

Безнапорное заполнение капилляра в асимптотической теории смачивания

© А.С. Романов, А.В. Семиколенов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрен подход к непротиворечивому описанию динамического угла смачивания при растекании капельной жидкости вдоль твердой поверхности с учетом дополнительного химического потенциала (расклинивающего давления) для частиц жидкости в тонких слоях жидкости вблизи линии трехфазного контакта. Применение развиваемой теории продемонстрировано на примере расчета скорости безнапорного заполнения плоского капилляра частично смачивающей жидкостью.

Ключевые слова: *частично смачивающая жидкость, тонкая пленка, поверхностное натяжение, расклинивающее давление, трехфазный контакт, краевой угол, капилляр.*

Движение жидкости, имеющей свободную поверхность, отличается значительным своеобразием, так как потоки массы, импульса и энергии на свободной поверхности связаны с перемещением самой поверхности. Форма свободной поверхности при растекании жидкости вдоль твердой поверхности зависит от взаимодействия жидкости с первоначально сухой твердой поверхностью, т. е. от процесса смачивания. В классической теории считается, что на линии трехфазного контакта, т. е. на линии пересечения свободной поверхности жидкости с твердой поверхностью, вдоль которой происходит растекание жидкости, выполняется условие равновесия Юнга. Для частично смачивающей жидкости полагается, что соответствующий равновесный угол смачивания (всегда отсчитываемый со стороны жидкости) имеет значение $0 < \alpha_e < \pi/2$. Отказ от условия Юнга при растекании невозможен, так как это означает отсутствие локального термодинамического равновесия вблизи линии трехфазного контакта.

Проблема описания явления смачивания может быть решена на основе учета реальных сил физико-химического происхождения, возникающих в тонких слоях жидкости. Эти силы часто называют расклинивающим давлением. (Термин «расклинивающее давление» в настоящее время является общепринятым и был впервые введен Б.В. Дерягиным [1, 2].) В [3] было показано, что такой подход согласуется с теорией Рэлея и приводит к физически очевидному факту, что скорость растекания при смачивании для частично смачивающей

жидкости пропорциональна градиенту химического потенциала молекул жидкости вблизи линии трехфазного контакта.

Настоящая работа посвящена проблеме определения динамического угла смачивания, существование которого подтверждают эксперименты [4]. Для этого проводится асимптотическое исследование формы свободной поверхности жидкости вблизи линии трехфазного контакта. В результате дается определение динамического (т. е. зависящего от скорости растекания) угла смачивания и найден асимптотический закон, связывающий этот динамический угол смачивания и скорость растекания. Применение развиваемой теории продемонстрировано на примере расчета скорости безнапорного заполнения плоского капилляра частично смачивающей жидкостью.

В приближении теории смазки форма свободной поверхности одномерной жидкой пленки, растекающейся вдоль гладкой твердой поверхности при частичном смачивании, описывается уравнением

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi_\alpha(h)}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad (1)$$

где $h(x, t)$ — толщина слоя жидкости над твердой поверхностью; x, t — координата, вдоль которой растекается жидкость (рис. 1) и вре-

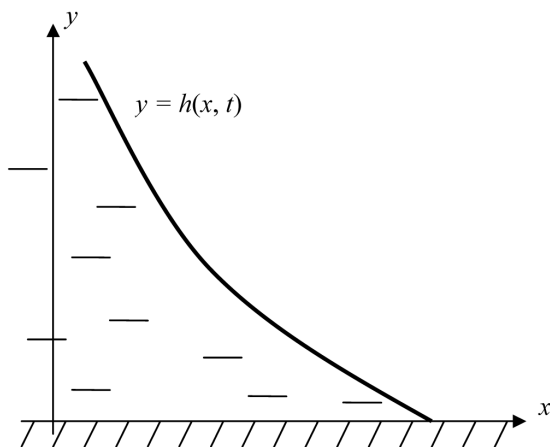


Рис. 1. Форма свободной поверхности жидкости

мя соответственно; μ — динамическая вязкость; σ — поверхностное натяжение; функция $\Phi_\alpha(h)$ определяет зависимость расклинивающего давления (или, с точностью до знака, химического потенциала молекул жидкости, рассчитанного на единицу объема):

$$\Phi_\alpha(h) = \frac{\pi}{12} h^{-3} \left[(n_L^2 a_{LL} - n_L n_S a_{LS}) G(\alpha) - n_L n_S a_{LS} G(\pi - \alpha) \right]. \quad (2)$$

