

Эффективный коэффициент теплопроводности композита при неидеальном контакте матрицы и анизотропных шаровых включений

© Г.Н. Кувыркин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Построена математическая модель переноса тепловой энергии путем теплопроводности в композите с изотропной матрицей и анизотропными шаровыми включениями. Тепловой контакт матрицы с включениями является неидеальным. Получены оценки эффективного коэффициента теплопроводности такого композита для материала включений, имеющего кристаллическую структуру, соответствующую основным типам систем кристаллической решетки. В силу электротепловой аналогии эти оценки могут быть интерпретированы также применительно к электропроводности композита.

Ключевые слова: композит, анизотропные шаровые включения, неидеальный тепловой контакт, эффективный коэффициент теплопроводности.

Введение. В развитие математической модели переноса тепловой энергии теплопроводностью в композите с шаровыми анизотропными включениями [1] построен вариант этой модели при наличии неидеального теплового контакта включений с матрицей. Этот вариант модели позволяет получить оценку эффективного коэффициента теплопроводности такого композита.

Математическая модель. При построении математической модели переноса тепловой энергии в композите примем, что композит состоит из изотропной матрицы с коэффициентом теплопроводности λ_m и множества в общем случае не контактирующих одни с другими анизотропных шаровых включений, тензор теплопроводности которых имеет главные значения Λ_k , $k = 1, 2, 3$. Неидеальность теплового контакта между матрицей и включениями будем характеризовать коэффициентом α контактного теплообмена [2].

Рассмотрим тепловое взаимодействие отдельно взятого анизотропного шарового включения радиусом R с неограниченным объемом окружающей его изотропной матрицы. Установившееся распределение температуры $T(x_1, x_2, x_3)$ в матрице удовлетворяет уравнению Лапласа в виде $T_{,ii} = 0$ (запятая с последующими двумя нижними индексами $i = 1, 2, 3$ у обозначения T температуры означает вторую производную по координате ξ_i в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, а повторение одинаковых латинских индексов указывает на суммирование этих производных по всем трем координатам;

такое обозначение и правило суммирования слагаемых с повторяющимися латинскими индексами использовано далее). Уравнение, описывающее установившееся распределение температуры $T^\circ(x_1, x_2, x_3)$ в анизотропном включении, имеет вид [3, 4]

$$(\lambda_{ij}T_{,j}^\circ)_{,i} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Примем, что на весьма большом по сравнению со значением R расстоянии от включения составляющие градиента установившегося распределения температуры в матрице по направлениям координатных осей Ox_i равны соответственно G_i . Тогда непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнению Лапласа удовлетворяет решение [4]

$$T = G_i x_i + \frac{B_i x_i}{r^3}, \quad (2)$$

где $r = \sqrt{x_i x_i}$. Температура в центре шарового включения должна быть ограничена. Поэтому решение уравнения (1) представляет собой линейную функцию координат

$$T^\circ = G_i^\circ x_i. \quad (3)$$

В соотношения (2) и (3) входят шесть коэффициентов B_i и G_i° , которые могут быть найдены из условий неидеального теплового контакта на сферической поверхности радиусом R . Условия (2), (3) задают непрерывность нормальной составляющей вектора плотности теплового потока при переходе через эту поверхность контакта и при условии $x_i x_i = R^2$ имеют вид [5]

$$\lambda_m \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i = \alpha(T - T^\circ) = \lambda_{ij} \frac{\partial T^\circ}{\partial x_j} n_i,$$

где $n_i = x_i/R$ — направляющие косинусы по отношению к координатным осям Ox_i нормали к сферической поверхности радиусом R в точках этой поверхности с координатами x_i ; λ_{ij} — компоненты тензора теплопроводности материала включения, определенные в выбранной системе координат. После подстановки в это соотношение формул (2) и (3) запишем

$$\lambda_m \left(G_i + \frac{B_i}{R^3} - 3B_j \frac{x_j x_i}{R^5} \right) x_i = \alpha R \left(G_i x_i + B_i \frac{x_i}{R^3} - G_i^\circ x_i \right) = \lambda_{ij} G_j^\circ x_i. \quad (4)$$

