УДК 536.24; 532.5.013.4

Решение внутренней задачи о возникновении естественной конвекции жидкости

© А.М. Пылаев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Учтены потребности расчета теплового режима приборных отсеков космических аппаратов в условиях слабой гравитации. Представлены результаты анализа конвективного движения вязкой теплопроводной жидкости или газа, возникающего в полостях с осями симметрии, нормальными к ускорению массовых сил (и оси y) или коллинеарными ему, а именно в полостях с эллиптическими сечениями — горизонтально-цилиндрических или в виде тел вращения соответственно. Использована программа для ПК с реализацией модификаций метода Бубнова — Галёркина. Выявлено хорошее согласование результатов расчета с известными данными.

Ключевые слова: *ряды Фурье, бесконечные алгебраические системы, Буссинеск, Рэлей, линейные пространственные возмущения, изолинии.*

Информация о критических движениях в замкнутых полостях необходима, в частности, при проведении расчетов теплового режима приборных отсеков космических аппаратов в условиях слабой гравитации. При этом требования специалистов часто противоречивы. Если для роста кристаллов и исследования физических свойств материалов необходимо предельное ослабление конвекции, то для ряда технических систем, например баков длительного хранения низкотемпературных компонентов топлива, желательно перемешивание [1].

Существенно также следующее: возникающие критические движения представляют естественный полный базис для разложения любого конвективного движения в полости [2]. Это обстоятельство может быть полезно при итерационном аналитическом решении нелинейных задач.

Интересующая проблема — специфический частный случай явления конвективной устойчивости [3]. Известно, что применение численного метода установления стационарного режима затруднительно (время установления по мере приближения к порогу устойчивости увеличивается). К тому же этот подход требует повышенного внимания к получаемым результатам. Есть публикации, в которых в роли $Ra_{кр\ min}$ — минимумов критических чисел Рэлея $Ra_{кр}$ — приводятся значения $Ra_{кр}$, соответствующие второй моде движений;

первая же мода была не замечена и пропущена авторами, по-видимому, вследствие малой интенсивности конвективного теплообмена. Поэтому повышен интерес к аналитическим возможностям, более удобным как в получении требуемой информации, так и в ее обработке.

Разработаны методика и программа решения задачи о нарушении равновесия в полостях с несложным математическим описанием границы и с осями симметрии, нормальными к ускорению массовых сил (и оси y) или коллинеарными ему. При решении применена линейная теория устойчивости к уравнениям конвекции в приближении Буссинеска [3] с подстановкой значений $\{\underline{W}, T_0 + T_1, p_0 + p_1\}$ для скорости (м/с), температуры (К) и давления (Па) и с приведением к безразмерному виду. Для расстояния, температуры, скорости, времени и давления выбраны масштабы $\underline{X}$, $\theta_0\underline{X}$, $a/\underline{X}$, $\underline{X}^2/(\nu a)^{0,5}$, $\nu\rho_0 a/\underline{X}^2$ последовательно. Здесь и далее принято: $\underline{X}$ — габаритный размер (вдоль горизонтальной оси, м); θ — равновесный градиент температуры, К/м; a — температуропроводность, м^2/с; ν —кинематическая вязкость, (м^2/с; ρ — плотность, кг/м^3; α — коэффициент теплоотдачи, Вт/(м^2·К); λ — теплопроводность, Вт/(м·К); индексы «0» или «1» соответствуют равновесным значениям и возмущениям. Предусмотрены случаи периодической модуляции последних или ускорения поля массовых сил g, м /с^2:

$$g = g_0(1 + \chi \sin \Omega t); \;\; \theta = \theta_0(1 + \Gamma \sin \Omega t), \qquad (1)$$

где χ, Ω и Γ — безразмерный параметр модуляции, относительная амплитуда и безразмерная частота.

