuda T., Garbet X., et al. A Review of Internal Transport Barrier Physics for Steady-State Operation of Tokamaks. *Nucl. Fusion*, 2004, vol. 44, pp. R1–R49.
- [5] Sandham N.D., Reynolds W.C. Three-Dimensional Simulations of Large Eddies in the Compressible Mixing Layer. *J. Fluid. Mech*, 1991, vol. 224, pp. 133–158.
- [6] Miura A. Compressible Magnetohydrodynamic Kelvin — Helmholtz Instability with Vortex Pairing in the Two-Dimensional Transverse Configuration. *Phys. Plasmas*, 1997, vol. 4, pp. 2871–2885.
- [7] Tenerani A., et al. Nonlinear Vortex Dynamics in an Inhomogeneous Magnetized Plasma with a Sheared Velocity Field. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 2011, vol. 53. 015003, 13 p.

- [8] Чирков А.Ю. Нелинейные дрейфовые волны в сдвиговых течениях плазмы. *Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки*, 2008, № 3, с. 3–16.
- [9] Chirkov A.Yu., Khvesyuk V.I. Effect of Finite Length of Plasma Column on Electromagnetic Drift Instabilities. *Fusion Science and Technology*, 2009, vol. 55, no. 2T, pp. 162–167.
- [10] Khvesyuk V.I., Chirkov A.Yu. Peculiarities of Collisionless Brift Instabilities in Poloidal Magnetic Configurations. *Plasma Physics Reports*, 2010, vol. 36, no. 13, pp. 1112–1119.
- [11] Чирков А.Ю., Хвесьюк В.И. Особенности бесстолкновительных градиентных дрейфовых неустойчивостей в плазме с сильно неоднородным магнитным полем и высокими β . *Физика плазмы*, 2011, т. 37, № 5, с. 473–483.
- [12] Хвесьюк В.И., Чирков А.Ю. О неустойчивостях в поверхностном слое плазмы обращенной магнитной конфигурации. *Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки*, 2009, № 1, с. 21–30.
- [13] Chirkov A.Yu., Khvesyuk V.I. Electromagnetic Drift Instabilities in High- β Plasma under Conditions of a Field Reversed Configuration. *Physics of Plasmas*, 2010, vol. 17, no. 1. 012105, 8 p.
- [14] Чирков А.Ю. О перспективах малорадиоактивного термоядерного реактора на основе обращенной магнитной конфигурации. *Прикладная физика*, 2007, № 1, с. 94–98.
- [15] Чирков А.Ю. О скейлингах для времени удержания плазмы в обращенной магнитной конфигурации. *Прикладная физика*, 2007, № 2, с. 31–36.
- [16] Чирков А.Ю., Бендерский Л.А., Бердов Р.Д., Большакова А.Д. Модель транспорта в квазиравновесных обращенных магнитных конфигурациях. *Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки*, 2011, № 4, с. 15–27.

Статья поступила в редакцию 21.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Чирков А.Ю., Хвесьюк В.И. Неустойчивость Кельвина — Гельмгольца в сдвиговых течениях жидкости и плазмы. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 5. URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/criogen/728.html>

Чирков Алексей Юрьевич родился в 1976 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2000 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Теплофизика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 публикаций в области физики плазмы. e-mail: alexxeich@mail.ru

Владимир Иванович Хвесьюк родился в 1940 г., окончил МАИ им. С. Орджоникидзе в 1963 г. и МГУ им. М.В. Ломоносова в 1968 г. Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Теплофизика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 публикаций, в том числе трех монографий, в области физики и технических приложений низкотемпературной и высокотемпературной плазмы. e-mail: khves@power.bmstu.ru