Из равенства левой и средней частей формулы (4) с учетом равенства $x_i x_i = R^2$ следует $(\lambda_m(G_i - 2B_i/R^3) - \alpha R(G_i + B_i/R^3 - G_i^\circ))x_i = 0$. Отсюда при произвольных значениях координат x_i , удовлетворяющих условию $x_i x_i = R^2$, получим

$$G_i^\circ = \frac{1}{\text{Bi}} \left((\text{Bi} - 1)G_i + (\text{Bi} + 2) \frac{B_i}{R^3} \right), \quad (5)$$

где $Bi = \alpha R / \lambda_m$ — число Био. Равенство средней и правой частей формулы (4) представим в виде $(\alpha R (G_i + B_i / R^3 - G_i^\circ) - \lambda_{ij} G_j^\circ) x_i = 0$. Отсюда при произвольных значениях координат x_i , удовлетворяющих условию $x_i x_i = R^2$, находим

$$G_i^\circ = \frac{Bi(G_j + B_j/R^3)}{Bi \delta_{ij} + \bar{\lambda}_{ij}}. \quad (6)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$); $\bar{\lambda}_{ij} = \lambda_{ij} / \lambda_m$. Приравняв правые части формул (5) и (6), получим

$$\frac{B_i}{R^3} = \gamma_{ij} \varepsilon_{jk} G_k, \quad (7)$$

где $\gamma_{ij} = (2Bi \delta_{ij} + (2 + Bi)\bar{\lambda}_{ij})^{-1}$ и $\varepsilon_{jk} = Bi \delta_{jk} + (1 - Bi)\bar{\lambda}_{jk}$.

Пусть главные оси тензора теплопроводности материала включения совпадают с осями Ox_i используемой системы координат. Тогда γ_{ik} и ε_{kj} — элементы диагональных матриц третьего порядка, произведение которых также будет диагональной матрицей третьего порядка с элементами

$$\chi_\beta = \frac{Bi + (1 - Bi)\bar{\Lambda}_\beta}{2Bi + (2 + Bi)\bar{\Lambda}_\beta}, \quad \beta = 1, 2, 3, \quad (8)$$

где $\bar{\Lambda}_\beta = \Lambda_\beta / \lambda_m$. Поэтому правую часть равенств (7) можно представить как произведение двух диагональных матриц и вектора с координатами G_β . В итоге вместо этих равенств запишем

$$\frac{B_\beta / G_\beta}{R^3} = \chi_\beta.$$

Из формулы (2) следует, что наличие шарового включения создает в матрице возмущение температурного поля относительно линейного распределения $T_{,k}^\circ \xi_k$ на большом удалении от этого включения, описываемое соотношением

$$\Delta T = \frac{B_i x_i}{r^3}. \quad (9)$$

Пусть N одинаковых шаровых включений с одинаковой ориентацией главных осей тензора теплопроводности находятся в объеме V_N шара, ограниченном сферической поверхностью радиусом R_N . Так как объем каждого включения равен $4\pi R^3/3$, в объеме $V_N = 4\pi R_N^3/3$ объемная концентрация включений $C_V = NR^3/R_N^3$.

Положим, что $G_2 = G_3 = 0$. Для точки, удаленной от каждого из включений на весьма большое расстояние r по сравнению со значением R_N , примем для всех включений $|\xi_1| \gg R_N$. Тогда, согласно формуле (9), N весьма удаленных включений, расположенных в объеме V_N , вызовут в этой точке возмущение температуры, которое с уче-

том равенства (7)

$$\Delta T_N = N\Delta T = NG_1x_1\chi_1\left(\frac{R}{r}\right)^3. \quad (10)$$

Если считать шар объемом V_N представительным элементом композита с рассматриваемыми включениями, этот элемент с эффективным коэффициентом теплопроводности λ_1^* композита в направлении координатной оси Ox_1 создаст в той же весьма удаленной точке такое же возмущение температуры [4]

$$\Delta T_N = G_1x_1(R_N/r)^3\frac{1-\tilde{\lambda}}{2+\tilde{\lambda}}, \quad (11)$$

где $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1^*/\lambda_m$. Приравняв правые части формул (10) и (11), получим

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{1-2\chi_1C_V}{1+\chi_1C_V}.$$