Для анализа трехмерных течений из уравнений исключены возмущение давления p_1 и горизонтальные компоненты скорости $\underline{W}_x$ и $\underline{W}_z$ применением к векторному уравнению движения операции rot rot и проецирования на ось y [3]. Для вертикальной компоненты $\underline{W}_y$ и возмущения температуры T_1 использована подстановка:

$$T_1/\vartheta = \underline{W}_y/w = \cos \underline{n}\varphi, \quad w = w(y, x, t), \quad \vartheta = \vartheta\,(y, x, t), \qquad (2)$$

где $\underline{n}$ = 0, 1, 2 — волновое число. В итоге получены два уравнения (в частных производных до 4-го порядка) для амплитуд $\{F\} = \{w, \vartheta\}$:

$$\Delta\Delta w + \mathrm{Ra}\cdot\Delta_1\vartheta(1 + \chi\sin \Omega t) = \frac{\partial(\Delta w)}{\partial t}\mathrm{Pr}^{-0,5}; \qquad (3)$$

$$\Delta\vartheta + (1 + \Gamma \sin \Omega t)w = \frac{\partial\vartheta}{\partial t}\mathrm{Pr}^{0,5}; \; \Delta_1\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - n^2\varphi; \; \Delta\varphi = \Delta_1\varphi + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}. \qquad (4)$$

Здесь Pr — число Прандтля; в (2) и (4) φ — общее обозначение величин или их комплексов. В частности, в (2): $\varphi = z$ или $\varphi = \underline{\Phi}$ в случаях горизонтально-цилиндрических или эллипсоидных полостей; для последних уравнения (3) и (4) использовались в цилиндрических координатах с полярным углом $\underline{\Phi}$ в плоскости, нормальной к оси y. При постоянных g и θ правые части в (3) и слева в (4) принимались равными нулю. Результаты для полостей с плоскими границами представлены в работе [4]. В данной же работе рассматривались области решения внутри поверхностей

$$(x/X-\underline{E})^2+(y/Y-1)^2=1;\quad x\in[0;X(1+\underline{E})].$$

Здесь Y и $X=\underline{X}/2$ — вертикальная и горизонтальная полуоси; $\underline{E}=1$ или $\underline{E}=0$ для цилиндров или эллипсоидов соответственно. При этом использованы следующие условия:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\quad \varphi\in\{w,\vartheta\}\quad \text{или}\quad \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial n}\right)^{\gamma-1}\vartheta^{2-\gamma}=w=\frac{\partial w}{\partial n}=0 \tag{5}$$

на осях вращения эллипсоидов ($x=0$) или на всех внешних границах полостей. В (5) γ — род условий для температуры ($\gamma\in\{1;2\}$); n — геометрическая нормаль к граничной поверхности (соответствующее условие получено с использованием уравнения неразрывности).

Основная цель анализа — отыскание действительных значений $\mathrm{Ra}>0$ (собственных чисел), обеспечивающих нетривиальное решение $\{w,\vartheta\}$ для системы (3)-(5). С их существованием и связывают неустойчивость равновесия жидкости. Собственные функции $\{w,\vartheta\}$ целесообразно искать в виде линейных суперпозиций S базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям. При удачном выборе базиса хорошие результаты получаются уже при сравнительно небольшом числе S, но в общем случае с конечным S применение метода приводит лишь к принципиально приближенному решению. Здесь использованы разложения типа

$$\begin{aligned}
&w=\sum_{m=0}^{M}\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{N}(A_\psi\eta_m+C_\psi\zeta_m)\omega f_4\Pi_w,\quad \psi=mln,\quad (M,L,N\to\infty);\\
&\vartheta=\sum_{m=0}^{M}\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{N}(B_\psi\eta_m+D_\psi\zeta_m)\omega f_2\Pi_\vartheta;\\
&\omega=\sin\pi nx/X\sin\pi ly;\quad f_\varphi=1/(l^\varphi+n^\varphi);\\
&\eta_m=\cos m\Omega t;\quad \zeta_m=\sin m\Omega t.
\end{aligned}\tag{6}$$

Функциональные коэффициенты Π_w, Π_ϑ, используемые для выполнения граничных условий, зависят от координат и в общем случае от $\{l,n\}$.

