УДК 519.711.3

Математическая модель в узком смысле

© Г.Е. Маркелов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Введено понятие математической модели в узком смысле и изложен подход, позволяющий строить такие модели. Рассмотрен пример построения иерархии математических моделей резистора, сопротивление и полная теплоемкость которого зависят от его температуры. Сформулированы утверждения, которые позволяют выявить математическую модель в узком смысле. Такая модель в отличие от других математических моделей рассматриваемого резистора в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности применительно к конкретному исследованию. Математическая модель в узком смысле является ценным интеллектуальным продуктом. Применение такой модели сокращает затраты времени и средств на проведение исследования, позволяет рационально использовать возможности математического моделирования при отсутствии богатого практического опыта построения математических моделей изучаемых объектов.

Ключевые слова: *математическое моделирование, математическая модель, математическая модель в узком смысле, свойства математических моделей, принципы построения математических моделей.*

Введение. Подходы к построению адекватной математической модели, способы и методы ее изучения изложены в обширной учебной и научной литературе. Однако в некоторых случаях возможности математического моделирования, подробно рассмотренные, например, в работах [1–5], используются не достаточно рационально. Одна из причин нерационального использования возможностей математического моделирования заключается в том, что построенные математические модели не обладают нужными свойствами. Набор таких свойств может включать кроме свойств полноты, точности, адекватности, продуктивности, экономичности, робастности и другие свойства.

Цель настоящей работы — изложение подхода, позволяющего строить математические модели, в достаточной мере обладающие нужными свойствами. В связи с этим целесообразно уточнить общеизвестное и широко используемое понятие математической модели объекта исследования, выделяя математическую модель в узком смысле. Такая модель в отличие от других математических моделей одного и того же объекта исследования в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию.

Построение математической модели в узком смысле предполагает выполнение требований, предъявляемых к математической модели. Очевидно, что такие требования противоречивы и на практике могут быть выполнены на основе разумного компромисса, что в значительной мере зависит от профессионального уровня исследователя, его творческого потенциала и интуиции.

Для построения математической модели в узком смысле следует выполнять правила и рекомендации, обобщающие практический опыт, накопленный при создании математических моделей. В этой связи особый интерес представляют принципы построения математических моделей, которые носят общий и универсальный характер. Так, в работе [6] сформулированы принципы, которые при их разумном использовании позволяют разработать математическую модель с нужными свойствами, уменьшая негативное влияние субъективного фактора при принятии решений на некоторых этапах математического моделирования.

Далее рассмотрен пример построения совокупности математических моделей одного и того же объекта исследования с целью выявления математической модели в узком смысле.

Постановка задачи. Выберем в качестве объекта исследования резистор, сопротивление и полная теплоемкость которого зависят от его температуры. Резистор считаем высокотеплопроводным телом, температура T которого в начальный момент времени t_0 равна T_0. На поверхности резистора площадью S происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой равна T_0, коэффициент теплоотдачи известен и равен α. Пусть

$$R = R_0 \left[1 + \beta \left(T - T_0\right)\right], \quad C = C_0 \left[1 + \gamma \left(T - T_0\right)\right], \quad T \in \left[T_0, T_1\right],$$

где R и C — сопротивление и полная теплоемкость резистора; R_0 и C_0 — сопротивление и полная теплоемкость резистора при $T = T_0$; β и γ — соответствующие температурные коэффициенты, причем $\beta > 0$ и $\gamma > 0$. Сила электрического тока, протекающего через резистор

$$I = \frac{U}{R_0 \left[1 + \beta \left(T - T_0\right)\right]},$$

где U — постоянная разность электрических потенциалов.

Построим иерархию математических моделей рассматриваемого объекта исследования и определим условия, при выполнении которых с относительной погрешностью не более заданного значения δ_0 можно найти силу тока, протекающего через резистор.

Решение. Если значение температурного коэффициента сопротивления β достаточно мало, то приходим к математической модели идеализированного резистора, сопротивление которого равно R_0. Силу тока, протекающего через такой резистор, найдем по формуле

$$I_0 = \frac{U}{R_0}. \tag{1}$$

Определим условия, при которых модель (1) применима. Для этого сначала рассмотрим установившийся процесс теплообмена. В этом случае мощность тепловыделения в материале резистора равна тепловому потоку, отводимому от резистора, т. е.

$$\frac{U^2}{R_0\left[1+\beta\left(\bar{T}-T_0\right)\right]} = \alpha\left(\bar{T}-T_0\right)S, \quad T_0 < \bar{T} \leqslant T_1,$$

где $\bar{T}$ — установившееся значение температуры резистора. Из полученного равенства легко установить

$$\bar{T} = T_0 + \frac{1}{\beta}\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta U^2}{\alpha S R_0}}\right).$$

Это позволяет найти установившееся значение $\bar{I}$ силы тока, протекающего через резистор. Действительно, при выполнении следующего неравенства

$$\frac{\beta U^2}{\alpha S R_0} \leqslant \beta^2\left(T_1-T_0\right)^2 + \beta\left(T_1-T_0\right) \tag{2}$$

справедливо

$$\bar{I} = \frac{I_0}{\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{\beta U^2}{\alpha S R_0}}}. \tag{3}$$

Очевидно, что с течением времени температура резистора возрастает, а сила тока убывает, приближаясь к установившемуся значению $\bar{I}$. Тогда для относительной погрешности значения I_0 запишем

$$\delta\left(I_0\right) = \left|\frac{I-I_0}{I}\right| = \frac{I_0}{I} - 1 \leqslant \frac{I_0}{\bar{I}} - 1.$$

Следовательно, при выполнении условия

$$\frac{I_0}{\bar{I}} - 1 \leqslant \delta_0$$

формулу (1) можно использовать для нахождения искомой силы тока с относительной погрешностью не более δ_0. Тогда приходим к неравенству

$$\frac{\beta U^2}{\alpha S R_0} \leqslant \delta_0^2 + \delta_0. \tag{4}$$

Таким образом, математическую модель (1) можно использовать при выполнении неравенств (2) и (4).