Здесь функция $G(\alpha) = 1 + \cos^3 \alpha + \frac{3}{2} \sin^2 \alpha \cos \alpha$; n_L , n_S — концентрации молекул жидкости и твердого тела соответственно; a_{LL} , a_{LS} — постоянные взаимодействия молекул жидкость — жидкость и жидкость — твердое тело по Ван-дер-Ваальсу соответственно. Все подробности вывода соотношений (1) и (2) приведены в [3].

Из соотношения (2) следует, что если $a_{LL}n_L^2 > n_L n_S a_{LS}$, то всегда существует некоторое значение угла $\alpha = \alpha_0$, $\pi > \alpha_0 > 0$, такое, что $\Phi_\alpha(h) = 0$, $\alpha = \alpha_0$. Поэтому в рамках развиваемой теории при равновесии обязательно $\alpha = \alpha_0$ при $h = 0$. Тем самым угол α_0 отождествляется с равновесным углом смачивания $\alpha_0 = \alpha_e$ для частично смачивающей жидкости.

Указанное выше неравенство ($A_{LL} > A_{LS}$, где $A_{LL} = n_L^2 a_{LL}$; $A_{LS} = n_L n_S a_{LS}$ — соответствующие постоянные Гамакера) физически означает, что объемная плотность энергии взаимодействия молекул жидкости между собой больше, чем при взаимодействии с молекулами твердой подложки. Если же $A_{LS} > A_{LL}$, то жидкость полностью смачивает твердую поверхность и никакого равновесного краевого угла смачивания при $h = 0$ не существует. Интересно также отметить, что $\alpha_e = 0$ при равенстве $A_{LL} = A_{LS}$, но ни при каких значениях постоянных Гамакера невозможно значение $\alpha_e = \pi$. Для этого необходимо, чтобы притяжение между молекулами сменилось отталкиванием, чего в рамках данной теории быть не может.

Выражение (2) для малых углов наклона свободной поверхности упрощается:

$$\Phi_\alpha(h) = \frac{\pi}{48} A_{LL} h^{-3} \left[\frac{16}{3} (1 - \beta) - \alpha^4 \right], \quad \beta = \frac{A_{LS}}{A_{LL}}, \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (3)$$

Соответственно этому для малых равновесных углов смачивания получаем асимптотическую формулу

$$\alpha_e = \left[\frac{16}{3} (1 - \beta) \right]^{1/4}, \quad \beta \rightarrow 1 - 0.$$

Уравнение свободной поверхности (1) должно быть дополнено граничными условиями на трехфазной границе $x = x_f(t)$:

$$h = 0, \quad h^3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \Phi_\alpha(h) \right) = 0, \quad (4)$$

первое из которых очевидно, а второе означает отсутствие расхода через линию трехфазного контакта.

Дальнейшее изучение движения жидкой пленки удобно провести в безразмерных переменных. При этом более определенно выясняется роль отдельных слагаемых в соотношениях (1), (4). Выберем в качестве характерных величин следующие: $L = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_l g}}$ — характерная

длина (так называемая капиллярная длина); ρ_l , g — плотность жидкости и ускорение свободного падения соответственно; $t_0 = \frac{3\mu L}{\sigma}$ —

характерное время. Учтем также, что при малых углах наклона справедливо приближенное равенство (3), тогда уравнение (1) и граничные условия (4) можно переписать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (w^3 + Sw) \frac{\partial}{\partial x} \left[\omega \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w + \frac{R}{w^3} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 - \alpha_e^4 \right) \right] \right\} = 0; \quad (5)$$

$$w = 0, \quad (w^3 + Sw) \frac{\partial}{\partial x} \left[\omega \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w + \frac{R}{w^3} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 - \alpha_e^4 \right) \right] = 0 \quad \text{при } x = x_f(t). \quad (6)$$

Здесь для безразмерной координаты и безразмерного времени сохранены те же обозначения, что и для размерных координаты и времени,

$w = \frac{h}{L}$ — безразмерная толщина жидкой пленки. Безразмерный критерий $R = \frac{\pi}{48} \frac{A_{LL}}{\sigma L^2}$ определяет относительную роль расклинивающего

давления и поверхностного натяжения.