Подстановка (6) в уравнения (3) и (4), дифференцирование и переразложение выражений в левых частях уравнений приводили к рядам использованного типа, но с гораздо более сложной структурой коэффициентов. Наконец, после приравнивания таких коэффициентов их значениям в правых частях (нулевым) относительно $\{A_\psi, C_\psi\}$, $\{B_\psi, D_\psi\}$ получались бесконечные системы уравнений, для которых была доказана возможность редукции [5]. Таким образом, решение поставленной задачи было сведено к анализу определителей Θ(Ra) конечного, хотя и достаточно большого, порядка. Значения таких определителей, в силу нетривиальности решения обращаемых в нуль при искомых Ra, вычислялись с привлечением внешней памяти ПК — с последовательным исключением групп переменных, с применением обращения матриц; Θ(Ra) — сложная функция, часто с большим диапазоном абсолютных значений в пределах даже весьма узкого интервала изменения ее знака. Функции w и ϑ также чувствительны к изменению Ra, но в меньшей степени.

Основные результаты расчетов (при $\Omega = 0$ в (1)) представлены в табл. 1-4 и на рис. 1, 2. Масштаб расстояния $\underline{X}$ в выражениях $\{\mathrm{Ra}_{\text{кр}}\}$ — всегда максимальный размер по горизонтали. При этом множества значений $\{v\} = \{1\ldots6\}$ $\{u\} = \{1\ldots u_{\max}\}$ применены для нумерации либо строк и столбцов в таблицах, либо кривых и точек на рисунках. С целью компактности пояснений для $\{\mathrm{Ra}_{\text{кр}}\}$ используются обозначения с четырьмя аргументами — индексами типа $\mathrm{Ra}_{\underline{n}rp\gamma}$ или $\mathrm{Ra}_{srp\gamma}$. Индекс p — характеристика полости, убывающая с ростом Y/X в случаях с однотипной геометрией; здесь значения $p = 1\ldots3$ последовательно соответствуют величинам $Y/X \in \{2;\ 1;\ 0{,}5\}$ как для цилиндров (см. рис. 1), так и для эллипсоидов (см. рис. 2). Индекс $\gamma \in$ $\in \{1;\ 2\}$ отмечает род граничных условий для T; $r \in \{1\ldots r_{\max}\}$ — порядковый (по возрастанию) номер $\mathrm{Ra}_{\text{кр}}$ при выбранных p и γ; надежнее и практически более интересны значения $\mathrm{Ra}_{\text{кр}}$ при $r \leq 2\ldots3$. Расчеты проводились при $\underline{n} \in \{0;\ 1;\ 2\}$ (см. формулу (2)), поэтому любому конкретному набору $\{p, r, \gamma\}$ соответствуют три значения $\{\mathrm{Ra}_{\text{кр}}\}$. Индексы $s \in \{1;\ 2;\ 3\}$ без черты снизу в отличие от значений $\{\underline{n}\}$ в записанном порядке относятся к меньшему, промежуточному и большему из этих значений. В последнем случае используется обозначение типа $\underline{n}_{srp\gamma}$ для волнового числа, при котором получено конкретное значение $\mathrm{Ra}_{srp\gamma}$. Цифры или буквы в индексах могут разделяться запятыми.

В табл. 1 даны значения $\{\mathrm{Ra}_{\underline{n}r2\gamma}\}$, т. е. для круглоцилиндрических полостей. При этом

$$0 \leq \underline{n} = v - 1 \leq 2,\ \ \gamma = 2;\quad \underline{n} = v - 4,\ \ \gamma = 1,\ \ v \in \{4\ldots6\};\quad r = u \leq r_{\max} = 6.$$

Дополнительно к данным табл. 1 в продолжение 1-й и 4-й строк получены значения $\mathrm{Ra}_{0722} = 2\,245$ и $\mathrm{Ra}_{0721} = 3\,065$. Близкие при $\gamma = 2$,

$\underline{n}$ = 0 (1-я строка) значения получили Е.М. Жуховицкий [6]: (408,2; с погрешностью до 14 %: 743; 3 258; 3 291) и M. Sherman [7]: (406,9). Результаты Е.М. Жуховицкого при γ = 1 (4-я строка) с авторской оценкой погрешности 1,4 %: (135,2; 561,9; 1 355; 2 288).