Определим условия, при которых применима модель (3). Для этого рассмотрим неустановившийся процесс теплообмена. В этом случае изменение температуры резистора во времени t описывает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$C_0\left[1+\gamma\left(T-T_0\right)\right]\frac{dT}{dt}=\frac{U^2}{R_0\left[1+\beta\left(T-T_0\right)\right]}-\alpha\left(T-T_0\right)S,\quad T\leqslant T_1,$$

а начальное условие имеет вид

$$T\left(t_0\right)=T_0.$$

Учитывая, что

$$I=\frac{I_0}{1+\beta\left(T-T_0\right)},$$

приходим к следующей математической модели

$$\frac{C_0}{\beta}\frac{I_0}{I^2}\frac{dI}{dt}=\frac{\alpha S\left(I_0-I\right)-\beta U I^2}{\gamma\left(I_0-I\right)+\beta I},\quad \frac{I_0}{1+\beta\left(T_1-T_0\right)}\leqslant I, \qquad (5)$$
$$I\left(t_0\right)=I_0.$$

Формулу (3) можно использовать для нахождения искомой силы тока с относительной погрешностью не более δ_0 при выполнении условия

$$\delta\left(\bar I\right)=\frac{I-\bar I}{I}\leqslant\delta_0,$$

причем

$$\delta_0<\frac{I_0}{\bar I}-1,$$

так как в противном случае следует применять формулу (1). Затем, используя модель (5), найдем момент времени

$$t_1=t_0+\frac{C_0}{\alpha S}\left[\left(\frac{I_0}{2I_0-\bar I}+\frac{\gamma}{\beta}\frac{I_0}{\bar I}\frac{I_0-\bar I}{2I_0-\bar I}-1\right)\ln\left(2-\frac{\bar I}{I_0}-\delta_0\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{I_0}{2I_0-\bar I}+\frac{\gamma}{\beta}\frac{I_0}{\bar I}\frac{I_0-\bar I}{2I_0-\bar I}\right)\ln\left(\frac{I_0}{I_0-\bar I}\delta_0\right)+\frac{\gamma}{\beta}\frac{I_0}{\bar I}\left(\delta_0+\frac{\bar I}{I_0}-1\right)\right],$$

начиная с которого установившееся значение $\bar I$ силы тока с относительной погрешностью не более δ_0 можно считать равным $I(t)$. Тогда модель (3) можно использовать при условии, что $t\geqslant t_1$.

Обсуждение результатов. Полученные результаты позволяют выявить из совокупности построенных математических моделей такую модель, которая в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности. Сформулируем это в виде следующих утверждений.

Утверждение 1. *Если справедливы неравенства* (2) *и* (4)*, то модель* (1) *является математической моделью в узком смысле.*

Утверждение 2. *Если справедливо неравенство* (2)*, не выполнено условие* (4)*, а временным интервалом от* t_0 *до* t_1 *можно пренебречь, то математическая модель* (3) *является моделью в узком смысле.*

Утверждение 3. *Если справедливо неравенство* (2)*, не выполнено условие* (4)*, а временным интервалом от* t_0 *до* t_1 *пренебрегать нельзя, то модель* (5) *является математической моделью в узком смысле.*

Сформулированные утверждения справедливы применительно к полученной совокупности математических моделей. Для иной совокупности моделей будут и другие утверждения.

Совокупность математических моделей данного объекта исследования получена с использованием в основном только одного принципа — принципа постепенного усложнения, что делает похожим изложенное в этом примере на «иерархический подход к построению математических моделей», описанный, например, в работе [5].

Заключение. Таким образом, построена иерархия математических моделей резистора, сопротивление и полная теплоемкость которого зависят от его температуры. Сформулированы утверждения, позволяющие выявить математическую модель в узком смысле. Очевидно, что применение такой модели сокращает затраты времени и средств на проведение исследования, позволяет рационально использовать возможности математического моделирования. Математическая модель в узком смысле является ценным для исследователя интеллектуальным продуктом — эквивалентом изучаемого объекта для рассматриваемого частного случая.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Dym C.L. *Principles of Mathematical Modeling*. Elsevier Academic Press, 2004, 303 p.

[2] Velten K. *Mathematical Modeling and Simulation: Introduction for Scientists and Engineers*. Weinheim, Wiley-VCH-Verl., 2010, 348 p.

[3] Зарубин В.С. *Математическое моделирование в технике*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, 495 с.

[4] Мышкис А.Д. *Элементы теории математических моделей*. Москва, Книжный дом «ЛИБЕРКОМ», 2011, 191 с.

[5] Самарский А.А., Михайлов А.П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры*. Москва, Физматлит, 2005, 316 с.

[6] Маркелов Г.Е. Принципы построения математических моделей. *Тихонов и современная математика: Тезисы докладов международной конференции*. Москва, Изд. отд. ф-та ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006, с. 128–129.

Статья поступила в редакцию 15.05.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Маркелов Г.Е. Математическая модель в узком смысле. *Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 4*. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/673.html

Маркелов Геннадий Евгеньевич — канд. техн. наук, доц. кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н. Э. Баумана. e-mail: markelov@rambler.ru