Оценим для наглядности для одного частного случая характерные величины t_0 , L и безразмерный критерий R . Пусть $n_L =$

$= 3,34 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$; $T = 300 \text{ К}$, $A_{LL} = \frac{48}{\pi} \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$. Зададим также $\sigma =$

$= 0,062 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$; $\mu = 1,48 \text{ Па} \cdot \text{с}$; $\rho_l = 1,26 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$, что примерно соответствует глицерину при температуре $T = 300 \text{ К}$. Тогда получим

$L = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $t_0 = 0,2 \text{ с}$; $R = 3 \cdot 10^{-14}$. Как видно, для безразмерного критерия справедливо $R \ll 1$. Поэтому роль соответствующих слагаемых в соотношениях (5) и (6) существенна только при $w \rightarrow 0$, т. е.

при достаточно малых толщинах жидкой пленки, в том числе вблизи линии трехфазного контакта $x \rightarrow x_f(t)$.

Более наглядно оценить значения толщины жидкой пленки, при которых необходим учет расклинивающего давления, можно непосредственно в размерных переменных. Относительная роль поверхностного натяжения и расклинивающего давления определяется равенством $\frac{\sigma}{\rho_0} = \frac{A_{LL}}{h_0^3}$, где ρ_0 — характерное значение кривизны поверхности пленки; h_0 — некоторая «критическая» толщина пленки. При толщине пленки $h^3 < h_0^3$ расклинивающее давление должно учитываться наряду с поверхностным натяжением. Учитывая, что $\sigma = \frac{A_{LL}}{r_0^2}$ (см. [3]), r_0 — радиус молекулы жидкости по Ван-дер-Ваальсу, критическую толщину пленки можно оценить в виде

$$h_0^3 = r_0^2 \rho_0.$$

Таким образом, получается оценка области толщин жидкой пленки, где учет расклинивающего давления целесообразен и возможен в рамках механики сплошной среды: $r_0^2 \rho_0 > h^3 \gg r_0^3$. Если, например, принять $r_0 = 10^{-10}$ м, $\rho_0 = 10^{-4}$ м, то критическая толщина пленки $h_0 = 10^{-8}$ м $\gg r_0$.

Экспериментальные данные свидетельствуют [1, 2], что молекулярная составляющая расклинивающего давления в некоторых случаях проявляется уже при толщинах порядка 10^{-7} м. Поэтому говорят, что молекулярная составляющая расклинивающего давления носит диффузный характер.

Пусть $\dot{x}_f(t) \equiv \frac{dx_f}{dt} \neq 0$, где $x_f(t)$ — функция, определяющая положение трехфазной границы (см. рис. 1); $\dot{x}_f > 0$ соответствует натеканию жидкости на сухую твердую поверхность, $\dot{x}_f < 0$ — стеканию жидкости (см. рис. 1). Найдем форму уравнения (5), асимптотически справедливую при $x \rightarrow x_f(t)$.

Для большей наглядности воспользуемся методом работы [5]. Дифференцируя первое граничное условие по времени t , получаем

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \dot{x}_f \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = x_f(t).$$

Предположим, что это соотношение, строго выполняющееся на линии трехфазного контакта, выполняется и в некоторой окрестности трехфазной границы жидкости $w \rightarrow 0$, $x \rightarrow x_f(t)$. Заменим в нем

производную по времени w'_t из уравнения (5) и проинтегрируем затем с учетом второго из условий (6). В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее форму свободной поверхности жидкости в зависимости от скорости перемещения границы:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} - \frac{\partial w}{\partial \eta} + R \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \eta^{-3} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^4 - \alpha_e^4 \right] \right\} + \frac{\dot{x}_f}{w^2} = 0. \quad (7)$$

Здесь координата $\eta = x_f(t) - x$ отсчитывается от границы внутрь жидкости (см. рис. 1). Важно отметить, что в случае бегущей волны, когда $\dot{x}_f = \text{const}$ и $w(x, t) = w(\eta)$, уравнение (7) является точным следствием соотношений (5), (6).