Аналогично можно найти формулы для $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2^*/\lambda_m$ и $\tilde{\lambda}_3 = \lambda_3^*/\lambda_m$, где λ_2^* и λ_3^* — эффективные коэффициенты теплопроводности композита в направлении осей $O\xi_2$ и $O\xi_3$ соответственно. В итоге при $\beta = 1, 2, 3$ запишем

$$\tilde{\lambda}_\beta = \frac{1-2\chi_\beta C_V}{1+\chi_\beta C_V}. \quad (12)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае композит будет анизотропным с главными значениями λ_β^* тензора теплопроводности. Если все три значения Λ_β различны, что характерно для включений с кристаллической структурой, принадлежащей триклинной, моноклинной и ромбической системам [6], то будут различны и все три значения λ_β^* . Такой композит относят к ортотропным материалам [7]. В случае тригональной, тетрагональной и гексагональной систем кристаллической структуры включений два значения Λ_β совпадают и в общем случае отличаются от третьего значения [6]. Это приводит к равенству двух значений λ_β^* для композита и к отличию их от третьего значения. Такой композит является трансверсально изотропным материалом [7]. Наконец, для включений с кристаллической структурой, принадлежащей кубической системе, все три значения Λ_β одинаковы, т. е. включения являются изотропными, что приводит и к изотропии композита в целом.

При хаотической ориентации анизотропных включений, когда ориентация главных осей тензора теплопроводности материала включения равновероятна, композит также становится изотропным. В этом случае эффективный коэффициент теплопроводности композита можно найти по формуле, полученной преобразованием соотношения (12) к виду

$$\lambda^* = \lambda_m \frac{1-2\chi^\circ C_V}{1+\chi^\circ C_V}, \quad (13)$$

где χ° следует из равенства (8) после замены в правой части этого равенства $\bar{\Lambda}_\beta$ на $\bar{\Lambda} = (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3)/(3\lambda_m)$. Отметим, что соотношение (13) совпадает с результатом, полученным в работах [8, 9] в предположении изотропии шаровых включений. При идеальном тепловом контакте между матрицей и включениями ($Bi \rightarrow \infty$) это соотношение идентично известной формуле Максвелла [4, 10] для гранулированной среды, состоящей из маточной породы и включений в виде изотропных гранул. Такое совпадение можно считать косвенным подтверждением корректности процедуры, использованной при получении формулы (12).

Построение двусторонних оценок. Для оценки возможной погрешности формулы (12) используем двойственную вариационную формулировку задачи стационарной теплопроводности [5, 11], позволяющую получить двусторонние оценки эффективного коэффициента теплопроводности рассматриваемого композита в направлении координатной оси Ox_β . В область V в виде прямого цилиндра с достаточно большой площадью S_0 параллельных оснований поместим половину составной шаровой частицы радиусом R_m , причем центр этой частицы и одно из оснований цилиндра соответствует значению $x_\beta = 0$, а другое основание — значению $x_\beta = H \gg R_1$.

Шаровая частица состоит из шарового слоя толщиной $(R_m - R)$ материала матрицы и анизотропного шарового включения радиусом R , причем тепловой контакт между этим слоем и включением является неидеальным. Остальная часть области V вне половины составной шаровой частицы радиусом R_m заполнена однородным материалом с оцениваемым значением λ_β^* эффективного коэффициента теплопроводности в направлении оси Ox_β , соответствующим объемной концентрации $C_V = (R/R_m)^3$ анизотропных шаровых включений. Для получения двусторонних оценок этого значения боковую поверхность цилиндрической области V примем идеально теплоизолированной, температуру основания при $x_\beta = 0$ положим равной нулю, а на втором основании зададим температуру $G_\beta H$.

Тогда в неоднородной цилиндрической области объемом $V = HS_0$, ограниченной поверхностью S , распределение температуры $T(M)$ и коэффициент теплопроводности $\lambda(M)$ будут функциями координат точки $M \in V$, причем функция $\lambda(M)$ кусочно-постоянная и принимает значения λ_β^* при $r > R_m$ и λ_m при $R < r < R_m$, где r — расстояние этой точки от центра включения, а при $r < R$ свойства материала анизотропного шарового включения определяют главные значения Λ_β тензора теплопроводности.