Таблица 1

Значения $Ra_{кр}$ для течений в горизонтальных круглоцилиндрических полостях

γ	*v*	Значение $Ra_{кр}$ при *r*					
		1	2	3	4	5	6
2	1	133,4	545,6	746,6	1 326,1	1 540,6	1 763,1
	2	233,3	500,5	806,0	1 037,3	1 443,6	2 299,0
	3	264,1	494,5	836,6	992,8	1 525,3	1 931,6
1	4	402,4	731,6	1 448,7	1 813,1	2 196,9	2 855,6
	5	649,4	1 494,2	1 632,4	1 921,6	2 239,6	3 049,1
	6	282,0	783,4	1 566,0	1 910,6	2 249,1	2 695,7

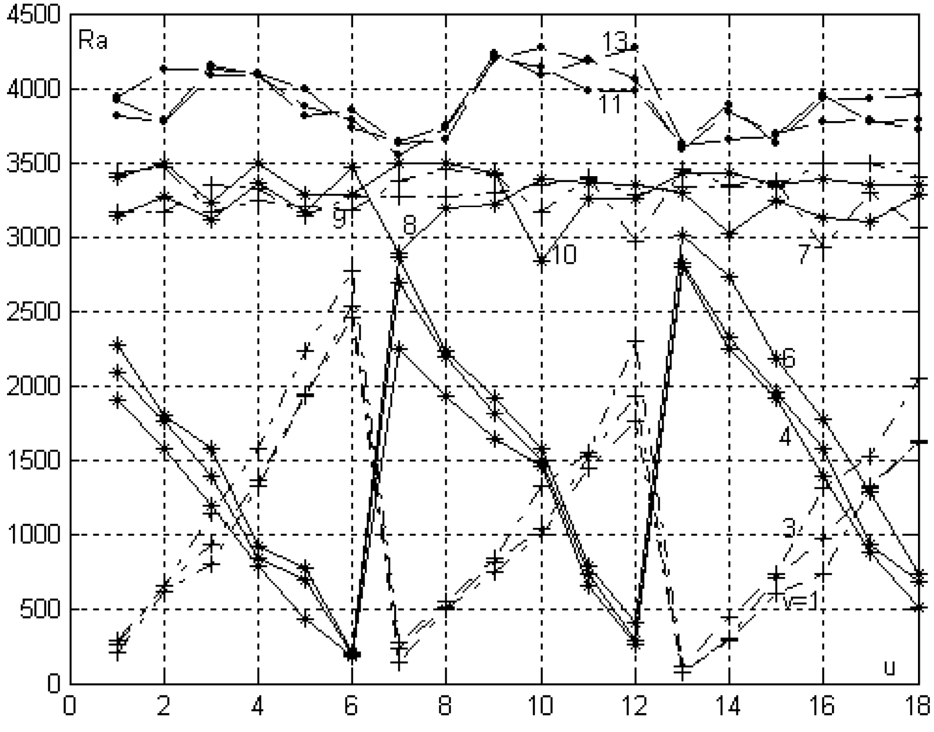

Рис. 1. Значения $\{Ra_{кр}\}$ для горизонтально-цилиндрических полостей при $Y/X \in \{2; 1; 0,5\}$. Кривые с $v \in \{1…3; 7; 9\}$ получены при γ = 2, кривые с $v \in \{4…6; 8; 10\}$ — при γ = 1 с поворотом относительно центральной вертикали, кривые с *v* = 11…13 — разности между значениями при γ = 1 и γ = 2

На рис. 1 приведены результаты расчета значений $\{Ra_{кр}\}$ для различных вариантов цилиндрических полостей. Зависимости $\{Ra_{кр}(u)\}$

представлены кривыми с $v \in \{1\ldots3;\ 7;\ 9;\ 11\ldots13\}$ всегда с увеличением p и r (в пределах каждого из интервалов с $p = 1\ldots3$) в сторону роста u, а также кривыми с $v \in \{4\ldots6;\ 8;\ 10\}$ с перестановкой относительно вертикали $u = u_{\max}/2$. Здесь

$$0 < r \le R = r_{\max},\ r = u - (p-1)R \text{ или } r = u + (2 + 1{,}5R)p - (1 + 4{,}5R) \quad (7)$$

в 1-м и во 2-м случаях соответственно ($r_{\max} = 6$). При построении кривых как с $v \in \{1\ldots3\}$, так и с $v \in \{4\ldots6\}$ использованы данные для $s = 1...3$ последовательно, т. е. с возрастанием $\mathrm{Ra}_{\text{кр}}$ вместе с v при каждом из $\{u\}$.