Учет расклинивающего давления в (7) является принципиально важным и позволяет полностью решить проблему выполнения условия Юнга на движущейся линии трехфазного контакта [3].

Уравнение (7) достаточно полно может быть проанализировано только численно. Наибольший интерес представляет область вблизи линии трехфазного контакта, в которой роль расклинивающего давления существенна, т. е. при $w \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow +0$. Для выяснения относительной роли слагаемых в уравнении (7) в указанной области перейдем к новым переменным $w, \eta \rightarrow \xi = \frac{w}{\sqrt{R}}, \delta = \frac{\eta}{\sqrt{R}}$. Тогда уравнение (7), в пренебрежении величинами $O(R)$, преобразуется к виду

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial \delta^3} + \frac{\partial}{\partial \delta} \left\{ \xi^{-3} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial \delta} \right)^4 - \alpha_e^4 \right] \right\} + \frac{\dot{x}_f}{\xi^2} = 0. \quad (8)$$

Независимая переменная δ является внутренней переменной для рассматриваемой малой области жидкости вблизи линии трехфазного контакта. Интегральная кривая, проходящая через особую точку уравнения (8), должна быть «сшита» с соответствующим решением уравнения (8) при $R = 0$ и $\delta \gg 1$.

Если считать, что кривизна поверхности жидкости $|w''_{\eta\eta}| = O(1)$ вдали от границы пленки, т. е. когда $w \sim 1$, $\eta \sim 1$, то в новых переменных кривизна $|\xi''_{\delta\delta}| = O(R^{1/2}) \ll 1$, $\delta \gg 1$. Поэтому, следуя общей схеме построения асимптотических представлений, уравнение (8) необходимо дополнить граничным условием:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \delta^2} = 0 \text{ при } \delta \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

Еще в качестве двух необходимых граничных условий используем

$$\xi = 0 \text{ и } \left. \frac{\partial \xi}{\partial \delta} \right| = \alpha_e \text{ при } \delta = 0, \quad (10)$$

где второе условие является условием равновесия Юнга.

Уравнение (8) вместе с граничными условиями (9), (10) асимптотически полностью определяют форму свободной поверхности жидкости вблизи линии трехфазного контакта в зависимости от скорости растекания.

Порядок уравнения (8) можно понизить, введя новую зависимую переменную $p = \left(\frac{d\xi}{d\delta} \right)^2 - \alpha_e^2$ и рассматривая толщину ξ жидкой пленки в качестве независимой переменной. В новых переменных уравнение (8) примет вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{p(p + 2\alpha_e^2)}{\xi^3} \right) + \frac{\dot{x}_f}{\alpha_e} \left[\xi^2 \sqrt{1 + \frac{p}{\alpha_e^2}} \right]^{-1} = 0. \quad (11)$$

Граничные условия для уравнения (11) следуют из условий (9) и (10):

$$p = 0 \text{ при } \xi = 0 \text{ и } \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Достаточно полное исследование задачи (11), (12) можно провести только численно. Проблема осложняется тем, что нужная нам интегральная кривая проходит через особую точку: $p = \xi = 0$. Поэтому найдем асимптотическое представление для интегральной кривой вблизи особой точки. Для этого проинтегрируем уравнение (11) с учетом первого граничного условия (12). В результате получим соотношение

$$\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \left(\frac{p(p + 2\alpha_e^2)}{\xi^3} \right) + \frac{\dot{x}_f}{\alpha_e} \int_0^\xi \left[(\xi^2) \sqrt{1 + \frac{p}{\alpha_e^2}} \right]^{-1} d\xi = C,$$

где $C \neq 0$ — постоянная интегрирования. Вблизи особой точки можно считать, что $p \ll \alpha_e^2$, а интеграл стремится к нулю при $\xi \rightarrow 0$. Тогда уравнение (11) сводится к линейному уравнению вида

$$\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{2\alpha_e^2 p}{\xi^3} = C.$$

Общее решение этого уравнения:

$$p = 2C \exp(\xi_1^{-2}) \left[\int_0^{\xi_1} \exp(-z^{-2}) dz + C_1 \right], \quad \xi = \xi_1 \sqrt{2\alpha_e^2},$$

где C_1 — постоянная интегрирования. Следовательно, если считать функцию $p(\xi)$ ограниченной, то имеется однопараметрическое семейство интегральных кривых, проходящих через особую точку $p = \xi = 0$, соответствующее значению постоянной интегрирования $C_1 = 0$. Тогда, интегрируя по частям, получим искомое асимптотическое соотношение

$$p \approx C \xi_1^3, \quad \xi_1 \rightarrow 0,$$

которое можно использовать при численном интегрировании уравнения (11).