Двойственная вариационная формулировка стационарной задачи теплопроводности в рассматриваемой области включает в себя [8] ми-

нимизируемый функционал

$$J[T] = \frac{1}{2} \int_V \lambda(M) (\nabla T(M))^2 dV(M) + 2\pi R^2 \frac{\alpha}{2} \int_0^{\pi/2} (\Delta T_k(\theta))^2 \sin \theta d\theta, \quad (14)$$

где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона; $\Delta T_k(\theta)$ — разность температур на контактной полусферической поверхности радиусом R ; θ — угол, отсчитываемый от оси Ox_β , для которого $\cos \theta = x_\beta/r$, и максимизируемый функционал

$$I[\mathbf{q}] = -\frac{1}{2} \int_V \rho(M) (\mathbf{q}(M))^2 dV(M) - \int_S T(P) \mathbf{q}(P) \cdot \mathbf{n}(P) dS(P) - 2\pi R^2 \frac{\alpha}{2} \int_0^{\pi/2} (\Delta T_k(\theta))^2 \sin \theta d\theta, \quad P \in S, \quad (15)$$

где \mathbf{q} — вектор плотности теплового потока; $\rho(M) = 1/\lambda(M)$ при $r > R$ и $\rho(M) = 1/\Lambda_\beta$ при $r < R$; \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности S .

В качестве допустимого для функционала (14) примем при $r > R$ линейное по высоте цилиндра распределение температуры с постоянной составляющей градиента G_β , т. е.

$$T_*(r, \theta) = G_\beta r \cos \theta, \quad (16)$$

а в шаровом включении аналогично в силу симметрии относительно оси Ox_β

$$T_*^\circ = G_*^\circ r \cos \theta. \quad (17)$$

Условие непрерывности плотности теплового потока при $r = R$ представим в виде

$$\alpha(T_* - T_*^\circ) \Big|_{r=R} = \Lambda_\beta \frac{\partial T_*^\circ}{\partial r} \Big|_{r=R} \cos \theta.$$

Отсюда с учетом соотношений (16) и (17) находим

$$G_*^\circ = \text{Bi} G_\beta / (\text{Bi} + \bar{\Lambda}_\beta) \quad \text{и} \quad \Delta T_k(\theta) = G_\beta R \frac{\bar{\Lambda}_\beta \cos \theta}{\text{Bi} + \bar{\Lambda}_\beta}.$$

В итоге функционал (14) примет вид

$$J[T] = \lambda \frac{G_\beta^2}{2} H S_0 - \frac{2\pi R_m^3 \lambda G_\beta^2}{3} + 2\pi \frac{R_m^3 - R^3}{3} \lambda_m \frac{G_\beta^2}{2} + 2\pi \frac{R^3}{3} \Lambda_\beta \frac{(\text{Bi} G_\beta)^2}{2(\text{Bi} + \Lambda_\beta)^2} + 2\pi \frac{R^3}{3} \lambda_m \frac{\bar{\Lambda}_\beta^2 \text{Bi}}{(\text{Bi} + \bar{\Lambda}_\beta)^2}. \quad (18)$$

Для функционала (15) в качестве допустимого распределения вектора плотности теплового потока \mathbf{q} примем постоянное значение $q = -\lambda_{\beta}^* G_{\beta}$ единственной составляющей этого вектора, перпендикулярной основаниям цилиндра. В этом случае

$$\Delta T_{\kappa}(\theta) = -(q/\alpha) \cos \theta = (\lambda_{\beta}/\alpha) G_{\beta} \cos \theta.$$

Таким образом, функционал (15) примет вид

$$I[\mathbf{q}] = -\frac{(\lambda_{\beta} G)^2}{2} \left(\frac{HS_0 - 2\pi R_m^3/3}{\lambda_{\beta}} + 2\pi \frac{R_m^3 - R^3}{3\lambda_m} + 2\pi \frac{R^3}{3\Lambda_{\beta}} + 2\pi \frac{R^3}{3\lambda_m \text{Bi}} \right) + \lambda G^2 HS_0. \quad (19)$$

Принятые допустимые распределения температуры и плотности теплового потока для неоднородной области отличаются от действительных и поэтому значения $J[T]$ и $I[\mathbf{q}]$ не будут совпадать, причем $J[T] > I[\mathbf{q}]$ [11]. В промежутке между этими значениями должно быть расположено и значение $J_0 = (\lambda_{\beta}^*/2)G_{\beta}^2 HS_0$ минимизируемого функционала (14) для однородной области с оцениваемым значением λ_{β}^* эффективного коэффициента теплопроводности. Тогда при $(R/R_m)^3 = C_V$ с учетом формулы (18) из условия $J[T] \geq J_0$ получим

$$\tilde{\lambda}_{\beta} \leq 1 - C_V + \bar{\Lambda}_{\beta} \text{Bi} \frac{\text{Bi} + \bar{\Lambda}_{\beta}}{(\text{Bi} + \bar{\Lambda}_{\beta})^2} = \tilde{\lambda}_{+}, \quad (20)$$