В буквенной записи выражений $\{\mathrm{Ra}_{\text{кр}}\}$ допустимо сохранять только изменяющиеся индексы. В частности, понятны обозначения функций

$$G = \mathrm{Ra}_{\gamma} - \mathrm{Ra}_{\gamma+1},\ \gamma = 1;\ F = f + \mathrm{Ra}_*,\quad f = \mathrm{Ra}_s - \mathrm{Ra}_{s+2},\ s = 1,\ \mathrm{Ra}_* = 3\ 500;$$

$$K(r) = k + \mathrm{Ra}_*,\quad k = \mathrm{Ra}_{s,\,r-1} - \mathrm{Ra}_{s-2,\,r},\ s = 3,\ r = 2\ldots6;\ K(0) = \mathrm{Ra}_*, \quad (8)$$

представленных кривыми с $v \in \{11\ldots13\}$ для $s = 1\ldots3$ (последовательно), с $v = 7,\ 8$ и с $v = 9,\ 10$ соответственно. Справедливо следующее:

$$\varphi_{\min} \le \varphi \le 0,\ \varphi \in \{f, k\};\ G > 0;$$

$$(f, k)_{\min} \in \{(-616; -665),\ \gamma = 1;\ (-568; -358),\ \gamma = 2\}. \quad (9)$$

В (9) неравенства для $\{f\}$, разностей между минимальным и максимальным значениями при любых совпадающих наборах (r, p, γ), — следствие определения. Неравенства для $\{G, k\}$ понятны из рис. 1. Большее из двух значений $\{\mathrm{Ra}_{\text{кр}}\}$ с одинаковыми группами индексов (s, r, p) всегда получается при граничных условиях 1-го рода (см. рис. 1). Установлено, что из двух соседних по возрастанию групп $\{\mathrm{Ra}_{\text{кр}}\}$ с $n = 0...2$ даже большее значение ($s = 3$) из 1-й группы не превышает меньшего ($s = 1$) из 2-й группы. На рис. 1 заметно (и расчеты подтверждают) следующее:

$$\mathrm{Ra}_p \ge \mathrm{Ra}_{p+1} \ge \mathrm{Ra}_{p+2},\ p = 1,\ (s, r, \gamma) = \text{idem}. \quad (10)$$

Запись (10) означает, что большее из двух значений $\mathrm{Ra}_{\text{кр}}$ — при совпадении граничных условий (γ), порядковых номеров r (по возрастанию), а также значений s, т. е. вместе самых больших, малых или промежуточных по значению на своих вертикалях (при различии u) — соответствует большему значению Y/X (меньшему p).

В табл. 2 приведены значения $\{\underline{n}_{srp\gamma}\}$, соответствующие $\{\mathrm{Ra}_{\ srp\gamma}\}$ на рис. 1. Из сопоставления полученных результатов следует, что исходные возмущения равновесия жидкости в горизонтально-

цилиндрических полостях более вероятны при волновых числах в (2)
$\underline{n} = \{0; 0; 1\}$, если $\gamma = 2$ ($v = 1$), или $\underline{n} = \{2; 1; 2\}$, если $\gamma = 1$ ($v = 4$), при $Y/X \in \{2; 1; 0{,}5\}$; в обоих случаях $u \in \{1; 7; 13\}$.

Таблица 2

Волновые числа $\underline{n}$ возмущений в горизонтально-цилиндрических полостях при значениях $\{Ra_{кр}\}$ на рис. 1

v	Значение $\underline{n}$ при u																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	0	1	0	1	1	2	0	2	0	0	1	0	1	1	2	2	1	1
2	1	0	2	0	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	2	2
3	2	2	1	2	0	0	2	0	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0
4	2	2	0	2	2	2	1	1	0	1	1	1	2	1	2	1	1	1
5	0	0	2	1	0	0	2	0	1	0	2	2	0	2	1	0	0	0
6	1	1	1	0	1	1	0	2	2	2	0	0	1	0	0	2	2	2