Подробности такого численного анализа лежат вне темы настоящей работы, поэтому отметим только качественные особенности формы свободной поверхности жидкости вблизи линии трехфазного контакта.

Для случая натекания жидкости на твердую поверхность $\dot{x}_f > 0$ расчетами показано, что если независимая переменная $\delta \rightarrow \infty$, то и зависимая переменная $\xi \rightarrow \infty$. При этом вблизи линии трехфазного контакта при растекании существует тонкий переходный слой, кривизна свободной поверхности жидкости в котором достигает значительной величины. Максимум кривизны приходится на $\xi \approx 1$. Соответственно угол наклона поверхности пленки в пределах этого узкого переходного слоя испытывает резкий скачок, величина которого зависит от скорости растекания \dot{x}_f . При больших значениях переменной ξ_1 зависимость $p(\xi_1)$ близка к логарифмической.

Если скорость растекания $\dot{x}_f \rightarrow +0$, то на всем протяжении рассмотренной области толщин жидкости $w \sim \sqrt{R}$ угол наклона ее свободной поверхности не отличается от равновесного угла смачивания α_e . То есть решение для движущейся линии трехфазного контакта (при ее остановке $\dot{x}_f \rightarrow 0$) переходит в решение для неподвижной линии трехфазного контакта $p \approx 0$.

Для случая стекания жидкости с твердой поверхности $\dot{x}_f < 0$ расчетами по уравнению (11) показано, что толщина пленки жидкости оказывается ограниченной при выполнении второго условия (12). Предельный переход $\delta \rightarrow \infty$ в этом случае соответствует $\xi = \xi^* < \infty$, причем $p(\xi^*) = -\alpha_e^2$. То есть при стекании жидкости с твердой поверхности при неполном смачивании на твердой поверхности может

формироваться тонкая пленка жидкости постоянной толщины $w = w^* = \xi^* \sqrt{R}$. Толщина остающейся на твердой поверхности пленки w^* однозначно связана со скоростью движения границы \dot{x}_f .

Если $\dot{x}_f \rightarrow -0$, то решение, как и при $\dot{x}_f \rightarrow +0$, переходит в решение для неподвижной жидкости: $p \approx 0$ для всех $w \sim \sqrt{R}$.

Из-за наличия узкого переходного слоя вблизи линии трехфазного контакта при растекании жидкости $\dot{x}_f > 0$ угол наклона свободной поверхности при наблюдении может восприниматься как динамический, т. е. зависящий от скорости растекания, краевой угол. Этот угол можно также назвать «макроскопическим» углом смачивания α_d в отличие от реального «микроскопического» угла смачивания, который в рамках развиваемой теории всегда равен равновесному углу смачивания α_e .

Трудность строгого определения динамического угла смачивания α_d состоит в том, что внутреннее асимптотическое представление для угла наклона свободной поверхности не стремится к конечному пределу на внешней границе слоя. Несмотря на это, закон нарастания угла наклона свободной поверхности жидкости с увеличением толщины жидкого слоя w — «слабый», близкий к логарифмическому. Поэтому приближенно в качестве динамического угла смачивания α_d можно определить угол наклона свободной поверхности жидкости при некоторой фиксированной толщине жидкой пленки: $\alpha_d = w'_\eta |_{w=w_0}$, где $\sqrt{R} \ll w_0 \ll 1$.

Для проведения конкретных расчетов представляет интерес найти простое приближенное соотношение, определяющее динамический краевой угол в зависимости от скорости растекания.