а при использовании формулы (19) из условия $I_1[\mathbf{q}] \leq J_0$ найдем

$$\tilde{\lambda}_{\beta} \geq \frac{1}{1 - C_V + C_V/\text{Bi} + C_V/\bar{\Lambda}_{\beta}} = \tilde{\lambda}_{-}. \quad (21)$$

Результаты расчетов. На рис. 1 для случая $\text{Bi} = 1$ при различных значениях $\bar{\Lambda}_{\beta}$ приведены зависимости от объемной концентрации C_V верхней $\tilde{\lambda}_{+}$ и нижней $\tilde{\lambda}_{-}$ оценок отношения $\tilde{\lambda}_{\beta} = \lambda_{\beta}^*/\lambda_m$. Из этого рисунка следует, что разность $\tilde{\lambda}_{+} - \tilde{\lambda}_{-}$ уменьшается по мере увеличения значения $\bar{\Lambda}_{\beta}$. При $\bar{\Lambda}_{\beta} = 10$ и $\bar{\Lambda}_{\beta} = 100$ кривые для значения $\tilde{\lambda}_{-}$ практически совпадают с кривыми для значения $\tilde{\lambda}_{\beta}$ и для $\tilde{\lambda}_{+}$, поскольку различие в значениях $\tilde{\lambda}_{-}$, $\tilde{\lambda}_{\beta}$ и $\tilde{\lambda}_{+}$ очень мало. Например, для $C_V = 0,5$ при $\bar{\Lambda}_{\beta} = 10$ значения $\tilde{\lambda}_{-} = 0,9524$, $\tilde{\lambda}_{\beta} = 0,9538$ и $\tilde{\lambda}_{+} = 0,9545$, а при $\bar{\Lambda}_{\beta} = 100$ значения $\tilde{\lambda}_{-} = 0,995025$, $\tilde{\lambda}_{\beta} = 0,995041$ и $\tilde{\lambda}_{+} = 0,995050$.

С увеличением числа Bi тепловой контакт между включениями и матрицей улучшается. Поэтому при прочих равных условиях значения $\tilde{\lambda}_{\beta}$, $\tilde{\lambda}_{-}$ и $\tilde{\lambda}_{+}$ возрастают. На рис. 2 представлены зависимости, аналогичные приведенным на рис. 1, но при $\text{Bi} = 10$. Следует отметить, что оценки $\tilde{\lambda}_{-}$ и $\tilde{\lambda}_{+}$ и правая часть формулы (12) не изменяют своих значений при перестановке значений Bi и $\bar{\Lambda}_{\beta}$. Например, зави-

симости на рис. 2 для $\bar{\Lambda}_\beta = 1$ идентичны зависимостям на рис. 1 для $\bar{\Lambda}_\beta = 10$.

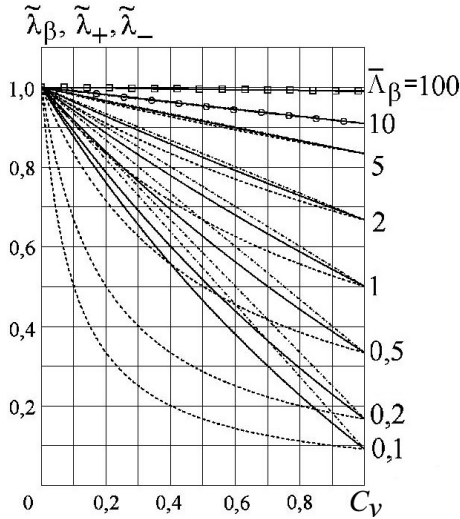


Рис. 1. Зависимости параметра $\tilde{\lambda}_\beta$ (— · — · —) от объемной концентрации C_V , построенные по формулам (12) (—), (20) (— · — · —) для верхней $\tilde{\lambda}_+$ и нижней $\tilde{\lambda}_-$ оценок соответственно при $Bi = 1$