Таблица 3

Значения $Ra_{кр}$ для течений в шаровых полостях

γ	v	Значение $Ra_{кр}$ при r				
		1	2	3	4	5
2	1	476,4	625,1	1 076,2	1 428,5	2 328,1
	2	446,6	836,4	1 104,8	1 745,0	2 036,6
	3	226,7	785,7	989,1	2 111,2	2 638,4
1	4	945,2	1 317,5	2 018,3	3 024,8	3 585,4
	5	763,7	1 242,9	1 677,0	2 454,6	2 816,8
	6	597,3	1 164,5	1 551,6	2 286,6	2 994,4

В табл. 3 представлены результаты для возмущений в шаровых полостях при $r_{max} = 5$. В работе [8] для аппроксимации скорости v_y использованы полиномы вида

$$v_y = (1 - x^2 - y^2 - z^2) \sum_{r,s,m} C_{rsm} x^r y^s z^m$$

без строгого удовлетворения уравнениям движения, но с хорошей физической интерпретацией. При этом $\{Ra_{кр}\} \in \{254{,}8; 798{,}3; 952{,}6; 1\,996; 3\,167{,}2\}$ для $\lambda = \infty$ ($\gamma = 2$) и $\{Ra_{кр}\} \in \{936{,}5; 1\,113; 2\,013; 3\,974{,}6; 5\,032\}$ для $\lambda = 0$. Согласно [9], $Ra_{кр\ min} = 745{,}9$. В работе [10] для шаровой полости, заполненной водой и окруженной массивом из плексигласа ($\lambda = 2$ Вт/(м·K)), экспериментально получено $Ra_{кр\ min} = 350$ с погрешностью менее 10 %. Эти результаты качественно согласуются с представленными в табл. 3.

В табл. 4 и на рис. 2 значения $\{Ra_{кр}\}$ для эллипсоидов вращения с $Y/X \in \{2; 1; 0{,}5\}$, $p = 1…3$ представлены по аналогии с данными табл. 3 и рис. 1 для горизонтальных цилиндров. Справедливы как обозначения (7), (8), так и результаты (9), но при $r_{\max} = 5$; $Ra_* = 5\,000$; $(f, k)_{\min} \in \{(-769; -1\,768), \gamma = 1; (-1\,743; -1\,848), \gamma = 2\}$.

Понятно (см. табл. 4), что исходные возмущения равновесия жидкости в эллипсоидах вращения с $Y/X \in \{2; 1; 0{,}5\}$ более вероятны при волновых числах в (2) $\underline{n} = 2$.

Таблица 4

Волновые числа $\underline{n}$ возмущений в эллипсоидных полостях при значениях $\{Ra_{кр}\}$ на рис. 2

v	Значение $\underline{n}$ при u														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	0	0	0	0	2	0	2	0	1	2	0	0	0	0
2	1	1	2	2	2	1	2	0	1	0	0	2	2	1	1
3	0	2	1	1	1	0	1	1	2	2	1	1	1	2	2
4	2	1	1	2	1	2	2	2	2	1	2	2	1	2	2
5	1	2	2	1	2	1	1	1	1	2	1	1	2	1	1
6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