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial w^2} + R_1 \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{p}{w^3} \right) + \frac{\dot{x}_f}{\alpha w^2} = 0,$$

которое совпадает с уравнением (11) как при $p \rightarrow 0$, так и при $p \gg \alpha_e^2$, $w \gg \sqrt{R_1}$, $R_1 = 2R\alpha_e^2$. Выше показано, что закон изменения угла наклона свободной поверхности α с толщиной жидкого слоя близок к логарифмическому. Поэтому приближенно можно считать угол α в этом уравнении параметром. Это уравнение интегрируется один раз и приводится к линейному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial w} + R_1 \left(\frac{p}{w^3} \right) + \frac{\dot{x}_f}{\alpha w} = C(t). \quad (13)$$

Характер особой точки $p = w = 0$ уравнения (13) может быть исследован методом изоклин или аналитически методом соприкасающихся парабол [6]. Проведенный таким образом анализ показывает, что особая точка $p = w = 0$ является седлом и существует единственная интегральная кривая, проходящая через особую точку вне зависимости от знака производной ($\dot{x}_f > 0$ либо $\dot{x}_f < 0$) при разумных значениях постоянной интегрирования $C(t)$. Соответствующее этой интегральной кривой решение уравнения (13) записывается так:

$$p = -\frac{\dot{x}_f}{\alpha} \exp(-R_1 w^{-2}) + p_C,$$

где p_C — решение уравнения (13) при значении скорости растекания $\dot{x}_f = 0$, оно задается формулой

$$p_C = 2Cw + e^{R_1 w^{-2}} \left[-2C\sqrt{\pi} - 4C \cdot \text{Erf}\left(\sqrt{R_1} w^{-1}\right) - R_1 \cdot \text{Ei}\left(-R_1 w^{-2}\right) \right].$$

Здесь обозначено: $\text{Erf}\left(\sqrt{R_1} w^{-1}\right)$ — интеграл ошибок; $\text{Ei}\left(-R_1 w^{-2}\right)$ — интегральная показательная функция [7].

Вдали от линии трехфазного контакта, т. е. при $w \gg \sqrt{R_1}$, из последнего соотношения получаем асимптотически справедливую формулу для функции $p(w)$, определяющую угол наклона свободной поверхности жидкости в зависимости от толщины слоя жидкости и скорости перемещения линии трехфазного контакта $\dot{x}_f > 0$:

$$p\alpha = -\dot{x}_f \left(\gamma + \ln(R_1 w^{-2}) \right) + O(w), \quad 1 \gg w \gg \sqrt{R_1}.$$

Если теперь, в соответствии с данным выше определением динамического краевого угла, фиксировать толщину жидкого слоя в последнем соотношении, то получим

$$\alpha_d \left(\alpha_d^2 - \alpha_e^2 \right) = \theta \dot{x}_f, \quad \theta = -\left(\gamma + \ln(R_1 w_0^{-2}) \right) > 0, \quad w_0 = \text{const} \gg \sqrt{R_1}. \quad (14)$$

Из последнего соотношения следует, что если выполнено сильное неравенство $\alpha_d^2 \gg \alpha_e^2$, то $\alpha_d^3 \approx \theta \dot{x}_f$. Это соотношение совпадает с законом Таннера [4], хорошо подтвержденным экспериментально.

Если же, наоборот, $\alpha_d^2 \rightarrow \alpha_e^2$, то получим $\alpha_d^2 = \alpha_e^2 + \dot{x}_f \frac{\theta}{2\alpha_e}$, что подтверждается и численным экспериментом, и общими физическими соображениями. Помимо этого из соотношения (14) следует, что неопределенная безразмерная величина $\theta = \text{const} > 0$ имеет порядок

нескольких единиц. Из приведенных выше оценок также следует, что порядок соответствующей толщины жидкой пленки, на которой при расчетах необходимо определять динамический угол смачивания, составляет 10^{-8} м.

В качестве примера применения асимптотической формулы (14) рассмотрим задачу о заполнении плоского капилляра частично смачивающей жидкостью. Будем рассматривать достаточно узкий капилляр, чтобы можно было считать форму мениска близкой к цилиндрической поверхности, но еще достаточной для того, чтобы пренебречь переходным слоем между равновесным и динамическим углами смачивания.

Очевидные тригонометрические соотношения позволяют получить формулу для радиуса r кривизны цилиндрического мениска:

$$r = \frac{H}{2 \cos \alpha_d}, \quad (15)$$

где H — поперечный размер капилляра. Формула (15) и все формулы, приведенные ниже, записаны в размерных переменных.