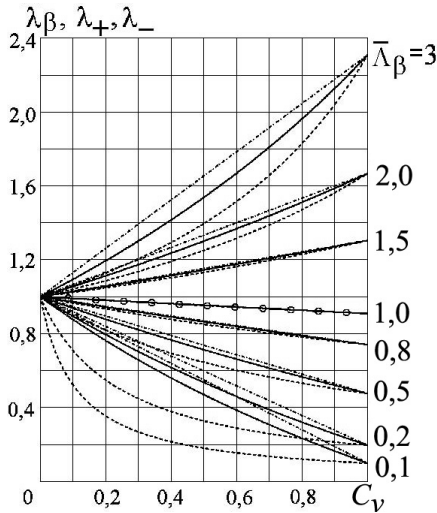


Рис. 2. Зависимости параметра $\tilde{\lambda}_\beta$ (— · — · —) от объемной концентрации C_V , построенные по формулам (12) (—), (20) (— · — · —) для верхней $\tilde{\lambda}_+$ и нижней $\tilde{\lambda}_-$ оценок соответственно при $Bi = 10$

Из рис. 1 следует, что при $Bi = 1$ ширина полосы, ограниченной кривыми для верхней $\tilde{\lambda}_+$ и нижней $\tilde{\lambda}_-$ оценок, увеличивается по мере уменьшения значения $\bar{\Lambda}_\beta$ несмотря на совпадение значений $\tilde{\lambda}_\beta, \tilde{\lambda}_+$ и $\tilde{\lambda}_-$ при $C_V = 0$ и $C_V = 1$. При $Bi = 10$ ширина такой полосы на

рис. 2 растет по мере отклонения значений $\bar{\Lambda}_\beta$ от единицы. Возможная причина состоит в том, что для таких сочетаний V_i и $\bar{\Lambda}_\beta$ использованные выше допустимые для функционалов распределения плотности теплового потока и температуры становятся достаточно грубыми.

Заключение. Модификация математической модели переноса тепловой энергии путем теплопроводности в композите с изотропной матрицей и анизотропными шаровыми включениями, состоящая в учете неидеальности теплового контакта между матрицей и включениями, позволила получить оценки эффективного коэффициента теплопроводности такого композита. Рассмотрены материалы включений, имеющие кристаллическую структуру, соответствующую основным типам систем кристаллической решетки. Возможная погрешность полученных расчетных зависимостей оценена путем построения двусторонних оценок на основе двойственной вариационной формулировки задачи стационарной теплопроводности в неоднородном твердом теле.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ–255.2012.8).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зарубин В.С., Котович А.В., Кувыркин Г.Н. Оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита с анизотропными шаровыми включениями. *Известия РАН. Энергетика*, 2012, № 6, с. 118–126.
- [2] Шлыков Ю.П., Ганин Е.А., Царевский С.Н. *Контактное термическое сопротивление*. Москва, Энергия, 1977, 328 с.
- [3] Лыков А.В. *Тепломассообмен*. Москва, Энергия, 1978, 480 с.
- [4] Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*. Москва, Наука, 1964, 488 с.
- [5] Зарубин В.С. *Инженерные методы решения задач теплопроводности*. Москва, Энергоатомиздат, 1983, 328 с.
- [6] Шаскольская М.П. *Кристаллография*. Москва, Высш. шк., 1976, 392 с.
- [7] Шермергор Т.Д. *Теория упругости микронеоднородных сред*. Москва, Наука, 1977, 400 с.
- [8] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективный коэффициент теплопроводности композита при неидеальном контакте шаровых включений и матрицы. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки*, 2012, Спец. вып. № 1 «Прикладная математика и механика», с. 84–94.
- [9] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. *Теплопроводность композитов с шаровыми включениями*. Saarbrucken, Deutschland. LAMBERT Academic Publishing, 2013, 77 с.
- [10] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективный коэффициент теплопроводности композита с шаровыми включениями. *Тепловые процессы в технике*, 2012, № 10, с. 470–474.
- [11] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, 512 с.

Статья поступила в редакцию 15.05.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Кувыркин Г.Н. Эффективный коэффициент теплопроводности композита при неидеальном контакте матрицы и анизотропных шаровых включений. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 4. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/672.html>

Кувыркин Георгий Николаевич — д-р техн. наук, проф. зав. кафедрой “Прикладная математика” МГТУ им. Н. Э. Баумана. e-mail: gnk1914@mail.ru