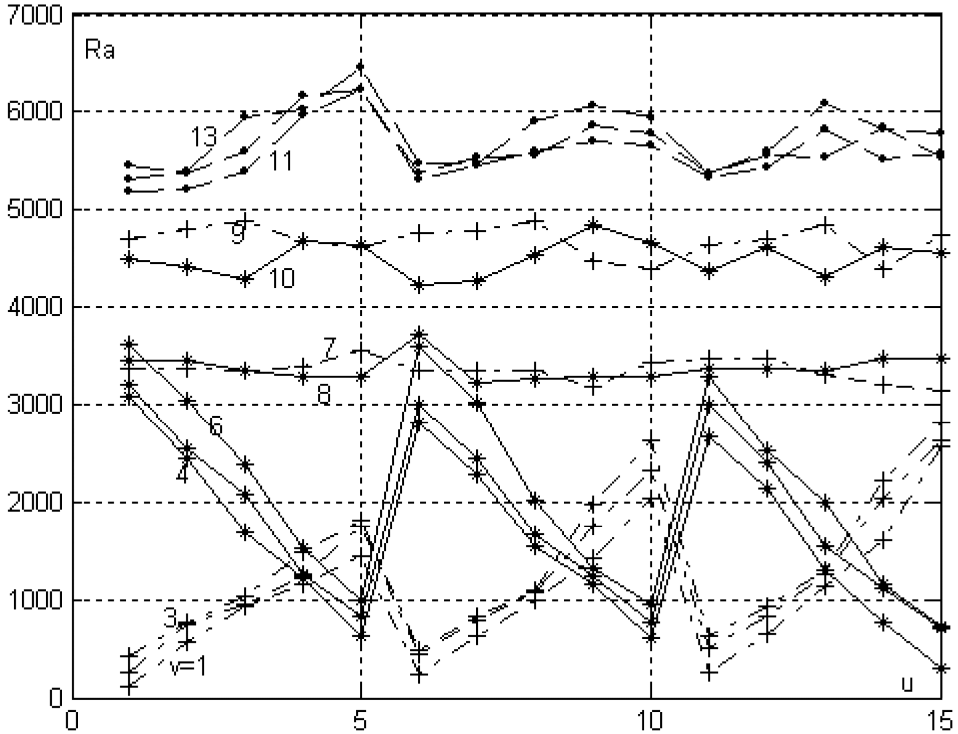

Рис. 2. Значения $\{Ra_{кр}\}$для полостей в виде эллипсоидов вращения при $Y/X \in \{2; 1; 0{,}5\}$. Кривые с $v \in \{1…3; 7; 9\}$ получены при $\gamma = 2$, кривые с $v \in \{4…6; 8; 10\}$ — при $\gamma = 1$ с поворотом относительно центральной вертикали, кривые с $v = 11…13$ — разности между значениями при $\gamma = 1$ и $\gamma = 2$

Из рис. 2 в отличие от рис. 1 видно, что соотношения типа (10) теперь выполняются с изменением знака неравенств. Получается, что увеличение Y/X в горизонтальных цилиндрах приводит к повышению (возрастание $\{Ra_{кр}\}$ при (s, r, γ) = idem), а в телах вращения — к снижению устойчивости равновесия жидкости.

В работе [11] выполнение (9) для G и рост $\{Ra_{кр}\}$ замечены при $\underline{n} = 0$ как вместе с $Y/X \in \{5; 2; 1; 0{,}5\}$ для полостей с сечениями в виде внутренней части эллипса, ограниченной вертикалями через середины горизонтальных полуосей, так и вместе с $Y = h \in \{50; 20; 8; 4; 2; 1; 0{,}5; 0{,}1; 0{,}05\}$ для полостей (единичной ширины l) с прямоугольными сечениями, т. е. для «внутренностей» эллиптических цилиндров с полуосью $X \to \infty$.

Известно [3], что при выполнении (9) для G наблюдается снижение при $\underline{n} = 0\ldots2$, (s, r, γ) = idem с ростом высоты h вертикальных цилиндров диаметром $l = 2X$, т. е. «внутренностей» эллипсоидов вращения с полуосью $Y \to \infty$. Обобщая приведенные результаты, можно предположить, что при (n, s, r, γ) = idem в широком диапазоне изменения отношения h/l (высоты сечения к его ширине) справедливо следующее: с увеличением отношения h/l значение $\{Ra_{кр}\}$ для всех горизонтально-эллиптических полостей (и их симметричных «внутренностей») с полуосью $0 < X < \infty$ возрастает, а для всех полостей в виде эллипсоидов вращения с $0 < Y < \infty$ — уменьшается; при этом можно ожидать и неизменного выполнения (9) для G и k.

При проведении расчетов получены также интересные сведения по распределению скоростей и температур, по картинам изолиний для них.

Таким образом, разработаны методика и программа аналитического решения задачи о возникновении естественной конвекции в полостях с несложным математическим описанием границы и с осями симметрии, нормальными к ускорению массовых сил (и оси y) или коллинеарными ему. Приведены результаты расчетов для полостей с эллиптическими сечениями (горизонтально-цилиндрических или в виде тел вращения) при отношении полуосей $Y/X \in \{2; 1; 0{,}5\}$ и при возмущениях с волновыми числами $\underline{n} = 0, 1, 2$. Найденные значения $\{Ra_{кр}\}$ для шаровых и круглоцилиндрических полостей согласуются с известными литературными данными. Из анализа всей полученной информации следует, что исходные возмущения равновесия жидкости в эллипсоидах вращения более вероятны при волновом числе $\underline{n} = 2$ во всех случаях, а в горизонтально-цилиндрических полостях — при $\underline{n} = \{0; 0; 1\}$, если $\gamma = 2$ (граничные условия 2-го рода), или $\underline{n} = \{2; 1; 2\}$, если $\gamma = 1$, при $Y/X \in \{2; 1; 0{,}5\}$ соответственно.