Полученное выше асимптотическое соотношение (14) для динамического угла смачивания в размерном виде переписывается как

$$\alpha_d (\alpha_d^2 - \alpha_e^2) = 3\theta \frac{\mu \dot{x}_f}{\sigma}, \quad (16)$$

где $x_f(t)$ — в данном случае заполненная длина капилляра.

Перепад давления на мениске определяется поверхностным натяжением σ и радиусом кривизны r :

$$\Delta P \equiv P_l - P_g = -\frac{\sigma}{r},$$

где P_l и P_g — давление в жидкости непосредственно под поверхностью мениска и давление газа над свободной поверхностью жидкости. Отсутствие внешнего напора означает, что перепад давления на всем столбе жидкости, движущейся в капилляре, равен перепаду давления на мениске.

Если пренебречь потерями давления на входе в капилляр и потерями давления при перестройке поля скорости жидкости вблизи мениска, то в приближении теории смазки постоянный продольный градиент давления в капилляре вычисляется в виде

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\Delta P(t)}{x_f(t)} = -\frac{2\sigma \cos \alpha_d(t)}{x_f(t)}.$$

В рассматриваемом приближении скорость жидкости определяется в зависимости от поперечной координаты y и времени t :

$$v(y, t) = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} \left(y^2 - \frac{H^2}{4} \right).$$

Соответственно объемный расход жидкости $Q(t)$, рассчитанный на единицу ширины капилляра, становится равным

$$Q = -\frac{1}{12} \frac{1}{\eta} \frac{dP}{dx} H^3.$$

Предположим, что изменение формы мениска происходит гораздо медленнее, чем заполнение капилляра. Основанием этому может служить сравнение пределов изменения глубины мениска и длины смоченной части капилляра. Глубина мениска может меняться в пределах поперечного размера капилляра, тогда как пределы изменения размера смоченной части капилляра не ограничены. При этом предположении скорость всех точек поверхности мениска практически одинакова и равна скорости заполнения капилляра. Таким образом, для расхода жидкости через сечение капилляра получаем оценку

$$Q = 2H\dot{x}_f.$$

Приравнивая оба выражения для расхода жидкости, получаем

$$\frac{d(x_f^2)}{dt} = \frac{1}{6} \frac{H\sigma}{\mu} \cos \alpha_d. \quad (17)$$

Уравнения (16), (17) полностью определяют закон заполнения капилляра частично смачивающей жидкостью.

Представляет интерес найти асимптотические законы заполнения капилляра при малых и больших временах. Для этого исключим производную \dot{x}_f из соотношений (16), (17). Тогда получим

$$\cos \alpha_d = \frac{4}{\theta} x_f \alpha_d (\alpha_d^2 - \alpha_e^2). \quad (18)$$

Если теперь положить $x_f \rightarrow 0$ в (18), что, очевидно, соответствует малым временам после начала заполнения капилляра, то получим $\cos \alpha_d \approx \pi/2$, а соответствующий асимптотический закон будет иметь вид

$$x_f = \frac{4}{\theta} \frac{\pi}{24} \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \alpha_e \right] \frac{\sigma t}{\mu}, \quad t \rightarrow 0.$$

Исходя из полученной формулы, следует заключить, что на этом этапе заполнения капилляра глубина заполнения не зависит от ширины капилляра и процесс происходит с характерной скоростью, определяемой отношением σ/μ .

При больших временах растекания можно считать, что $\alpha_d \rightarrow \alpha_e$ и $\cos \alpha_d \approx \cos \alpha_e$. Тогда из (17) получаем искомое соотношение

$$x_f = H \sqrt{\frac{\cos \alpha_e}{6} \frac{\sigma t}{H\mu}}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Интересно оценить характерное время процесса на этом этапе заполнения капилляра $T_0 = \frac{\mu H}{\sigma}$; это время для воды при температуре порядка 300 К и $H = 10^{-6}$ м получается равным порядка 10^{-8} с.