Выявлены три группы соотношений во множестве $\{Ra_{кр}\}$. Во-первых, из двух значений $\{Ra_{кр}\}$ большее всегда получается в случае идеально теплопроводной границы (при идентичности всех остальных условий сравнения). Во-вторых, из двух соседних по возрастанию групп $\{Ra_{кр}\}$ с $\underline{n} = 0, 1, 2$ даже большее значение из 1-й группы не превышает меньшего из 2-й группы. И в-третьих, в полостях с эллиптическими сечениями при $Y/X \in \{2; 1; 0{,}5\}$ увеличение Y/X приводит к повышению (возрастание $\{Ra_{кр}\}$ при идентичности других условий сравнения) или к снижению устойчивости равновесия жидкости в горизонтальных цилиндрах и в телах вращения соответственно. Высказано предположение о выполнимости этих соотношений в широком диапазоне изменения характерных размеров как для всех горизонтально-эллиптических полостей (вместе с их симметричными внутренними частями), так и для всех эллипсоидов вращения; его обоснование, конечно, требует дополнительной информации.

Сделан вывод о надежности и эффективности использованных программ для ПК.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Полежаев В.И., Сазонов В.В. *Механика невесомости и гравитационно-чувствительные системы: Аннотации докл. науч.-исслед. сем. ИПМ РАН*. Препринт. Москва, 2009, № 898, 36 с.

[2] Уховский М.Р., Юдович В И. Об уравнениях стационарной конвекции. *ПММ*, 1963, т. 27, № 2, с. 295–300.

[3] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*. Москва, Наука, 1972, 392 с.

[4] Пылаев А.М. Задача о критических конвективных движениях в горизонтально-циндрических полостях. *Изв. РАН*, МЖГ, 2005, № 3, с. 14–24.

[5] Канторович Л.В., Крылов В.И. *Приближенные методы высшего анализа*. Москва; Ленинград, ГИТТЛ, 1950, 696 с.

[6] Жуховицкий Е.М. Применение метода Галёркина к задаче об устойчивости неравномерно нагретой жидкости. *ПММ*, 1954, т. 18, № 2, с. 205.

[7] Sherman M. Onset of Thermal Instability in a Horizontal Cirkular Cylinder. *Phys. Fluids*, 1966, vol. 9, no. 11, 2095 p.

[8] Жуховицкий Е.М. Об устойчивости неравномерно нагретой жидкости в шаровой полости. *ПММ*, 1957, т. 21, № 5, с. 689.

[9] Sherman M. Toroidal and Poloidal Field Representation for Convective Flow within a Sphere. *Phis. Fluids*, 1968, vol. 11, no. 9, 1895 p.

[10] Овчинников А.П., Шайдуров Г.Ф. Конвективная устойчивость однородной жидкости в шаровой полости. *Уч. зап. Пермск. ун-та. Сер. Гидродинамика*, 1968, № 184, вып. 1, 3.

[11] Пылаев А.М., Диев М.Д. Анализ устойчивости равновесия жидкости в полостях прямоугольного сечения. *Тр. Четвертой Рос. нац. конф. по теплообмену*. Москва, Изд-во МЭИ, 2006 (Свободная конвекция, т. 3).

Статья поступила в редакцию 21.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Пылаев А.М. Решение внутренней задачи о возникновении естественной конвекции жидкости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 5.

URL: http://engjournal.ru/catalog/machin/criogen/718.html

Пылаев Анатолий Михайлович родился в 1936 г., окончил Московский энергетический институт в 1960 г. и в 1965 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Теплофизика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор и соавтор 96 публикаций по разделам теории тепломассообмена, термодинамики, механики жидкости и газа. e-mail: olgapylaeva@yandex.ru