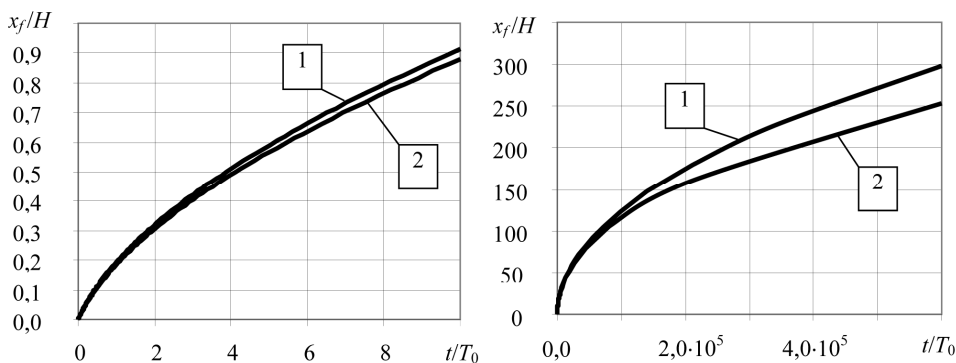


Рис. 2. Зависимость $x_f(t)$:
1 — $\alpha_e = 0,3$; 2 — $\alpha_e = 0,5$

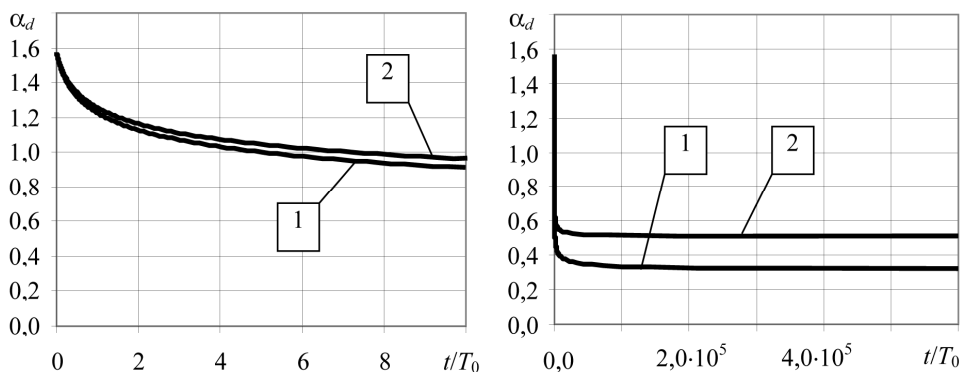


Рис. 3. Зависимость $\alpha_d(t)$:
1 — $\alpha_e = 0,3$; 2 — $\alpha_e = 0,5$

Результаты численного расчета по уравнениям (16), (17) приведены на рис. 2 и 3 (принято, что безразмерная постоянная $\theta = 4$).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дерягин Б.В., Чураев Н.В. *Смачивающие пленки*. Москва, Наука, 1984, 160 с.
- [2] Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Мулер В.М. *Поверхностные силы*. Москва, Наука, 1985, 399 с.
- [3] Романов А.С. Об одном способе гидродинамического описания растекания частично смачивающей жидкости по плоской твердой поверхности. *Коллоидный журнал*, 1990, т. 52, № 1, с. 93–99.
- [4] Жен П.Ж. Смачивание: статика и динамика. *Успехи физических наук*, 1987, т. 151, № 4, с. 619–681.
- [5] Самарский А.А., Соболев И.М. Примеры численного расчета температурных волн. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1963, т. 3, № 4, с. 702–719.
- [6] Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер. *Успехи физических наук*, 1941, вып. 9, с. 212–253.
- [7] Бейтмен Г. Эрдеи А. *Высшие трансцендентные функции*. Москва, Наука, 1974, т. 2, 296 с.

Статья поступила в редакцию 15.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Романов А.С., Семиколонов А.В. Безнапорное заполнение капилляра в асимптотической теории смачивания. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 4. URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/699.html>

Романов Александр Сергеевич родился в 1947 г.; окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1971 г.; д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана; автор ряда работ по механике жидкости, газа, нелинейным процессам переноса. e-mail: rolmal@bk.ru

Семиколонов Андрей Владимирович родился в 1966 г.; окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1989 г., МГУ им. М.В. Ломоносова в 1991 г.; канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана; автор ряда работ по механике жидкости, газа, нелинейным процессам переноса. e-mail: avsemik@mail.ru